This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: _____

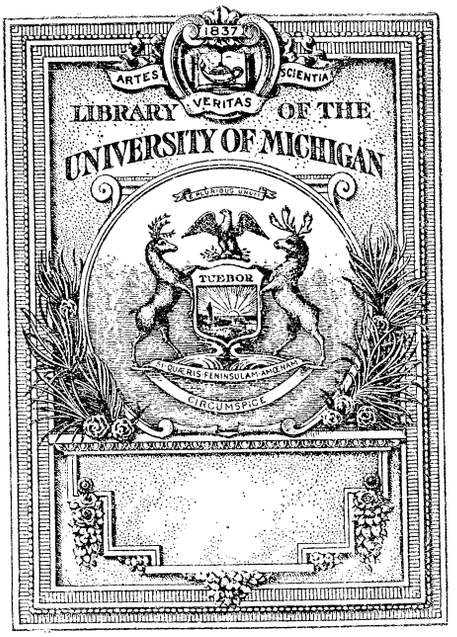
ABN1821
UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/18/88 R/DT 07/18/88 CC STAT mm E/L 1
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B41241
035/2: : |a (CaOTULAS)160030997
040: : |a MiU |c MiU
100:1 : |a Müller, Emil Adalbert, |d 1861-1927.
245:00: |a Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen,
|c von Dr. Emil Müller.
260: : |a Leipzig, |a Berlin, |b B. G. Teubner, |c 1908-1920.
300/1: : |a 2 v. |b III pl. (1 col., v.1) diagrs. |c 24 cm.
500/1: : |a Vol.2: 2nd ed.
650/1: 0: |a Geometry, Descriptive
998: : |c RAS |s 9124

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: _____
Camera Operator: _____

Hosted by Google



THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET

Hosted by Google

Alexander Ziwet

LEHRBUCH
DER
DARSTELLENDEN GEOMETRIE
FÜR TECHNISCHE HOCHSCHULEN

VON

Dr. EMIL MÜLLER
O. Ö. PROFESSOR AN DER K. K. TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN WIEN

ERSTER BAND

MIT 273 FIGUREN IM TEXT UND 3 TAFELN

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1908

Hosted by Google

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Hosted by Google

Vorwort.

Der Aufforderung der Verlagsbuchhandlung, ein Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen abzufassen, bin ich um so lieber nachgekommen, weil ich damit gleichzeitig Wünsche aus meinem Hörerkreis nach Herausgabe meiner Vorlesungen erfüllen konnte. Das Buch wird in der Tat wenig mehr als den Inhalt meiner seit sechs Jahren an der Technischen Hochschule in Wien (in erster Linie für die Studierenden der Bauingenieur- und Architekturabteilung) gehaltenen allgemeinen Vorlesung über darstellende Geometrie bringen; im vorliegenden Band wurden nur wenige Dinge eingeschaltet, die aus Zeitmangel in den Vorlesungen gewöhnlich bloß gestreift werden können, meiner Meinung nach aber an technischen Hochschulen gelehrt werden sollten.

Trotz der ausgezeichneten deutschen Lehrbücher der darstellenden Geometrie von *W. Fiedler, Chr. Wiener* und *K. Rohn u. E. Papperitz* werden jetzt von einigen Seiten Lehrbücher vorbereitet, die mehr den Bedürfnissen der technischen Hochschulen angepaßt sein sollen. Wenn ich es nun wage, gleichfalls mit einem solchen Versuch hervorzutreten, so berechtigt mich dazu vielleicht meine zwölfjährige Lehrtätigkeit an Gewerbeschulen, die mir reichlich Gelegenheit bot, insbesondre die Forderungen der Bauingenieure und Architekten an die darstellende Geometrie kennen zu lernen. Ferner aber auch der Umstand, daß ich als Schüler und mehrjähriger Assistent *R. Staudigl*s an die erprobten Traditionen der alten Wiener Schule anknüpfen konnte, wo besonders *Staudigl* die darstellende Geometrie in einer Weise lehrte, die von der in der Praxis stehenden Technikerschaft noch heute gutgeheißen wird und gleichzeitig einer Hochschule völlig angemessen war.

Obgleich sich die der Technik entsprossene darstellende Geometrie schon lange zu einer selbständigen Disziplin ausgestaltet hat, soll sie hier nur als Hilfswissenschaft des Technikers behandelt werden. Die Studierenden der technischen Hochschulen sind durch das sich ständig mehrende Fachwissen so überlastet, daß es für alle Lehrer der grundlegenden mathematischen, mechanischen und naturwissenschaftlichen Fächer das Hauptstreben sein muß, ihre Disziplinen im Hinblick auf deren praktische Verwertung zu lehren. Dieses Streben dürfte selbst bei bloß oberflächlicher Betrachtung dieses I. Bandes jedermann erkenntlich sein; im richtigen Lichte erschiene es freilich erst bei genauer Darlegung des Zusammenhanges der Vorlesungen mit den konstruktiven Übungen und der Durch-

Hosted by Google

führungsart der letzteren, worüber im Buche nur Andeutungen gegeben werden konnten. Mit dem Anknüpfen an das praktische technische Zeichnen glaube ich noch ein zweites Ziel besser zu erreichen.

Es besteht nur eine Meinung darüber, daß das Hauptziel des Unterrichtes in der darstellenden Geometrie die Ausbildung des räumlichen Anschauungsvermögens sei. Es scheint aber unter den darstellenden Geometern die Ansicht sehr verbreitet zu sein, daß diese Ausbildung unabhängig von den geometrischen Gebilden sei, mit denen man sich beschäftigt, während ich der Überzeugung bin, daß sie wesentlich von jenen Gebilden abhängt. Das abstrakte geometrische Vorstellen z. B., wie es etwa aus der Beschäftigung mit der synthetischen projektiven Geometrie entspringt, scheint mir von ganz andrer Art als das Vorstellen, wie es der Techniker in erster Linie braucht. Ihm handelt es sich gewöhnlich nicht um Linien oder Flächen, die bloß soweit definiert sind, daß sie noch mannigfaltige Gestalten annehmen können, sondern vor allem um Gegenstände von genau bestimmten Formen. Er muß imstande sein, sich von solchen Gegenständen nach Zeichnungen rasch eine möglichst klare und bis in alle Einzelheiten bestimmte Vorstellung zu bilden, und umgekehrt solche Vorstellungen wieder durch Zeichnungen andern zu übermitteln. Die Ausbildung nach dieser Richtung muß, neben dem Lehren und Einüben oft auftretender Konstruktionen, im Unterricht der darstellenden Geometrie für Techniker in erster Linie angestrebt werden. Hierzu ist es aber nötig, daß man die Konstruktionsübungen soweit als möglich an Körperformen durchführen läßt, wie sie dem Ingenieur später entgegentreten. Dies ist die Begründung für die Wahl der Beispiele und Aufgaben in diesem und mehr noch im II. Bande. Ich beobachte es jährlich aufs Neue, wie sich Realschüler, die schon drei Jahre darstellende Geometrie getrieben haben und für rein geometrische Gebilde ein ziemlich entwickeltes Vorstellungsvermögen besitzen, anstrengen müssen, um die ersten durch Zeichnungen gegebenen einfachen technischen Gegenstände richtig zu erfassen.

Eine Hauptschwierigkeit bestand für mich in der Auswahl der aufzunehmenden allgemeinen geometrischen Sätze. Der zukünftige Ingenieur und Architekt soll doch die gebräuchlichen Darstellungsmethoden und die Ausführung von Konstruktionen an den in der technischen Praxis gewöhnlich auftretenden Körperformen nicht bloß vorübergehend kennen, sondern sie aus einem höhern Gesichtspunkte betrachten und damit beherrschen lernen. Hierzu sind aber einige allgemeinere Begriffe (wie geometrische Verwandtschaft, algebraische Kurve und Fläche, verschiedene differentialgeometrische Begriffe usw.) nötig, die der Studierende weder von der Mittelschule mitbringt, noch an der Hochschule in den mathematischen Vorlesungen des ersten Semesters erwerben kann. Da diese Begriffe auch für andre Gebiete als die darstellende Geometrie von Wert sind, so mochte ich sie keinesfalls unterdrücken. Um aber nicht zu viel reine Geometrie treiben zu müssen, habe ich mich nicht gescheut, an einigen Stellen allgemeine Sätze aus der analytischen Geometrie, Differentialgeometrie, ja sogar Funktionentheorie herüber zu nehmen. Ich befolgte also einen in den technischen Wissenschaften allgemein üblichen Brauch, wo Gesetze den verschiedenen naturwissenschaftlichen Disziplinen ohne Begründung

Hosted by Google

entnommen und nun daraus die für das betreffende Fachgebiet wertvollen Folgerungen gezogen werden. Wichtig für den Techniker ist, daß er allgemeine Begriffe und Gesetze richtig erfassen und anwenden lerne. Die Mathematiker mögen aus diesem Gesichtspunkt die an gar manchen Stellen dieses Buches fehlende Strenge nachsichtiger beurteilen.[1])

Wenn ich bestrebt war, überall allgemeinere Methoden und Anschauungsweisen zu verwerten, so leitete mich die Überzeugung, daß der künftige Ingenieur nicht nur mit den modernen Begriffen der Naturwissenschaften, sondern auch mit denen der Mathematik und Geometrie, soweit er sie verwerten kann, vertraut gemacht werden sollte, freilich unter möglichster Vermeidung des Ballastes langer Beweise, die keinen tieferen Einblick verschaffen. Die vor etwa anderthalb Jahrzehnten entstandene Bewegung für die Bevorzugung elementarer mathematischer Methoden im technischen Hochschulunterricht ist ja, wie vorauszusehen war, wieder im Sande verlaufen. Nicht eine Verringerung, sondern eine Vertiefung seiner theoretischen Ausbildung braucht der zukünftige Ingenieur, aber diese Ausbildung muß seinen Bedürfnissen angepaßt werden.

Nach Darlegung dieser allgemeinen Leitgedanken sei mir noch erlaubt, kurz auf den Inhalt und die Form des vorliegenden Bandes einzugehen.

Dieser I. Band ist der Abbildung mittels zugeordneter Normalrisse (sonst Grund- und Aufrißverfahren genannt) und der darauf beruhenden konstruktiven Behandlung der Grundaufgaben sowie der wichtigsten Kurven und Flächen gewidmet, während der II. Band die kotierte Projektion samt Dachausmittlung, die orthogonale und schiefe Achsonometrie, die schiefe Projektion und Perspektive enthalten wird. Obgleich das Buch, mit den Elementen beginnend, alles systematisch entwickelt, so wird doch eine vorhergegangene Beschäftigung mit der darstellenden Geometrie, also eine gewisse Denk- und Konstruktionsfertigkeit vorausgesetzt. Nur unter dieser Voraussetzung durfte der erste Abschnitt in den meisten Kapiteln so knapp gehalten und mit der Darstellung ebenflächig begrenzter Körper ohne viele Vorbereitungen eingesetzt werden. Die Erfahrung hat gelehrt, daß auch Gymnasialabiturienten, die sich nur kurze Zeit für die darstellende Geometrie vorbereitet haben, bei entsprechendem Fleiße noch ganz gut diesen Vorlesungen zu folgen vermögen. Die gewählte Reihenfolge der Kapitel, wie etwa die Einschaltung des III. Kapitels über Drehungen ist teilweise durch die Rücksicht auf die parallel laufenden Konstruktionsübungen bedingt, für die zweckentsprechender Zeichenstoff vorhanden sein muß.

---

1) Es ist ein Zeichen der wissenschaftlichen Erstarkung der Geometrie, daß man in neuester Zeit strengere Anforderungen an die Formulierung und die Beweise ihrer Sätze stellt. Nur scheint es mir pädagogisch kaum richtig, den Anfänger grundsätzlich mit strengen Formulierungen zu belasten, deren Grund er meist gar nicht erkennen wird, weil ihm die Einsicht in die möglichen Ausnahmefälle fehlt. In der Lehre von den Kurven und Flächen z. B. handelt es sich vor allem um den sogenannten allgemeinen, d. i. typischen Fall; die Aufzählung der möglichen Sonder- und Ausnahmefälle interessiert erst auf einer höhern Verständnisstufe, erschwert dem Anfänger vielleicht sogar die Auffassung des typischen Falls.

Hosted by Google

Über die einzelnen in diesem Bande behandelten Gegenstände kann das Inhaltsverzeichnis orientieren. Hier soll nur auf einige Besonderheiten hingewiesen werden.

Zur Vereinfachung der Konstruktionsbeschreibung dienen, außer einer einheitlichen Bezeichnungsweise, Abkürzungen (S. 7—10), die fast durchgehends der Ausdehnungslehre von *H. Graßmann* entlehnt sind.

Die Verwendung von Seitenrissen als Konstruktionsprinzip ist konsequent durchgeführt; im Hinblick darauf wurde vom Anfang an die allgemeinere Auffassung berücksichtigt, daß die beiden normalen Rißebenen beliebige Lage im Raume haben dürfen. Ferner wurde die im praktischen Zeichnen so häufig auftretende Benutzung von Auf- und Kreuzriß zur Durchführung von Konstruktionen mehr als sonst üblich in den Vordergrund gerückt. Da in technischen Zeichnungen nie die Rißachsen angegeben oder benutzt werden und dementsprechend auch nie die Spurpunkte von Geraden oder die Spuren von Ebenen mit den Rißebenen zur Verwendung kommen, so fanden sie auch hier keine Berücksichtigung und es wurde das Weglassen der Rißachsen als zweites Konstruktionsprinzip durchgeführt. Durch Vereinigung beider Prinzipien erlangt man jene im technischen Zeichnen allgemein übliche Konstruktionsfreiheit, die dann eine unmittelbare praktische Anwendung des in der darstellenden Geometrie Gelernten gestattet. Durch Ausnutzung dieser Freiheit erreicht man auch bei zahlreichen Aufgaben gegenüber ihrer sonstigen schulmäßigen Durchführung nicht unbedeutende Vereinfachungen, wofür das Buch hinreichend viele Beispiele bietet.

Bei der Behandlung der Grundaufgaben wurden nach *Staudigl*s Beispiel die Aufgaben über Lagenbeziehungen von denen über Maßverhältnisse getrennt. Die ersteren habe ich gleich unter solchen verallgemeinerten Voraussetzungen gelöst, daß die Gültigkeit dieser Lösungsformen auch für die im II. Band zu besprechenden übrigen linearen Abbildungen bewiesen ist. Das Ergebnis wird übrigens schon an einigen Stellen dieses Bandes angewandt.

Eine eingehendere Behandlung als sonst in allgemeinen Werken ähnlichen Umfangs erfuhren die Schattenkonstruktionen. Denn abgesehen von ihrer praktischen Anwendbarkeit halte ich das Konstruieren der Schatten an technischen Gegenständen, neben deren achsonometrischer Darstellung, für das beste Mittel zur Ausbildung des räumlichen Anschauungsvermögens nach der oben erwähnten Richtung, weil dabei der Studierende beständig gezwungen ist, sich die Körperformen klar vorzustellen. Natürlich müssen zur Erreichung dieses Zieles die konstruktiven Übungen so eingerichtet sein, daß das zwecklose und eines Hochschülers unwürdige Kopieren wegfällt, sondern jeder Einzelne zur selbständigen Anwendung der vorgetragenen Konstruktionen in einer vorliegenden Aufgabe gezwungen ist. Es gehört hierzu vor allem eine reiche Sammlung durch Maße gegebener Übungsbeispiele; leider wird auf diesem Gebiet sehr wenig veröffentlicht, sodaß man so ziemlich auf das eigene, mühsame Zusammensuchen zweckentsprechender Aufgaben aus technischen Werken angewiesen bleibt.

Wegen ihrer praktischen Wichtigkeit ist überall auf die Verein-

Hosted by Google

fachungen hingewiesen, die die Schattenkonstruktionen bei 45^0-Beleuchtung gestatten.

Den allgemeinen Flächen zweiter Ordnung habe ich nur wenig Raum gegönnt, weil sie, trotz ihres hohen theoretischen Interesses, verhältnismäßig sehr selten technische Verwendung finden. Die in Nr. 144 kurz besprochenen „graphischen Flächen" sind für den Techniker wahrscheinlich nützlicher als die Flächen zweiter Ordnung oder manche andre in der reinen Geometrie hochwichtige Flächenart.

Ich widerstand auch im Hinblick auf den Zweck des Buches der Verlockung, die projektive Geometrie als solche aufzunehmen, sondern beschränkte mich auf die Erläuterung einiger wenigen Begriffe und Sätze.[1]) Diese genügen, um die für den Konstrukteur unbedingt notwendigen Sätze über Kurven zweiter Ordnung aus der Kreisprojektion herzuleiten, wenn man, wie es die Einbeziehung der algebraischen Kurven ohnehin fordert, eine Anleihe bei der analytischen Geometrie macht.

Die beigefügten historischen Notizen und Literaturverweise[2]), die selbstverständlich ganz lückenhaft sind, sollen auf den Anfänger anregend wirken und werden dem Vorgeschrittenen vielleicht willkommen sein.

Große Sorgfalt wurde auf die Herstellung der Figuren verwendet, von denen nur wenige bloße Übungsbeispiele darstellen. Die Konstruktionslinien sind meist in ihrem ganzen Verlauf gezeichnet, um den Zusammenhang zwischen den einzelnen Punkten müheloser erkennen zu lassen; aus demselben Grunde wurde das Fällen von Loten und das Übertragen von Strecken angedeutet. Ich hoffe, daß die Figuren hierdurch an Lesbarkeit gewonnen haben, sodaß sie an vielen Stellen für sich sprechen können und an andern die kurzen dazu gehörigen Konstruktionsbeschreibungen zum sichern Verständnis genügen werden. Ich war auch bemüht, den Figuren möglichst den Charakter technischer Zeichnungen zu geben. Aus diesem Grunde wurden zur Beschreibung nicht Drucklettern nachahmende Buchstabenformen gewählt, sondern solche, die wirklich zeichnerischen Charakter haben. Die stehenden Formen scheinen mir aus verschiedenen Gründen den Vorzug vor den liegenden zu verdienen.

Zum bequemen Gebrauch dieses Bandes dürften außerdem das genaue Sachregister (samt Namenverzeichnis), das Hervorheben der Hauptsätze und der eingeführten Benennungen durch kursiven Druck, die Nummernüberschriften und die Kopfüberschriften der Seiten manches beitragen.

Indem ich das Buch der Öffentlichkeit übergebe, obliegt mir die Pflicht, meinen Herrn Assistenten *A. Jirsa* und *W. Olbrich* sowie meinem Herrn Konstrukteur *K. Mack* für ihre wertvolle und ausdauernde Mitarbeit wärmstens zu danken. Herr *Jirsa* hat auf Grund meiner Blei-

1) Die projektive Geometrie wird übrigens an der technischen Hochschule in Wien seit ungefähr vier Jahrzehnten als besondrer Gegenstand Jahr für Jahr vorgetragen und von einer großen Hörerzahl besucht.

2) Hierbei bediente ich mich der von *Felix Müller* in dem Heftchen: „Abgekürzte Titel von Zeitschriften mathematischen Inhalts", Leipzig 1903, zusammengestellten Abkürzungen.

Hosted by Google

stiftzeichnungen (die Tafeln und einige Figuren bloß nach mündlicher Weisung) die großen Originalzeichnungen samt Beschriftung für die Herstellung der Klischees ausgeführt. Herr *Mack* sowie ganz besonders Herr *Olbrich* haben die Korrektur der Figuren und Druckbogen mitbesorgt und dabei manche textliche Verbesserungen verursacht. Letzterer hat außerdem das Sachregister und Namenverzeichnis zusammengestellt.

Schließlich danke ich der Verlagsbuchhandlung für das bereitwillige Entgegenkommen, das sie allen meinen Wünschen gegenüber jederzeit bewiesen hat und für die Ausstattung, die sie dem Buche zuteil werden ließ.

Wien, im März 1908.

Emil Müller.

Hosted by Google

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 1

Bezeichnungsweise und Abkürzungen 7

Erster Abschnitt.

Abbildung mittels zugeordneter Normalrisse.

I. Kapitel.

Benennungen und Sätze über zugeordnete Normalrisse.

1. Benennungen über zugeordnete Normalrisse 11
2. Sätze über zugeordnete Normalrisse eines Punktes 12
3. Lage eines Punktes in den vier Räumen 13
4. Bemerkungen über ähnliche und projektive Punktreihen 14
5. Zugeordnete Normalrisse von Geraden, ebenen Figuren und ebenflächig begrenzten Körpern 17
6. Das Vereinigen zugeordneter Normalrisse in einer Ebene 18

II. Kapitel.

Seitenrisse.

7. Zeichnen von Seitenrissen 22
8. Aufgabe (Seitenrisse einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide). Gesetze über die Sichtbarkeit für konvexe Polyeder 24
9. Zeichnen und Verwendung des Kreuzrisses 27
10. Die Verwendung von Seitenrissen als allgemeines Konstruktionsprinzip 29

III. Kapitel.

Drehungen.

11. Drehungen um Achsen, die zu den Rißebenen senkrecht stehen 30
12. Drehungen um Achsen, die zu den Rißebenen parallel sind. 32
13. Drehungen um Achsen allgemeiner Lage 34

IV. Kapitel.

Das Weglassen der Rißachsen.

14. Einfluß einer Schiebung der Rißachse. 35
15. Einfluß des Weglassens der Rißachse 35

V. Kapitel.

Die Grundaufgaben über Lagenbeziehungen.

16. Einteilung der geometrischen Aufgaben 37
17. Voraussetzungen für die Lösung der Aufgaben über Lagenbeziehungen 38

Hosted by Google

Seite

18. Das Ineinanderliegen von Punkten und Geraden 40
19. Darstellung einer Ebene 41
20. Das Ineinanderliegen von Ebenen und Geraden 42
21. Das Ineinanderliegen von Punkten und Ebenen 43
22. Die Grundaufgaben über Lagenbeziehungen. Dualitätsgesetz 44
23. Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene 45
24. Schnittlinie zweier Ebenen 46
25. Allgemeines Gesetz betreffend die Lösung der Aufgaben über Lagenbeziehungen 48

VI. Kapitel.

Schattenbestimmung für ebenflächige Körper in zugeordneten Normalrissen.

26. Beleuchtungsarten 48
27. Schlagschatten eines Punktes; Licht- und Schattenseite einer Ebene . . 50
28. Schlagschatten einer Geraden 53
29. Aufgabe (Schattenbestimmung an zwei sich schneidenden ebenen Figuren) 55
30. Gesetze über Schlagschatten von Geraden 57
31. Arten und Darstellung der an Körpern auftretenden Schatten 57
32. Schattenkonstruktion für die rechte Hälfte einer durch zwei Konsolen gestützten Platte 60
33. Schattenkonstruktion an demselben Körper in gedrehter Stellung . . . 62
34. Schattenkonstruktion an einer um eine lotrechte Achse gedrehten Balkenverbindung mittels Auf- und Seitenriß 63
35. Schatten eines Schornsteinkopfes auf eine Dachfläche 66

VII. Kapitel.

Affinität.

36. Definition einer allgemeinen Punktverwandtschaft zwischen zwei Ebenen, insbesondre einer Kollineation 70
37. Definition und Eigenschaften affin verwandter Ebenen 71
38. Perspektive Lage affiner Figuren derselben Ebene 73
39. Perspektive Vereinigung zweier beliebigen ebenen affinen Figuren und Konstruktion ihrer entsprechenden rechten Winkel 76

VIII. Kapitel.

Aufgaben über Maßverhältnisse.

40. Länge und Tafelneigungen einer durch zugeordnete Normalrisse gegebenen Strecke 79
41. Durch einen Punkt eine Gerade mit gegebenen Tafelneigungen zu legen 81
42. Über Normalrisse eines rechten Winkels 83
43. Haupt- und Fallinien von Ebenen 83
44. Senkrechtstehen von Geraden auf Ebenen 84
45. Abstand eines Punktes von einer Geraden oder einer Ebene 85
46. Einen Punkt um eine zu einer Rißebene parallele Gerade so lange zu drehen, bis die Verbindungsebene beider zur Rißebene parallel ist . . 87
47. Neigungswinkel zweier sich schneidenden Geraden 88
48. Sätze über Normalrisse von Winkeln 88
49. Winkel zweier Ebenen; Tafelneigungen einer Ebene; Winkel einer Geraden mit einer Ebene 90

Hosted by Google

Seite

50. Ermittlung der Gestalt einer durch zugeordnete Normalrisse gegebenen ebenen Figur 92
51. Übungsaufgabe (Zeichnen des Aufrisses eines Würfels, der vorgegebene Bedingungen erfüllt) 94
52. Aufgabe: Von einem Dreieck abc, das einem gegebenen Dreieck $a_1 b_1 c_1$ ähnlich sein soll, ist der Grundriß $a'b'c'$ und der Aufriß a'' eines Eckpunktes gegeben, der Aufriß $a''b''c''$ zu ermitteln 96
53. Konstruktion eines Dreikants aus seinen Seiten 98
54. Weitere Aufgaben über das Dreikant 101
55. Ausführung von Konstruktionen in begrenzter Zeichenebene 104
56. Übungsaufgaben 108

Zweiter Abschnitt.

Kurven und Flächen. Lösung sie betreffender Aufgaben in zugeordneten Normalrissen.

I. Kapitel.

Allgemeines über Kurven.

57. Ebene und räumliche Kurven. Transzendente und algebraische ebene Kurven; Ordnungszahl der letzteren 111
58. Tangente und Asymptote einer ebenen Kurve. Doppelpunkte und Doppeltangenten 114
59. Verhalten einer ebenen Kurve in der Umgebung eines ihrer Punkte . 117
60. Ebene Kurven als Umhüllungsgebilde ihrer Tangenten. Klassenzahl algebraischer Kurven. *Plücker*sche Formeln 119
61. Gemeinsame Punkte oder Tangenten zweier algebraischen Kurven derselben Ebene 122
62. Evolute und Evolvente 123
63. Krümmungskreis ebener Kurven 125
64. Darstellung ebener Kurven 128
65. Einteilung der Raumkurven. Ordnungszahl algebraischer Raumkurven 130
66. Tangente, Schmiegebene, Hauptnormale usw. einer Raumkurve. Verhalten einer Raumkurve in der Umgebung eines ihrer Punkte 131
67. Krümmungen einer Raumkurve. Klassenzahl algebraischer Raumkurven 132
68. Projektionen von Raumkurven 133
69. Konstruktion der Tangente, der Schmiegebene und des Krümmungshalbmessers in einem Punkte einer durch zugeordnete Normalrisse gegebenen Raumkurve 136
70. Ermittlung der Schnittpunkte einer durch zugeordnete Normalrisse gegebenen Raumkurve mit einer Ebene 137

II. Kapitel.

Allgemeines über krumme Flächen.

71. Erzeugung krummer Flächen, ihre Einteilung in algebraische und transzendente. Einige Sätze über algebraische Flächen 139
72. Einteilung krummer Flächen nach der Art ihrer Erzeugenden. Einige Eigenschaften der abwickelbaren Flächen 140
73. Tangente, Tangentenebene, Haupttangenten einer Fläche 143
74. Krümmungslinien, Haupttangentenkurven und geodätische Linien krummer Flächen 147

Hosted by Google

III. Kapitel.

Kurven zweiter Ordnung.

Seite

75. Normalriß eines Kreises 149
76. Elementarer Beweis dafür, daß der Normalriß eines Kreises eine Ellipse ist 153
77. Krümmungskreise der Ellipse 155
78. Konjugierte Durchmesser einer Ellipse. Konstruktion der Achsen aus konjugierten Durchmessern. Normalenkonstruktion 160
79. Schatten des Kreises und der Ellipse auf eine Ebene (für Parallelbeleuchtung) 162
80. Lösung von Aufgaben über die Ellipse mittels eines affinen Kreises . 165
81. Die Kurven zweiter Ordnung als ebene Schnitte von Drehkegeln . . 168
82. Doppelverhältnis von vier Punkten einer Reihe oder vier Strahlen eines Büschels 173
83. Harmonische Punkte und Strahlen 175
84. Polareigenschaften des Kreises 176
85. Polareigenschaften der Kurven zweiter Ordnung 180
86. Eigenschaften und Darstellung der Hyperbel 181
87. Eigenschaften und Darstellung der Parabel 185

IV. Kapitel.

Kegel- und Zylinderflächen, allgemeine abwickelbare Flächen.

88. Darstellung und Tangentenebenen beliebiger Kegel- und Zylinderflächen 187
89. Ebene Schnitte beliebiger Kegel- und Zylinderflächen. Perspektive Kollineation ebener Figuren 189
90. Ebene Schnitte beliebiger Kegel- und Zylinderflächen zweiter Ordnung 192
91. Ebene Schnitte von Drehkegeln und Drehzylindern in besondern Lagen 197
92. Allgemeines über die Eigen- und Schlagschattengrenzen krummer Flächen 201
93. Konstruktion der Eigenschattengrenze von Kegelflächen 204
94. Konstruktion der Eigenschattengrenze von Zylinderflächen 207
95. Schlagschatten einer beliebigen Kurve auf Kegel- und Zylinderflächen. Methode des Zurückführens 210
96. Schlagschatten eines Kreises auf Kreiskegel und Kreiszylinder . . . 212
97. Schlagschatten von Geraden auf Kegel- und Zylinderflächen 215
98. Über das Zerfallen der Schnittkurve zweier Flächen zweiter Ordnung in zwei Kurven zweiter Ordnung 220
99. Schlagschatten der ebenen Randkurve einer Kegel- oder Zylinderfläche zweiter Ordnung auf diese 221
100. Durchdringung von Kegel- und Zylinderflächen im allgemeinen und solchen zweiter Ordnung im besondern 225
101. Das Zerfallen der Schnittkurve von Kegel- und Zylinderflächen zweiter Ordnung. Die Raumkurven dritter Ordnung 228
102. Konstruktion der Schnittkurve von Kegel- und Zylinderflächen zweiter Ordnung, insbesondre von Drehkegeln und Drehzylindern bei speziellen Lagen gegen die Rißebenen 230
103. Gewölbeformen und Stichkappen 235
104. Einige Konstruktionen für abwickelbare Flächen 238
105. Schraubenlinie und abwickelbare Schraubenfläche 240
106. Böschungsflächen 247
107. Verebnen abwickelbarer Flächen 249

Hosted by Google

V. Kapitel.

Kugelfläche.

Seite

108. Darstellung der Kugel, Grundaufgaben, ebene Schnitte 253
109. Schnitte von Kugeln mit Kegeln und Zylindern (Stichkappen) und von Kugeln untereinander 257
110. Eigenschattengrenze der Kugel und ihr Schlagschatten auf Ebenen . 260
111. Schlagschatten auf eine Kugel 263
112. Allgemeines über Beleuchtungslehre; Schattierung ebenflächig begrenzter Körper. 265
113. Allgemeines über Lichtgleichen krummer Flächen. Konstruktion der Lichtgleichen einer Kugel und Ausführung der Schattierung 267

VI. Kapitel.

Drehflächen.

114. Erzeugung und Eigenschaften der Drehflächen. 271
115. Darstellung einer Drehfläche. Grundaufgaben 272
116. Ebene Schnitte und Durchdringungen von Drehflächen 275
117. Verhalten einer krummen Fläche in der Umgebung eines ihrer regulären Punkte. *Dupin*sche Indikatrix 280
118. Krümmungslinien krummer Flächen 285
119. Konstruktion der Indikatrix für einen Punkt einer Drehfläche. . . . 286
120. Anwendungen des Begriffs konjugierter Tangenten 287
121. Allgemeines über die Schattengrenzen an Drehflächen; Konstruktion der Hauptpunkte ihrer Eigenschattengrenze 291
122. Konstruktion beliebiger Punkte der Eigenschattengrenze einer Drehfläche 294
123. Konstruktion von Tangenten der Eigenschattengrenze einer Drehfläche. Einige Sätze über den Verlauf dieser Kurve. 297
124. Schlagschatten an Drehflächen. Konstruktion des Schlagschattens eines Randkreises 299
125. Schlagschatten einer Eigenschattengrenze auf die Drehfläche 301
126. Schlagschatten einer quadratischen Platte auf eine Drehfläche . . . 302
127. Konstruktion der Eigenschattengrenze einer Wulstfläche in dem zu ihrer Drehachse senkrechten Riß 305
128. Konstruktion der Lichtgleichen auf Drehflächen mittels eingeschriebener Kugeln 307
129. Konstruktion der Lichtgleichen auf Zylindern und Drehkegeln . . . 311
130. Konstruktion der Lichtgleichen mittels einer Normalkugel 312
131. Umrißermittlung einer Drehfläche, deren Achse gegen die betreffende Rißebene beliebig geneigt ist 314
132. Das einschalige Drehhyperboloid 318
133. Ordnung der durch Drehung einer algebraischen Kurve erzeugten Fläche; Folgerungen daraus 321
134. Die Drehflächen zweiter Ordnung 322
135. Die allgemeinen Flächen zweiter Ordnung 324
136. Einige Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung und Andeutungen über ihre konstruktive Behandlung 327

VII. Kapitel.

Schraubenflächen.

137. Erzeugung der Schraubenflächen; Eigenschaften und Benennungen . 330
138. Darstellung der allgemeinen Schraubenfläche; Lösung einiger Grundaufgaben 331

Hosted by Google

Seite

139. Konstruktion von Tangentenebenen an eine allgemeine Schraubenfläche und die dieser längs Bahnschraubenlinien umschriebenen abwickelbaren Flächen 335
140. Konstruktion der Eigenschattengrenze und des Umrisses einer allgemeinen Schraubenfläche 336
141. Konstruktion der Eigenschattengrenze und des Umrisses von Regelschraubenflächen 338

VIII. Kapitel.

Windschiefe und graphische Flächen.

142. Erzeugung windschiefer Flächen; Lösung einiger Grundaufgaben. Einige Sätze über algebraische windschiefe Flächen 343
143. Berührungshyperboloide längs einer Erzeugenden einer windschiefen Fläche und ihre Verwendung zur Konstruktion der Eigenschattengrenze und des Umrisses der Fläche 346
144. Graphische Flächen 349

Sachregister 354

Namenverzeichnis 367

Hosted by Google

Einleitung.

Die *darstellende Geometrie* kann als diejenige Wissenschaft erklärt werden, welche lehrt, Raumgebilde (Punkte, Linien, Flächen, Körper) abzubilden und Aufgaben über diese auf Grund der Abbildung mittels Zeichnung zu lösen.[1])

Dieses Abbilden geschieht gewöhnlich auf eine ebene, seltener auf eine krumme Fläche (die Zeichenfläche) und ist meist derart beschaffen, daß das Bild, von der Farbe abgesehen, einen ähnlichen Eindruck wie der Gegenstand selbst auf den Beschauer hervorzubringen vermag. Zuweilen werden auch dreidimensionale Gebilde wieder durch dreidimensionale abgebildet, z. B. wenn man ein (verkleinertes) Modell oder ein Reliefbild eines Gegenstandes herstellt. Auf letztere Darstellungsmethode soll jedoch hier nicht eingegangen werden; denn für die verschiedensten Zweige der Technik ist gerade der Umstand von Wichtigkeit, daß man körperliche Gebilde durch flächenhafte, zeichnerisch leicht herstellbare Bilder sowohl der Lage als der Gestalt und Größe nach zu bestimmen vermag. Solche Abbildungsmethoden lassen sich, vom theoretischen Standpunkte aus betrachtet, viele ersinnen; von den in der Technik verwendeten ist jedoch die allgemeinste die sogenannte *Zentralprojektion* oder *Perspektive*. Aus einem festen Punkte o, dem *Auge* (oculus) oder *Projektionszentrum*, legt man nach den einzelnen Punkten des abzubildenden Gegenstandes gerade Linien *(Seh-* oder *Projektionsstrahlen)* und sucht deren Schnittpunkte mit einer festgewählten, nicht durch o gehenden Ebene II, der *Bild-* oder *Projektionsebene*. Diese Schnittpunkte heißen die *perspektiven Bilder*, *Zentralrisse*[2]), *Zentralbilder* oder *Zentralprojektionen* der Raumpunkte. So sind in Fig. 1 p^c, q^c, r^c die Bilder von p, q, r. Jeder Punkt des Raumes (mit Ausnahme von o) besitzt ein perspektives Bild, das aber auch ins Unendliche fallen kann. Jeder Punkt der Bildebene ist Bild

1) *Chr. Wiener,* Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Bd. 1, Leipzig 1884, S. 1. — Fast gleichlautend findet sich diese Definition in dem eigenartigen Büchlein *F. A. Klingenfeld*, Lehrb. d. darst. Geom., Bd. 1, Nürnberg 1871, S. 2 (1. Aufl. 1851, 3. Aufl., bearb. von *W. Marx*, 1885).

2) *F. A. Klingenfeld*, a. a. O. S. 67. *Zentralbild* findet sich bei *C. H. Müller* und *O. Presler*, Leitfaden d. Projektionslehre, Ausg. A, Leipzig und Berlin 1903, S. 245.

Hosted by Google

unendlich vieler Punkte, nämlich aller Punkte des durch ihn gehenden Sehstrahles. Durch das Zentralbild eines Punktes ist also dessen Lage noch nicht bestimmt. Zu seiner eindeutigen Bestimmung ist außer dem Bilde noch eine Angabe erforderlich, die auf verschiedene, später zu besprechende Arten erfolgen kann.

Aus der Definition des Zentralbildes eines Punktes folgt sofort, *daß die Bilder aller Punkte einer Geraden wieder in einer Geraden*

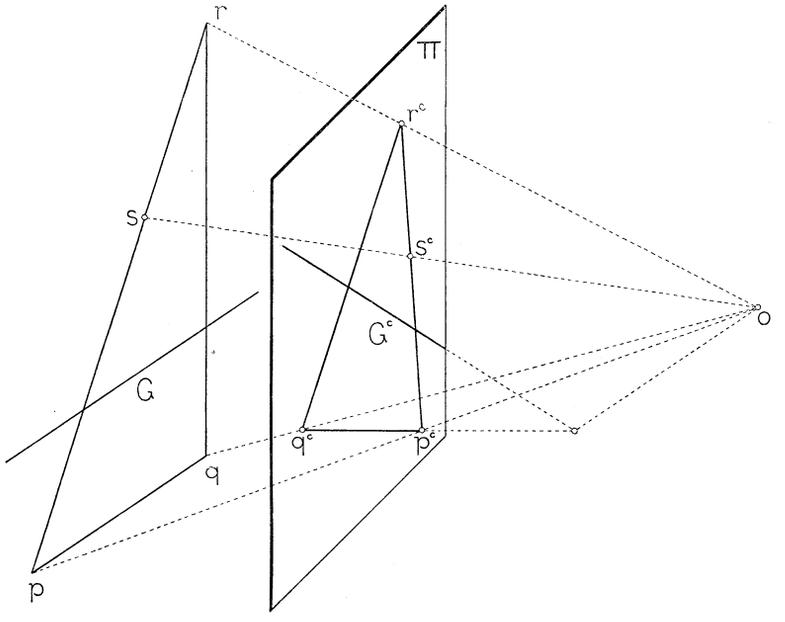


Fig. 1.

liegen. Denn die Sehstrahlen nach den Punkten einer Geraden G erfüllen eine Ebene, die *projizierende Ebene* oder *Sehebene* von G; ihr Schnitt mit der Bildebene Π ist aber der Ort G^c der Bilder der Punkte von G. Man nennt G^c das *perspektive Bild, Zentralbild* usw. von G. Nur wenn die Gerade durch o geht, ist ihre Sehebene unbestimmt (jede Ebene durch sie) und ihr *Bild ein Punkt.*

Die Zentralrisse paralleler Geraden (z. B. $G \parallel [pq]$) sind im allgemeinen nicht parallel. Denn die Sehebenen solcher Geraden schneiden sich in einer zu den gegebenen parallelen Geraden durch o, deren Schnittpunkt mit Π den Bildern gemeinsam ist. Sind also die gegebenen parallelen Geraden nicht auch zu Π parallel, so gehen ihre Zentralbilder durch einen im Endlichen gelegenen Punkt, ihren *Fluchtpunkt.*

Hosted by Google

Zentralrisse von Gegenständen geben unter gewissen Bedingungen die anschaulichsten, d. h. dem Beschauer den wirklichen Gegenstand am lebhaftesten vortäuschenden Bilder. Wird nämlich das Zentralbild bloß mit einem, in o befindlichen Auge angesehen, so sendet das Bild dasselbe Lichtstrahlbündel in das Auge wie (von Farbe, Glanz usw. abgesehen) der Gegenstand selbst; der Beschauer sieht daher[1]) den Gegenstand körperlich vor sich. Solche Bilder sind Photographien, Gemälde, Schaubilder von Gebäuden usw.

Die Hauptgesetze der Perspektive waren vielleicht schon den alten Griechen und Römern bekannt; diese Kenntnis ging jedoch in den folgenden Jahrhunderten verloren und wurde in der Renaissancezeit (15. Jahrh.) neu geschaffen und zwar in den Niederlanden, in Italien und Deutschland. Das erste selbständige deutsche Werk über Perspektive rührt von dem bekannten Maler *Albrecht Dürer* her. Es bildet einen Teil seines interessanten Buches „Underweysung der Messung mit Zirckel und richtscheyt, in Linien, Ebenen und gantzen Corporen usw.“, Nürnberg 1525. Das erste Werk über Perspektive überhaupt stammt von dem hochbegabten, vielseitigen Baumeister und Gelehrten *Leo Battista Alberti*. Es führt den Titel „de pictura“ und muß vor 1446 geschrieben sein. Im Druck kam das Buch lateinisch erst im Jahre 1511 in Nürnberg heraus; eine italienische Übersetzung davon erschien in Mailand 1804. Mehr über die Geschichte der Perspektive wie der darstellenden Geometrie überhaupt findet man im ersten Bande des zum weiteren Studium sehr empfehlenswerten „Lehrbuch der darstellenden Geometrie“ von *Chr. Wiener*, in zwei Bänden, Leipzig 1884, 1887. Es sei nur noch als ein Hauptförderer der Perspektive der verdiente Physiker und Mathematiker *J. H. Lambert* (1728—1777) angeführt, dessen Büchlein „Freye Perspektive“, Zürich 1759 (2. Aufl., mit Anmerkungen und Zusätzen vermehrt, 1774) zu den hervorragendsten Werken über den Gegenstand gehört.

Obgleich die Perspektive die anschaulichsten Bilder liefert, ist sie doch nicht die allgemein gebräuchliche Darstellungsart des Technikers, schon weil die Bilder verhältnismäßig umständlich herstellbar sind. Eine einfachere Abbildungsart, die im allgemeinen noch ziemlich anschauliche Bilder liefert, ergibt sich durch Verwendung eines unendlichfernen Projektionszentrums o, d. h. wenn man die Projektionsstrahlen (Sehstrahlen) zu einer festen Richtung parallel wählt

1) Bei näherer Untersuchung der Entstehungsweise unseres subjektiven Anschauungsbildes erkennt man, daß diese kurze Begründung nicht hinreicht und zwar schon aus dem Grunde, weil das Auge beim Betrachten eines Gegenstandes (mithin auch eines Bildes) nicht ruhig bleibt, sondern sich in beständiger Bewegung befindet. Vgl. hierzu: *G. Hauck*, „Die subjektive Perspektive und die horizontalen Kurvaturen des dorischen Stils“, Stuttgart 1879, wo sich weitere diesbezügliche Literatur angegeben findet, sowie die beiden Aufsätze: „Über die Grundprinzipien der Linearperspektive“, Z. Math. Phys. 26 (1881), S. 273—296 u. „Perspektivische Studien“, ebenda 27 (1882), S. 236—247.

Hosted by Google

(Fig. 2: a^s, b^s, c^s Bilder von a, b, c). In einer solchen *Parallelprojektion* (*Parallelriß*[1]) sind die Bilder paralleler Geraden wieder parallel, parallele Strecken des Raumes erscheinen im Bilde in demselben Verhältnis geändert (verkürzt oder verlängert), die zu Π parallelen Strecken in ihrer wirklichen Länge. Solche Bilder geben keinen Gesichtseindruck wieder, da der Beschauer sich nie in unendlicher Entfernung von der Bildebene befindet, lassen sich aber als Annäherungen an perspektive Bilder auffassen.

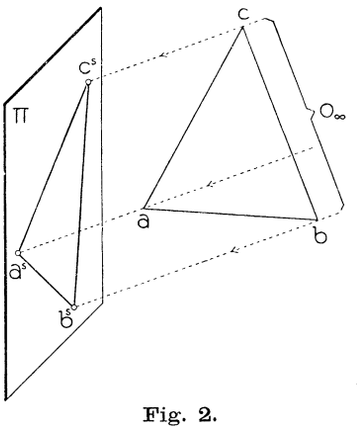


Fig. 2.

Ist die Neigung der Sehstrahlen gegen die Bildebene von 0^0 und 90^0 verschieden, so heißt die Abbildung *schiefe (schräge, klinogonale) Projektion* oder kürzer ein *Schrägriß*[2]. Die in der Stereometrie gezeichneten Bilder von Prismen, Pyramiden, Zylindern usw. (Fig. 3) sind solche Schrägrisse. Auch wir werden in der Folge „Erklärungsfiguren", wozu schon Fig. 1 u. 2 gehören, häufig auf diese Art zeichnen; zu deren Herstellung ist bloß die Kenntnis der oben erwähnten Gesetze erforderlich.

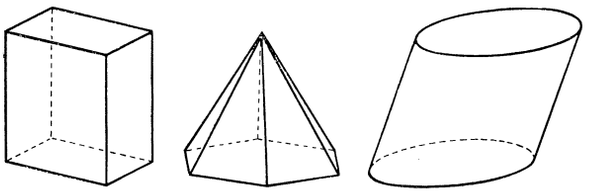


Fig. 3.

Auch die Anfänge dieser Abbildungsmethode reichen weit zurück. Alte Stadtpläne, die die Häusergrundrisse und zugleich die Fassaden enthalten, viele Befestigungspläne usw. sind besondere Arten von Schrägrissen. Ihre wissenschaftliche Weiterbildung erfuhr diese Methode hauptsächlich in Deutschland und Österreich durch *J. H. Lambert, K. Pohlke, J. Schlesinger, R. Staudigl, G. A. V. Peschka, L. Burmester* u. a.

Stehen die Projektionsstrahlen zu Π senkrecht, so erhält man eine *rechtwinkelige (orthogonale* oder *normale) Projektion* oder einen *Normalriß (Lotriß*[3]*)*. Zur eindeutigen Bestimmung eines Raumpunktes wird entweder seinem Normalriß der Abstand des Punktes von der Bildebene (die *Kote*) beigeschrieben[4]) — *Kotierte Projektion* — oder

1) *F. A. Klingenfeld*, a. a. O. S. 67.

2) *Schrägbild* bei *Müller-Presler*, a. a. O. S. 5.

3) *F. A. Klingenfeld*, a. a. O. S. 67; *Müller-Presler*, a. a. O. S. 123, gebrauchen den Ausdruck *Normalbild*.

4) Statt dessen könnte man auch mit einem diesem Abstande gleichen

Hosted by Google

man gibt seine Normalrisse auf zwei zueinander senkrechte Ebenen an — *Grund- und Aufrißmethode.* Sie ist es, die der Techniker am häufigsten verwendet, indem er noch die Rißebenen in solcher Lage gegen die darzustellenden Körper wählt, daß die Risse möglichst einfache Gestalt erhalten.

Die Keime dieser Methode reichen in das graue Altertum zurück, da schon den Bauten der Ägypter Zeichnungen zugrunde lagen. Jedenfalls spricht der zur Zeit Christi lebende römische Baumeister *M. Vitruvius* in seinem Buche „De architectura" (libri decem, I, 2; Ausg. von *V. Rose*, Leipzig 1899, S. 10) von Grund- und Aufriß unter den Namen: *Ichnographie* und *Orthographie.* Diese „Kunst" gelangte im Mittelalter (Bauhütten) zu ziemlicher Blüte, besonders in der Anwendung auf den *Steinschnitt*, der von der Mitte des 16. Jahrhunderts an wiederholt schriftstellerisch bearbeitet wurde. Ihm ist z. B. auch das für die Weiterbildung der darstellenden Geometrie bedeutsame Werk von *Frézier* (La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois, ou traité de stéréotomie, Strasbourg 1738—1739) gewidmet.

Gaspard Monge (1746—1818), der oft als Schöpfer der darstellenden Geometrie angeführt wird, gebührt das große Verdienst, die in Künsten und Handwerken gebräuchlichen Verfahrungsarten gesammelt und ein einheitliches Ganzes daraus gemacht, ihnen sozusagen den wissenschaftlichen Geist eingehaucht zu haben. *Monge* zeichnete sich als Zögling einer Art Werkmeisterschule, die mit der nur für Adelige bestimmten Genieschule in Mézières verbunden war, so aus, daß er als Nichtadeliger mit 19 Jahren Repetitor, später Professor der Mathematik und auch Physik an dieser berühmten Anstalt wurde. 1783 siedelte er nach Paris über, wurde ein eifriger Anhänger der Revolution (er war 1792 eine Zeitlang Marineminister) und später Napoleons, weshalb er nach dessen Sturz 1816 aller seiner Ämter und Würden verlustig erklärt wurde. Infolge dieser Schicksalsschläge verfiel er in geistige Umnachtung.[1]) Schon in Mézières hat *Monge* die darstellende Geometrie gelehrt, durfte aber darüber nichts veröffentlichen. Erst 1795 trug er an der neu gegründeten *École normale* seine *Géométrie descriptive* vor, welche Vorlesungen nach stenographischen Aufzeichnungen (im Journal des écoles normales, Bd. I—IV) veröffentlicht

Halbmesser um den Normalriß einen Kreis in Π schlagen und ihn im positiven oder negativen Drehsinn der Ebene durchlaufen denken, jenachdem der Punkt im Raume auf der einen oder anderen Seite von Π liegt. Dadurch gelangte man zu der theoretisch sehr interessanten *zyklographischen* Abbildung der Punkte des Raumes auf die *orientierten*, d. h. mit bestimmtem (etwa durch einen Pfeil angezeigten) Durchlaufungssinn versehenen Kreise der Ebene. Diese erste *nicht bildliche* Abbildungsmethode hat *W. Fiedler* (Zyklographie, Leipzig 1882) in die darstellende Geometrie eingeführt.

1) Wegen ausführlicherer biographischer Mitteilungen über *Monge* vgl. *Ch. Dupin*, Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge. Paris 1819. *Fr. Arago*, Gaspard Monge (Biographie lue en séance publique de l'Académie des sciences, le 11 mai 1846). Oeuvres complètes de Fr. Arago, T. II, p. 427—592, Paris 1854. *F. J. Obenrauch*, Geschichte d. darstellenden u. projektiven Geometrie, Brünn 1897.

Hosted by Google

wurden. Die erste Ausgabe in Buchform erschien 1798/99; nach ihr wurde eine deutsche Übersetzung von *R. Haussner*, Leipzig 1900 (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 117) herausgegeben.

Monge gebührt aber auch das Verdienst, nicht allein den vollen Wert der darstellenden Geometrie als Unterrichtsgegenstand erkannt, sondern ihr auch einen hervorragenden Platz in der nach seinen Plänen eingerichteten *École polytechnique* angewiesen zu haben, die 1795 nach Schließung der École normale eröffnet wurde. 20 Jahre lang hat er diese Disziplin gelehrt und eine große Zahl Schüler für sie begeistert. Kaum aus einer zweiten Anstalt sind in so kurzer Zeit so viele ausgezeichnete Geometer und Ingenieure hervorgegangen wie aus jener Pariser polytechnischen Schule. Nach ihrem Muster wurden die polytechnischen Schulen Österreichs (Prag 1806, Wien 1815), Deutschlands (Berlin: Bauakademie 1799, Technische Schule 1821; Karlsruhe 1825) und anderer Länder eingerichtet und daher erhielt überall die darstellende Geometrie eine wichtige Stellung eingeräumt.

Man nennt oft das Zeichnen die Sprache des Technikers.[1]) Läßt man diesen Vergleich gelten, so kommt der darstellenden Geometrie die Stelle der Sprachlehre zu; sie soll die Gesetze des technischen Zeichnens geben und deren Gebrauch einüben. Aus der Beschäftigung mit der darstellenden Geometrie soll sich aber auch ein wertvolles geistiges Nebenprodukt ergeben, nämlich eine höhere Ausbildung des räumlichen Vorstellungsvermögens, das für jeden konstruierenden Techniker von so großer Bedeutung ist. Darum strebe jeder beim Studium dieses Gegenstandes nach möglichst anschaulicher Erfassung des Gehörten oder Gelesenen, bemühe sich insbesondere, die Figuren räumlich zu sehen.

Zum Schlusse dieser Einleitung sei noch auf eine interessante Tatsache hingewiesen. Die darstellende Geometrie ist aus rein praktischen Bedürfnissen des Handwerkers, des Architekten, des Malers entstanden. Durch *Monge* erhielt sie die Form einer wissenschaftlichen Disziplin. Die ihr eigenen Begriffe und Schlußweisen drangen nun[2]) in die reine Geometrie ein und formten diese völlig um. Schüler von *Monge* waren es, die die sogenannte *projektive Geometrie* schufen, deren Vorstellungen wieder das ganze Gebiet der Mathematik beeinflußten. Wir sehen an diesem einen Beispiel, wie die Arbeit des Technikers für den Fortschritt der Wissenschaften wertvoll wird.

Mit dieser Einleitung ist zugleich das Programm für das Folgende angedeutet. Es wird die Darstellung von Punkten, Linien und Flächen (Körpern) nach den erwähnten Abbildungsmethoden genau zu erläutern und die Lösung der wichtigsten in der Praxis auftretenden Aufgaben,

---

1) Diese Bemerkung machte schon *G. Monge* in der Eröffnungsrede seiner Vorträge i. J. 1795. Vgl. „Géométrie descriptive", Nouvelle édition, Paris 1811, p. VIII.

2) Schon bei *G. Desargues* (1593—1662) zeigt sich diese Einwirkung; seine Arbeiten gerieten jedoch in Vergessenheit.

Hosted by Google

wie Schattenkonstruktionen, Ermittlung ebener Schnitte und Durchdringungen von Flächen, auf Grund dieser Abbildungen zu zeigen sein; die Ableitung mancher geometrischen Sätze wird sich dabei als notwendig erweisen.

Obgleich die Bekanntschaft mit der Grund- und Aufrißmethode vorausgesetzt wird, soll sie doch in den Hauptzügen besprochen werden, einmal um jene allgemeinen Methoden und Begriffe darzulegen, die später zur Verwendung gelangen, dann auch um, von Bekanntem ausgehend, auf einen etwas höheren wissenschaftlichen Standpunkt zu leiten.

Bezeichnungsweise und Abkürzungen.

Wir wollen in der Folge durchgängig

Punkte mit kleinen lateinischen Buchstaben: $a, b, c \ldots p, q \ldots$ (nur zuweilen mit arabischen oder römischen Ziffern),

gerade und krumme Linien mit großen lateinischen Buchstaben: $A, B, C, \ldots G, \ldots K, \ldots$,

ebene und krumme Flächen mit kleinen griechischen Buchstaben: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varepsilon, \ldots \varphi, \ldots$,

ausgezeichnete Ebenen, wie die Bildebenen, oder Flächen auch mit großen griechischen Buchstaben: $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \ldots \Gamma, \Sigma, \Omega, \Phi, \Psi \ldots$,

Körper mit großen deutschen Buchstaben: $\mathfrak{K}, \mathfrak{R}, \ldots$,

Zahlen mit kleinen deutschen Buchstaben: $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{r}, \ldots \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots$,

Winkel, wenn eine besondere Bezeichnung wünschenswert ist, ebenfalls mit kleinen griechischen Buchstaben

bezeichnen.[1])

Werden die nebeneinander gestellten Zeichen zweier Raumelemente in eine eckige Klammer geschlossen, so soll damit das durch Verbindung oder Schnitt (allgemein: durch Verknüpfung) aus ihnen hervorgehende Element bezeichnet werden. Es bedeutet also:

$[ab]$ die Verbindungsgerade der Punkte a und b,

$[Ab]$ die Verbindungsebene der Geraden A und des Punktes b,

$[\alpha\beta]$ die Schnittlinie der Ebenen α und β,

$[A\beta]$ den Schnittpunkt der Geraden A und der Ebene β,

$[AB]$, wenn A und B einer Ebene angehören, den Schnittpunkt der beiden Geraden.

1) Einiges zur Begründung dieser und einiger folgenden Bezeichnungen findet sich in des Verf. Notiz „Zur Frage der Bezeichnungsweise in der darstellenden Geometrie“, Z. Math. Phys. 49 (1903), S. 89—92.

Hosted by Google

Sollte gelegentlich von der durch zwei sich schneidende Geraden bestimmten Ebene die Rede sein, so wollen wir stets „Ebene $[AB]$“ sagen.

Diese Bezeichnungsweise läßt sich noch verallgemeinern, indem man die Schnittkurve zweier Flächen φ, ψ mit $[\varphi\psi]$ oder die Gruppe der Schnittpunkte zweier Kurven P, Q derselben Ebene mit $[PQ]$ oder den aus einem Punkt s durch eine Kurve C legbaren Kegel mit $[sC]$ bezeichnet usw.

Bekanntlich darf man von parallelen Geraden und parallelen Ebenen so sprechen, als ob sie durch einen Punkt bzw. durch eine Gerade gingen. Man nennt solche *uneigentlichen* Punkte und Geraden *unendlichfern*; sie sind identisch mit dem, was man sonst *Richtung* bzw. *Stellung* nennt. Da je zwei unendlichferne Geraden einen unendlichfernen Punkt gemeinsam haben (denn zwei verschiedene Stellungen von Ebenen enthalten eine gemeinsame Strahlenrichtung), so müssen die sämtlichen unendlichfernen Punkte und Geraden als in einer Ebene liegend angesehen werden.[1]) Diese uneigentliche Ebene nennt man die *unendlichferne Ebene* des Raumes; wir wollen sie mit Ω bezeichnen.

In den obigen Klammerausdrücken dürfen die Buchstaben nun auch unendlichferne Elemente bezeichnen. $[A\Omega]$ z. B. bedeutet den unendlichfernen Punkt der Geraden A.

Ersetzt man in den obigen Ausdrücken ein oder beide Elemente durch Klammerausdrücke, die ihre Entstehung aus anderen Elementen angeben, und fährt so fort, so gelangt man zu einer Art Kurzschrift zur Beschreibung von Konstruktionen. Dabei dürfen die innern Klammern häufig ganz weggelassen oder durch einen die Reihenfolge der auszuführenden Operationen kennzeichnenden Punkt ersetzt werden. Es bedeutet demnach:

$[[ab]c] = [abc]$ die Verbindungsebene der drei Punkte,
$[[\alpha\beta]\gamma] = [\alpha\beta\gamma]$ den Schnittpunkt der drei Ebenen,
$[\alpha[bc]] = [\alpha \cdot bc]$ den Schnittpunkt der Ebene α und der Geraden $[bc]$,
$[[Aa][Bb]] = [Aa \cdot Bb]$ die Schnittlinie der Verbindungsebenen der Punkte a und b mit den Geraden A und B.

$\xi = [xa\alpha \cdot xb\beta \cdot xc\gamma]$ z. B. sagt aus, daß die Ebene ξ erhalten wird, wenn man die Punkte a, b und c aus x auf die Ebenen α, β und γ projiziert und die Projektionen durch eine Ebene verbindet.

Das zwischen zwei Ausdrücke gesetzte Gleichheitszeichen soll die Identität der durch sie bezeichneten Gebilde anzeigen. Hingegen soll

1) Man macht hier von dem folgenden Satze Gebrauch: *Ein Inbegriff von Geraden, die nicht durch denselben Punkt gehen von denen aber je zwei einen Punkt gemeinsam haben, gehören einer Ebene an.*

Hosted by Google

das Nullsetzen einer Klammer bedeuten, daß die zuletzt verknüpften Elemente ineinanderliegen. Es bedeutet also:

$[\alpha x] = 0$ oder $[\alpha X] = 0$, daß der Punkt x oder die Gerade X der Ebene α angehört,

$[Ax] = 0$, daß Punkt x der Geraden A angehört,

$[abc] = 0$ und $[abcd] = 0$, daß die Punkte a, b, c in einer Geraden bzw. a, b, c, d in einer Ebene liegen,

$[AB] = 0$, wenn es sich um räumliche Figuren handelt, daß A und B sich schneiden.

Die zu A normale Stellung bezeichnen wir mit $|A$ (sprich: „normal A“) und die zu α normale Richtung mit $|\alpha$ (sprich: „normal α“), sodaß $[b \mid A]$ die durch b normal A gelegte Ebene und $[b \mid \alpha]$ die durch b normal α gelegte Gerade und etwa der Ausdruck $[ab \cdot c \mid [de]]$ oder kürzer $[ab \cdot c \mid de]$ den Schnittpunkt der Geraden $[ab]$ mit der aus c zur Verbindungsgeraden von d und e gelegten Normalebene bedeutet.

Handelt es sich um Gebilde in einer Ebene, so soll $|A$ die zu A normale Richtung dieser Ebene, mithin $[b \mid A]$ die aus b auf A gefällte Normale bedeuten.

Als Folge dieser letzten Bezeichnungen ergibt sich, daß im Raume $\| \alpha$ die Stellung von α und im Raume sowohl wie in der Ebene $\| A$ die Richtung von A bezeichnet. $[x \| \alpha]$ bedeutet daher die durch den Punkt x parallel zur Ebene α gelegte Ebene.[1])

Ohne Klammern nebeneinandergestellte Zeichen von Punkten — ab, abc, $abcd$ — sollen die betreffende Punktgruppe oder auch die durch sie bestimmten Figuren, wie Strecke, Dreieck, Tetraeder bezeichnen.

Ferner möge

$\overline{ab}$ (sprich: „a, b quer“) die Länge der Strecke ab,

$\overline{abc}$ den Flächeninhalt des Dreiecks abc,

$\overline{abcd}$ das Volumen des Tetraeders $abcd$,

$\overline{\alpha b}$ und $\overline{Ab}$ den Normalabstand des Punktes b von der Ebene α bzw. der Geraden A,

$\overline{AB}$ den Normalabstand (die kürzeste Entfernung) der windschiefen Geraden A und B

bezeichnen. Das Überstreichen kennzeichnet also Zahlen und $\overline{ab} = cd$

1) Die vorhergehenden Bezeichnungen sind aus der *Graßmannschen Ausdehnungslehre* herübergenommen, wo sie ihre tiefere Begründung finden und mit anderen zum Ausbau eines geometrischen Kalküls dienen. Vgl. *H. Graßmann*, Die Ausdehnungslehre, Berlin 1862 = Ges. math. u. phys. Werke, herausg. von *F. Engel*, I. Bd., 2. Teil, Berlin 1896.

Hosted by Google

z. B. sagt aus, daß die Strecken ab und cd gleich lang sind. Hingegen soll die Aufschreibung

$$ab = cd$$

immer bedeuten, daß die beiden Strecken parallel, gleich lang und gleichsinnig sind, d. h. *daß die eine in die andere durch eine Parallelverschiebung übergeht.*

Mit $\widehat{AB}$, $\widehat{\alpha\beta}$, $\widehat{A\alpha}$ bezeichnen wir die Winkel der betreffenden Elemente.

In den Figuren werden rechte Winkel durch einen Winkelbogen mit eingesetztem Punkt ⦜ angedeutet; dadurch erzielt man ein rascheres Verständnis der Zeichnungen ohne textliche Erläuterungen.

Bilder (Projektionen) von Punkten, Linien usw. werden stets durch rechts oben dem Zeichen des Raumgebildes beigefügte Akzente gekennzeichnet, wie p', p'', p''', p^{IV}, p^n, $p^\backprime$, p^c; rechts unten beigefügte Zeiger (Indizes) wie p_1, p_2 ..., G_1, G_2 ..., sollen verschiedene Dinge gleicher Art bezeichnen. Jedoch sollen durch Anhängen des Zeigers s, also mit p_s, G_s ..., die Schlagschatten der Elemente p, G bezeichnet werden.

Die auch sonst üblichen Zeichen ∥ (parallel), ⊥ (normal), ⫠ (normal und gleichlang), $\widehat{ab}$ (Bogen ab), ∼ (ähnlich), ≅ (kongruent) werden hier in demselben Sinn zur Verwendung kommen.

Ein Kreis (auch Kreisbogen) oder eine Kugel um m mit dem Halbmesser r mögen gelegentlich mit (m, r) bezeichnet und nach Bedarf durch Beifügung der Worte „Kreis“ oder „Kugel“ unterschieden werden.

Hosted by Google

Erster Abschnitt.

Abbildung mittels zugeordneter Normalrisse (Grund- und Aufrißverfahren).

I. Kapitel.

Benennungen und Sätze über zugeordnete Normalrisse.

1. Benennungen über zugeordnete Normalrisse. Durch einen Normalriß ist die Lage eines Punktes, mithin auch irgend eines anderen Gebildes im Raume nicht bestimmt (vgl. Einleitung). Wir betrachten daher die Normalrisse auf zwei rechtwinkelige Ebenen Π_1, Π_2, über deren Lage im Raume für die Ableitung der folgenden Sätze keine Voraussetzung nötig ist. Um aber mit dem prakischen Zeichnen in Übereinstimmung zu bleiben, denken wir uns vorerst Π_1 horizontal und Π_2 vertikal.

Man nennt dann:

Π_1 ... *Grundrißebene, erste Bild- oder Rißebene, horizontale Projektionsebene, Horizontalebene, erste Tafel (Grundebene).*

Π_2 ... *Aufrißebene, zweite Bild- oder Rißebene, vertikale Projektionsebene, Vertikalebene, zweite Tafel (Bildebene).*

$X_{12} = [\Pi_1 \Pi_2]$ ... *Achse, Projektions- oder Rißachse, Grundlinie, Grundschnitt (Bildachse).*

Die Fußpunkte p', p'' der aus einem Punkte p auf Π_1 und Π_2 gefällten Lote (Fig. 4) nennt man die *Normalrisse, Lotrisse* oder *orthogonalen Projektionen* des Punktes p auf Π_1 und Π_2 und die Geraden $[pp']$ und $[pp'']$ die *Seh-* oder *Projektionsstrahlen*, auch *projizierenden Strahlen* von p. Insbesondere heißt:

p' ... *Grundriß (erster Riß)*[1]*, erstes Bild, erste* oder *horizontale Projektion,*

p'' ... *Aufriß (zweiter Riß), zweites Bild, zweite* oder *vertikale Projektion,*

1) Der grundsätzliche Gebrauch der Ausdrücke *erste* und *zweite Tafel*, *erster* und *zweiter Riß*, sowie *Kante* statt Achse findet sich in dem schon erwähnten Büchlein von *Klingenfeld*.

Hosted by Google

$[pp'] = [p\,\Pi_1]$ ... *erster Seh-* oder *Projektionsstrahl (horizontal-* oder *erstprojizierender Strahl),*

$[pp''] = [p\,\Pi_2]$ ... *zweiter Seh-* oder *Projektionsstrahl (vertikal-* oder *zweitprojizierender Strahl).*

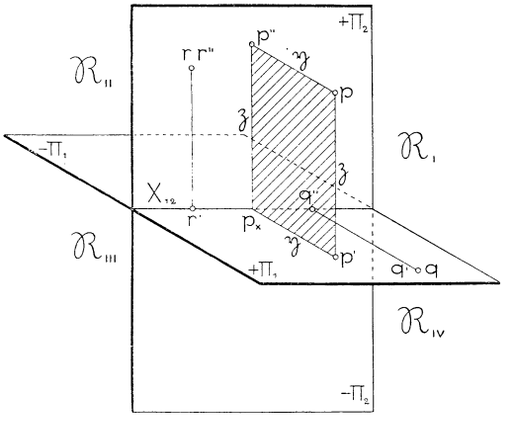


Fig. 4.

Die Sehstrahlen gehen durch die unendlichfernen Punkte $|\Pi_1$, $|\Pi_2$. Jede Ebene durch einen dieser Punkte heiße *einfachprojizierend* und zwar *erstprojizierend* oder *zweitprojizierend*, jenachdem sie durch $|\Pi_1$ oder $|\Pi_2$ geht. Die Ebenen durch beide Punkte, die also senkrecht zu X_{12} stehen, sollen *doppelprojizierend* heißen.

Die Normalabstände eines Punktes p von Π_1 und Π_2 werden seine *Tafelabstände* genannt, und zwar $\overline{\Pi_1 p} = \overline{p' p} = \vartheta$ *erster* Tafelabstand oder *„das ϑ des Punktes“*, $\overline{\Pi_2 p} = \overline{p'' p} = \eta$ *zweiter* Tafelabstand oder *„das η des Punktes“*.

Normalrisse auf zwei beliebige rechtwinkelige Ebenen wollen wir *zugeordnete* Normalrisse, die Schnittlinie der Ebenen ihre *zugehörige* Achse nennen.

2. Sätze über zugeordnete Normalrisse eines Punktes. $[p'pp'']$ ist eine doppelprojizierende Ebene; mithin steht X_{12} zu allen ihren Geraden, insbesondere zu ihren Schnittlinien mit Π_1 und Π_2 senkrecht, die sich (Fig. 4) im Punkte $p_x = [pp'p'' \cdot X_{12}]$ treffen. Daraus folgt:

Satz 1: *Die Fußpunkte der aus zwei zugeordneten Normalrissen eines Punktes auf die Achse gefällten Lote fallen zusammen;*

ferner die Umkehrung:

Satz 2: *Ein Punkt p' in Π_1 und ein Punkt p'' in Π_2 sind zugeordnete Normalrisse eines Punktes, wenn die Fußpunkte der aus ihnen auf die Achse gefällten Lote zusammenfallen.*

Ein solches Punktepaar $p'p''$ bestimmt also eindeutig einen Raumpunkt p. Dabei dürfen entweder ein Punkt oder auch beide Punkte des Paares unendlichfern sein (Nr. 17). Nur wenn diese Punkte mit $|\Pi_2$ und $|\Pi_1$ zusammenfallen, sind sie nicht mehr die Bilder eines Punktes, sondern sämtlicher Punkte der unendlichfernen Geraden $|X_{12}$. Zur eindeutigen Bestimmung von Punkten dieser Geraden benutzt man dann sie schneidende Geraden oder Ebenen.

Hosted by Google

Aus dem Umstande, daß $p'pp''p_x$ ein Rechteck ist, folgt $\zeta = \overline{p_x p''}$ und $\eta = \overline{p_x p'}$, welche Bemerkung wir wegen ihrer Wichtigkeit besonders aussprechen:

Satz 3: *Die Abstände des ersten und zweiten Bildes eines Punktes von der Achse sind bezüglich dem zweiten und ersten Tafelabstande dieses Punktes gleich.*

Ferner erkennt man unmittelbar als richtig (vgl. die Punkte q und r der Fig. 4) den

Satz 4: *Jeder Punkt von $\Pi_1(\Pi_2)$ fällt mit seinem ersten (zweiten) Bilde zusammen und hat sein zweites (erstes) Bild in der Achse,*

sowie dessen Umkehrung:

Satz 5: *Jeder Punkt, dessen erstes (zweites) Bild in der Achse liegt, befindet sich in $\Pi_2(\Pi_1)$.*

3. Lage eines Punktes in den vier Räumen. Der Raum wird durch Π_1 und Π_2 in vier Gebiete (rechte Raumwinkel), jede der Ebenen Π_1, Π_2 durch X_{12} in zwei Halbebenen zerlegt. In jedem der beiden Halbebenenpaare bezeichnen wir eine Halbebene als positiv, die andere als negativ ($+\Pi_1$, $-\Pi_1$, $+\Pi_2$, $-\Pi_2$). Wie diese Festsetzung getroffen wird, ist gleichgültig, jedoch pflegt man im technischen Zeichnen die vordere Halbebene von Π_1 und die obere von Π_2 als positiv anzunehmen (Fig. 4). Die hohlen Raumwinkel, die je eine Halbebene von Π_1 und Π_2 begrenzen, sind dann die obigen vier Gebiete oder *Räume*. Und zwar sollen heißen

$$\begin{aligned}
(+\Pi_1, +\Pi_2) \ldots &\quad \text{I. Raum}, && \mathfrak{R}_{\mathrm{I}} \\
(-\Pi_1, +\Pi_2) \ldots &\quad \text{II.} \quad \text{„} && \mathfrak{R}_{\mathrm{II}} \\
(-\Pi_1, -\Pi_2) \ldots &\quad \text{III.} \quad \text{„} && \mathfrak{R}_{\mathrm{III}} \\
(+\Pi_1, -\Pi_2) \ldots &\quad \text{IV.} \quad \text{„} && \mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}.
\end{aligned}$$

Obgleich man die darzustellenden Gegenstände gewöhnlich im $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ annimmt, so kommen bei der Ausführung von Konstruktionen dennoch Punkte auch in die anderen Räume zu liegen, sodaß ihre Grundrisse sich hinter der Achse oder ihre Aufrisse unter der Achse befinden.

Von jeder der beiden Bildebenen wollen wir eine Seite als positiv, die andere als negativ annehmen. Als positive Seite von Π_1 soll jene betrachtet werden, auf der sich $+\Pi_2$ befindet, und als positive Seite von Π_2 jene, auf der sich $+\Pi_1$ befindet. Diese Festsetzung ist unabhängig von der Lage der Bildebenen im Raume. Werden nun die Abstände der Bilder von der Achse positiv oder negativ genommen, jenachdem sie einer positiven oder negativen Halbebene angehören,

Hosted by Google

werden ferner auch die Tafelabstände der Raumpunkte positiv oder negativ genommen, jenachdem sie auf der positiven oder negativen Seite der betreffenden Bildebene liegen, *dann gilt Satz 3 auch mit Berücksichtigung des Vorzeichens der Abstände.*

Die Vorzeichen der Tafelabstände von Punkten in den vier Räumen zeigt nun die folgende Tabelle:

	ζ	η
$\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$	+	+
$\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$	+	−
$\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$	−	−
$\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$	−	+

Für Punkte in Π_1 ist $\zeta = 0$, für Punkte in Π_2 ist $\eta = 0$, für Punkte in X_{12} daher $\eta = 0$ und $\zeta = 0$. Wichtig ist die Bemerkung, daß alle Punkte, deren beide Tafelabstände gleich sind ($\eta = \zeta$), in einer Ebene Σ liegen (Fig. 5), die $\Pi_1 \widehat{\Pi_2}$ halbiert und $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$ durchsetzt; daß ferner alle Punkte mit entgegengesetzt gleichen Tafelabständen ($\eta = -\zeta$) in einer ebenfalls $\Pi_1 \widehat{\Pi_2}$ halbierenden, aber $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$, $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$ durchsetzenden Ebene Γ liegen. Von diesen beiden rechtwinkeligen Ebenen heißt, aus später zu erläuternden Gründen, Σ die *Symmetrie-*, Γ die *Koinzidenz-* oder *Deckebene.*

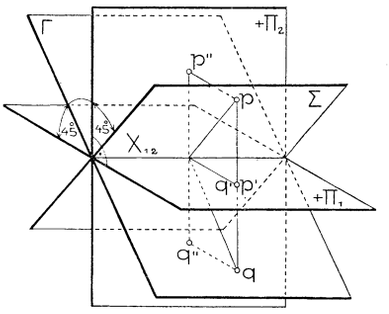


Fig. 5.

4. Bemerkungen über ähnliche und projektive Punktreihen. Eine gerade Linie, als Gesamtheit ihrer Punkte betrachtet, nennt man eine *Punktreihe.* Sind die Punkte zweier Geraden G', G'' von beliebiger Lage einander derart zugeordnet, daß die von entsprechenden Punktepaaren begrenzten Strecken stets dasselbe Verhältnis haben, so nennt man die beiden Punktreihen *ähnlich.* Dabei wird vorausgesetzt, daß in jeder der Geraden ein positiver Sinn für die Messung der Strecken festgelegt sei, diese also bestimmte Vorzeichen erhalten. Ist z. B. (Fig. 6)

$$\frac{\overline{a'b'}}{\overline{a''b''}} = \frac{\overline{b'c'}}{\overline{b''c''}} = \frac{\overline{c'd'}}{\overline{c''d''}} = \nu,$$

so sind die Punktepaare $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$, $d'd''$ entsprechende Punkte der ähnlichen Reihen G', G''; ν heißt ihr Ähnlichkeitsverhältnis.

Hosted by Google

Durch zwei Paare entsprechender Punkte $a'a''$, $b'b''$ ist die Ähnlichkeit bestimmt. Denn bezeichnet x' einen beliebigen Punkt auf G', so muß ihm, damit die Reihen ähnlich seien, auf G'' ein Punkt x'' entsprechen, für den die Proportion

$$\frac{\overline{a'x'}}{\overline{a''x''}} = \frac{\overline{b'x'}}{\overline{b''x''}} \quad \text{oder} \quad \frac{\overline{a'x'}}{\overline{b'x'}} = \frac{\overline{a''x''}}{\overline{b''x''}}$$

besteht. Es gibt aber bekanntlich nur einen einzigen Punkt x'', für den $\frac{\overline{a''x''}}{\overline{b''x''}}$ einen auch dem Vorzeichen nach gegebenen Wert besitzt; mithin ist durch obige Festsetzung jedem Punkte von G' oder G'' ein Punkt von G'' oder G' zugeordnet. Insbesondere entsprechen einander die unendlichfernen Punkte u', u'' der beiden Reihen.

Man nennt den positiven oder negativen Zahlwert

$$\varkappa = \frac{\overline{a'x'}}{\overline{b'x'}}$$

das *Teilverhältnis* des Punktes x' in Bezug auf die Punkte a', b'. Ist $\varkappa$ negativ, so liegt x' zwischen a' und b', ist $\varkappa$ positiv, so liegt x' außerhalb $a'b'$ und zwar auf der Seite von b' oder a', jenachdem $\varkappa > 1$ oder $\varkappa < 1$ ist. Für $\varkappa = 0$ wird $x' = a'$, für $\varkappa = \infty$, $x' = b'$ und für $\varkappa = 1$ fällt x' mit dem unendlichfernen Punkt von G' zusammen.

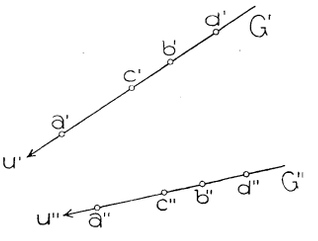


Fig. 6.

Für $\upsilon = \pm 1$ sind die Reihen *kongruent*. Für $\upsilon = 0$ entspricht, wegen $\overline{a''x''} = \frac{\overline{a'x'}}{\upsilon}$, sämtlichen Punkten von G' der unendlichferne Punkt u'' auf G''; nur dem Punkt a' entsprechen wegen der Unbestimmtheit von $\frac{0}{0}$ sämtliche Punkte auf G''. Analoges gilt für $\upsilon = \infty$, nur erscheinen jetzt G' und G'' gegen vorher vertauscht. Man nennt solche ähnliche Punktreihen *singulär*.

In zwei ähnlichen Punktreihen sind nach obigem die Punkte einander ein-eindeutig, d. h. so zugeordnet, daß jedem Punkte der einen Reihe immer nur ein einziger Punkt der anderen entspricht. Zwei ausnahmslos ein-eindeutig einander zugeordnete Punktreihen nennt man im allgemeinen *projektiv*[1]). Wir beweisen nun den

Satz 1: *Wenn in zwei ein-eindeutig aufeinander bezogenen (also*

1) Die Entscheidung darüber, ob in einem geometrisch gegebenen Fall die Punktreihen einander derart entsprechen, kann nur erfolgen, wenn die Beziehung zwischen den Reihen sich durch ein analytisches Gesetz ausdrücken läßt. Die Ein-eindeutigkeit muß auch für die imaginären Punkte der Reihen gelten.

Hosted by Google

projektiven) Punktreihen die unendlichfernen Punkte einander entsprechen, so sind die Reihen ähnlich.

Wir messen die Abstände der entsprechenden Punkte x', x'' von zwei in G' und G'' fest gewählten Punkten o', o''. Für ein ein-eindeutiges Entsprechen zwischen x' und x'', mithin auch zwischen $\overline{o'x'}$ und $\overline{o''x''}$ muß zwischen diesen Längen eine in jeder von ihnen lineare Gleichung

$$\mathfrak{a} \cdot \overline{o'x'} \cdot \overline{o''x''} + \mathfrak{b} \cdot \overline{o'x'} + \mathfrak{c} \cdot \overline{o''x''} + \mathfrak{d} = 0$$

bestehen. Wählt man o' und o'' als entsprechende Punkte der projektiven Reihen, also derart, daß $\overline{o'x'} = 0$ und $\overline{o''x''} = 0$ der Gleichung genügen, so muß $\mathfrak{d} = 0$ sein. Sollen noch die unendlichfernen Punkte einander entsprechen, d. h. die Werte $\overline{o'x'} = \infty$ und $\overline{o''x''} = \infty$ die Gleichung befriedigen, so muß, wie man nach Division mit $\overline{o'x'} \cdot \overline{o''x''}$ erkennt, auch $\mathfrak{a} = 0$ sein, die Gleichung mithin die Form haben

$$\mathfrak{b} \cdot \overline{o'x'} + \mathfrak{c} \cdot \overline{o''x''} = 0.$$

Aus ihr folgt

$$\frac{\overline{o'x'}}{\overline{o''x''}} = -\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}}$$

d. h. die Konstanz des Verhältnisses entsprechender Strecken und damit die Richtigkeit des behaupteten Satzes 1.

Befinden sich die projektiven Punktreihen auf derselben Geraden G (sind sie *konlokal*), so hat ein Punkt im allgemeinen zwei verschiedene entsprechende Punkte, jenachdem man ihn als der einen oder anderen Reihe angehörig betrachtet (als Punkt x' oder x''). Fallen jedoch zwei solche einem beliebig gewählten Punkte x entsprechende, aber von x verschiedene Punkte einmal zusammen, so fallen sie stets zusammen und die Reihen heißen *involutorisch* liegend oder man sagt, sie bilden eine *Punktinvolution*. Für zwei projektive Punktreihen auf G besteht nämlich die Gleichung

$$(*) \qquad \mathfrak{a} \cdot \overline{ox'} \cdot \overline{ox''} + \mathfrak{b} \cdot \overline{ox'} + \mathfrak{c} \cdot \overline{ox''} + \mathfrak{d} = 0.$$

Soll nun einem bestimmten Punkte x' auf G derselbe Punkt x'' entsprechen, ob ich x' zur ersten oder zweiten Reihe gehörig annehme, so muß die Gleichung auch bei Vertauschung von $\overline{ox'}$ und $\overline{ox''}$ richtig bleiben. Dies findet aber nur für $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ statt. Dann aber entsprechen sich je zwei Punkte x', x'' vertauschungsfähig.

Wird jetzt o insbesondere als der dem unendlichfernen Punkte entsprechende Punkt der Involution angenommen, d. h. so, daß für $\overline{ox'} = 0$, $\overline{ox''} = \infty$ wird, so muß $\mathfrak{b} = \mathfrak{c} = 0$ sein. Die Gleichung kann dann auf die Form

$$\overline{ox'} \cdot \overline{ox''} = \mathfrak{p}$$

Hosted by Google

gebracht werden. Dies gibt

Satz 2: *Eine Punktinvolution auf einer Geraden besteht aus allen Punktepaaren, für welche das Produkt der Entfernungen von einem festen Punkt (dem Zentralpunkt der Involution) denselben positiven oder negativen Wert hat.*

Setzt man in Gleichung (*) $x'' = x'$, so erhält man für $\overline{ox'}$ eine quadratische Gleichung. Es gibt also zwei Punkte auf G, die mit ihren entsprechenden zusammenfallen; man nennt sie die *Doppelpunkte* der projektiven Reihen und es gilt der

Satz 3: *Zwei projektive konlokale Punktreihen besitzen zwei reelle (getrennte oder zusammenfallende) oder zwei konjugiert imaginäre Doppelpunkte.*

Gleiches gilt für eine Punktinvolution. Deren Doppelpunkte haben vom Zentralpunkt die Entfernungen $\pm\sqrt{\mathfrak{p}}$, sind also konjugiert imaginär für negatives $\mathfrak{p}$.

Eine Involution ohne reelle Doppelpunkte dient zur *geometrischen Definition eines Paares konjugiert imaginärer Punkte.*[1])

5. Zugeordnete Normalrisse von Geraden, ebenen Figuren und ebenflächig begrenzten Körpern. Die Bilder p', p'' der Punkte einer Geraden G erfüllen im allgemeinen zwei Geraden G', G'' (Einleitung S. 2) und bilden auf ihnen, wie man unmittelbar erkennt, ähnliche Punktreihen. Die Sehstrahlen der Punkte von G erfüllen ihre erst- und zweitprojizierende Ebene $[G\,|\,\Pi_1]$, $[G\,|\,\Pi_2]$. Nur wenn die Gerade durch $|\,\Pi_1$ oder $|\,\Pi_2$ geht, ist G' oder G'' ein Punkt, während das andere Bild zu X_{12} senkrecht steht. Nehmen wir $G \perp \Pi_1$ an und bezeichnen eine beliebig durch ihren Grundriß gezogene Gerade mit G', während $G'' \perp X_{12}$ steht, so bilden die Normalrisse der Punkte von G auf G' und G'' *singuläre* ähnliche Punktreihen (Nr. 4). — Die Bildpaare der Punkte einer unendlichfernen Geraden, die keiner projizierenden Ebene angehört, erfüllen die unendlichfernen Geraden von Π_1 und Π_2. Von der einzigen unendlichfernen Geraden $|\,X_{12}$ sind beide Bilder Punkte, nämlich $|\,\Pi_2$ und $|\,\Pi_1$.

Wenn G keiner doppelprojizierenden Ebene angehört, so wird sie durch die Bildgeraden G', G'' allein bestimmt ($G = [G'\,|\,\Pi_1 \cdot G''\,|\,\Pi_2]$); im entgegengesetzten Fall müssen zu ihrer Bestimmung die ähnlichen Punktreihen auf G' und G'' bekannt sein.

1) Eine geometrische Theorie des Imaginären gab zum ersten Male *K. Chr. v. Staudt*, Beiträge z. Geom. d. Lage, 3 Hefte, Nürnberg 1856—1860. Eine leichter verständliche Darstellung der Hauptgedanken gab *J. Lüroth*, Math. Ann. 8 (1874), S. 145—214. — Vgl. ferner etwa *Clebsch-Lindemann,* Vorl. üb. Geometrie, I. Bd., 1. T. (2. Aufl.), Leipzig 1906, S. 339 f., und *K. Zindler,* Liniengeom. mit Anwendungen, I., Leipzig 1902, VI. Abschnitt.

Hosted by Google

Die Bilder der Punkte einer Ebene erfüllen im allgemeinen zwei ebene Felder, zwischen denen eine später zu betrachtende wichtige Beziehung besteht (Nr. 37, 38). Nur wenn die Ebene einfach- oder doppelprojizierend ist, erfüllen die ersten oder zweiten oder beide Bilder ihrer Punkte gerade Linien.

Unter den Normalrissen eines ebenflächig begrenzten Körpers versteht man die Risse seiner sämtlichen Ecken und Kanten. Da man beim praktischen Zeichnen diese Normalrisse immer als Anschauungsbilder eines Beschauers voraussetzt, der sich auf der positiven Seite der betreffenden Rißebene in unendlicher (oder wenigstens sehr großer) Entfernung befindet und senkrecht zur Rißebene blickt, so werden zur Erhöhung der Anschaulichkeit die Bilder jener Kanten, die diesem Beschauer durch den undurchsichtig angenommenen Körper verdeckt erscheinen, gestrichelt, manchmal auch mit dünneren Strichen ausgezogen.

6. Das Vereinigen zugeordneter Normalrisse in einer Ebene. Nach dem bisher Besprochenen brauchte man zur Herstellung der Normalrisse eines Körpers (oder Raumgebildes) zwei Ebenen, etwa zwei Reißbretter, die aufeinander senkrecht stehen. Um mit einer Zeichenfläche auszukommen, wendet man den Kunstgriff an, daß man

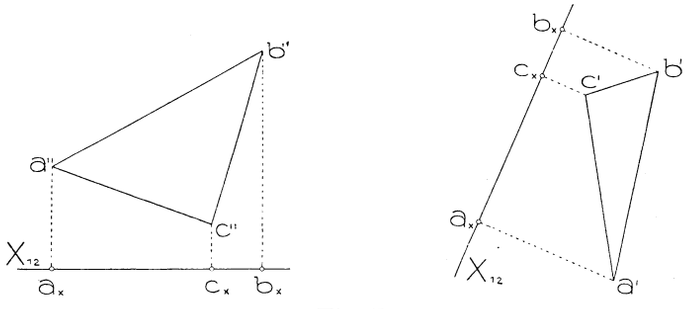


Fig. 7.

die Ebenen Π_1, Π_2, nachdem auf ihnen die Bilder des Körpers hergestellt sind, in eine Ebene hineinlegt. Die Art, wie das geschieht, ist völlig willkürlich. Es können z. B. die beiden Risse eines Dreiecks in die obengezeichnete Lage (Fig. 7) gebracht werden, wobei die Punktreihen auf den beiden Lagen von X_{12} kongruent sein müssen. Beim praktischen Zeichnen treten solche Anordnungen häufig auf (vgl. Nr. 12).

Zur Ausführung von Konstruktionen ist es jedoch vorteilhaft (aber keineswegs unbedingt notwendig) die beiden Risse in *perspektive Lage* zu bringen, d. h. so zu legen, daß ihnen die Punkte von X_{12} gemeinsam sind. Die beiden Risse eines Punktes gehören dann, zufolge

Hosted by Google

Nr. 2, Satz 1, stets einer zu X_{12} senkrechten Geraden an, die wir eine *Ordnungslinie* nennen. Die perspektive Lage wird durch *Umklappen* von Π_1 in Π_2 erhalten, also dadurch, daß man Π_1 um X_{12} solange in dem einen oder anderen Sinn dreht, bis sie mit Π_2 zur Deckung kommt. Π_2 ist dann unsere Zeichenfläche und diese daher, wie die Wandtafel, vertikal stehend vorzustellen. Zuweilen denkt man sich aber auch Π_2 in Π_1 umgeklappt, also Π_1 als horizontale Zeichenfläche. Die allgemeinste Vorstellung ist die, daß Π_1, Π_2 zwei beliebig im Raume liegende rechtwinkelige Ebenen seien, die durch Drehung um X_{12} in eine Ebene vereinigt und dann irgendwie in die Zeichenebene gelegt werden. Offen bleibt noch die Frage, ob man $+\Pi_1$ mit $+\Pi_2$ oder mit $-\Pi_2$ zur Deckung bringen soll. Rein theoretisch sind beide Fälle gleich möglich, nicht aber, wenn es sich um anschauliches Erfassen der dargestellten Körper handelt. Denn da man jeden Riß eines Körpers als dessen Anschauungsbild für einen auf der positiven Seite der Rißebene befindlichen Beschauer betrachtet (Nr. 5), so muß dieser Riß selbst wieder von derselben Seite angesehen werden, um den analogen Eindruck wie der Gegenstand selbst zu erwecken.[1]) Nach ihrer Vereinigung in der Zeichenfläche müssen daher beide Rißebenen ihre positiven Seiten dem Beschauer zuwenden, was nur dann eintritt, wenn man $+\Pi_1$ mit $-\Pi_2$ (nicht mit $+\Pi_2$) zur Deckung bringt. *Wir denken uns in der Folge die beiden Normalrisse stets derart in perspektive Lage gebracht, daß $+\Pi_1$ auf $-\Pi_2$ fällt, mithin $+\Pi_1$ und $+\Pi_2$ zu verschiedenen Seiten von X_{12} liegen.*

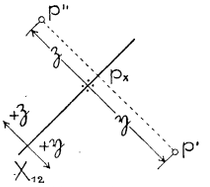


Fig. 9.

Wählt man X_{12} beliebig in der Zeichenebene, so darf noch irgend eine der beiden durch sie entstandenen Halbebenen als $+\Pi_1$ betrachtet werden; die andere ist dann $+\Pi_2$. Da diese Wahl nun auch (Nr. 3) die positiven Richtungen für die Abstände der beiden Bilder eines Punktes von X_{12} bestimmt und umgekehrt, so werden wir in der Folge, wo es notwendig erscheint, bei X_{12} entweder eine der Halbebenen $+\Pi_1$, $+\Pi_2$ oder eine der Richtungen $+\eta$, $+\vartheta$ andeuten (Fig. 9).

1) In den Figuren 8a und 8b ist derselbe Aufriß eines Prismas gezeichnet, nur so in die Zeichenfläche gelegt, daß dem Beschauer einmal die positive und einmal die negative Seite von Π_2 zugekehrt ist. Die Figuren erwecken die Vorstellung von zwei Körpern, die Spiegelbilder voneinander sind (wie die rechte und linke Hand), die also nicht so zur Deckung gebracht werden können, daß die gleichbezeichneten Punkte aufeinander fallen.

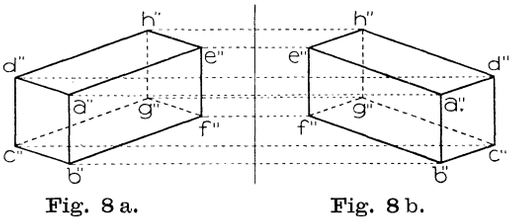


Fig. 8a. Fig. 8b.

Hosted by Google

Das Hauptergebnis soll nun zusammengefaßt werden in den

Satz 1: *Vereinigt man die Normalrisse eines Gebildes auf die rechtwinkeligen Ebenen Π_1, Π_2 durch Drehen um ihre Schnittlinie X_{12} derart in eine Ebene, daß $+\Pi_1$ und $+\Pi_2$ zu verschiedenen Seiten von X_{12} liegen, so gehören die Risse p', p'' eines Punktes p immer einer zu X_{12} senkrechten Geraden (Ordnungslinie) an und ihre Abstände von X_{12} sind der Größe und dem Vorzeichen nach beziehungsweise gleich dem zweiten und ersten Tafelabstande des Punktes p.*

Mit Rücksicht auf die Tabelle in Nr. 3 haben Punkte in den verschiedenen Räumen Bildpaare, die gegen X_{12} die in Fig. 10 angegebenen Lagen besitzen; hierin bezeichnet p_i einen Punkt im $\mathfrak{R}_i$. Punkt q_1 liegt in Π_1, q_2 in Π_2, r in X_{12}. Punkte von Σ (wie s_1, s_3)

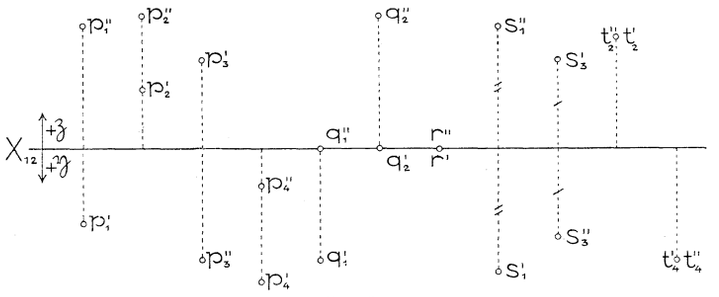


Fig. 10.

haben wegen $\eta = \zeta$ Bilder, die zu X_{12} symmetrisch liegen, und umgekehrt stellt jedes zu X_{12} symmetrische Punktepaar einen Punkt von Σ dar. Punkte von Γ endlich (wie t_2, t_4) haben wegen $\zeta = -\eta$ koinzidierende (sich deckende) Bilder und umgekehrt stellen zwei sich deckende Bilder einen Punkt von Γ dar. Damit sind die Namen Symmetrie- und Koinzidenzebene (Nr. 3) gerechtfertigt.

Daß umgekehrt jedem einer Ordnungslinie angehörigen Punktepaare der Zeichenebene, von dem bestimmt ist, welcher Punkt erstes und welcher zweites Bild sein soll, ein Punkt im Raume entspricht[1]), folgt aus Nr. 2, Satz 2.

Nach der oben erwähnten allgemeinen Vorstellung müssen freilich erst die Ebenen Π_1, Π_2 im Raume samt ihren positiven Seiten gegeben, ferner einem Punkte auf X_{12} in der Zeichenebene ein Punkt auf $X_{12} = [\Pi_1 \Pi_2]$ im Raume als entsprechend zugeordnet sein, damit der zum Bildpaare $p'p''$

1) Gehören zwei Punkte p', p'' keiner Ordnungslinie an, so sind sie nicht Bilder eines Punktes des dreidimensionalen Raumes, können aber als Bilder von Punkten eines vierdimensionalen Raumes aufgefaßt werden. Vgl. den vom Verf. auf der Naturforscherversammlung in *Meran* (Sept. 1905) gehaltenen Vortrag, abgedruckt: Jhrsb. Dtsch. Math.-Ver. 15 (1905), S. 573.

Hosted by Google

gehörige Raumpunkt p eindeutig bestimmt sei. Durch die Bilder eines Körpers ist dieser seiner Form nach im Raume vollkommen bestimmt; nur seine Lage wird durch die Wahl von Π_1, Π_2 usw. geändert.

Es sei hier noch folgende Bemerkung eingeschaltet. Klappt man irgendeine Ebene α in eine andere β um und gelangen dadurch die Punkte $a, b, c \ldots$ von α (Fig. 11) nach $a^0, b^0, c^0 \ldots$ in β, so sind die Sehnen $aa^0, bb^0, cc^0 \ldots$ der von den Punkten beschriebenen Bögen — wir wollen sie *Drehungsehnen* oder *Drehsehnen* nennen — zueinander parallel, und zwar normal zu einer der Symmetrieebenen des Raumwinkels $\widehat{\alpha\beta}$. Die Punkte $a^0, b^0, c^0 \ldots$ lassen sich daher auch als die

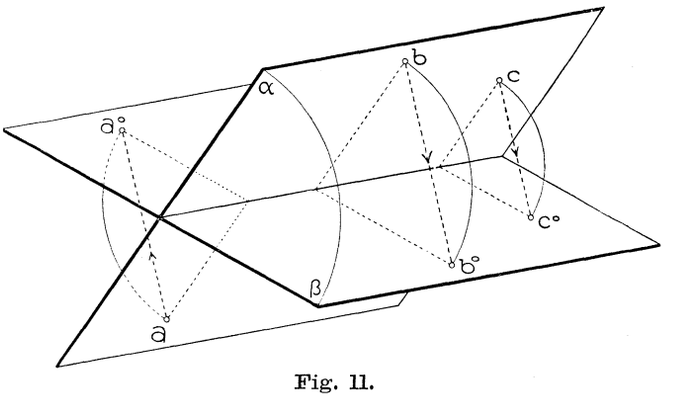


Fig. 11.

Schrägrisse von $a, b, c \ldots$ in der Richtung der Drehsehnen auffassen; dies gibt den oft zur Verwendung kommenden

Satz 2: *Die Umklappung einer Ebene in eine andere ist identisch mit dem Schrägriß der ersteren auf letztere für eine Sehrichtung, die auf einer der Symmetrieebenen der gegebenen Ebenen senkrecht steht.*

Die obige Umklappung von Π_1 in Π_2 ist also ersetzbar durch einen Schrägriß in der Richtung $|\Gamma$. Die Entstehung der beiden Bilder in der Zeichenfläche kann man sich demnach auch folgendermaßen vorstellen: Eine Raumfigur wird auf die zwei rechtwinkeligen Ebenen Π_1, Π_2 normal projiziert, dann von diesen Ebenen ein Schrägriß in der Richtung $|\Gamma$ auf eine zu Π_1 oder Π_2 parallele Ebene hergestellt.

Hosted by Google

II. Kapitel.

Seitenrisse.

7. Zeichnen von Seitenrissen. Zur einfacheren Lösung vieler Aufgaben sowie zur deutlicheren Darstellung von Körpern ist es oft von großem Vorteil, den Normalriß eines Gebildes auf eine von Π_1 und Π_2 verschiedene Ebene zu benutzen. Wie wir sehen werden, genügt es, sich dabei auf projizierende Ebenen zu beschränken. Wir werden solche Ebenen *Seitenrißebenen* und die Normalrisse auf sie *Seitenrisse* nennen.[1]) Um einen Seitenriß zu zeichnen, denken wir uns seine Ebene in jene der Ebenen Π_1, Π_2 umgeklappt, auf der sie senkrecht steht.

Handelt es sich z. B. um das Zeichnen des Seitenrisses p''' eines durch p', p'' bestimmten Punktes p (p_1, p_2, p_3 in Fig. 12) auf eine zweitprojizierende Ebene Π_3, die durch $[\Pi_2\Pi_3] = X_{23}$ gegeben ist, dann denke man sich Π_3 (um X_{23}) nach Π_2 umgeklappt. Wegen der Normalität von Π_2 und Π_3 sind p'' und p''' zugeordnete Normalrisse des Punktes p; es müssen daher für sie die Sätze und Betrachtungen des I. Kap. gelten, wobei X_{23} die Rolle der Achse („*neue Achse*") spielt. Insbesondere müssen nach der Umklappung (Nr. 6, Satz 1) p'' und p''' in einer Senkrechten zu X_{23} liegen und $\overline{X_{23}p'''}$ muß gleich dem η des Punktes p sein, d. h. $\overline{X_{23}p'''} = \overline{X_{12}p'}$. Die Richtung, in der man die positiven η von X_{23} aus aufzutragen hat, ist noch wählbar, da wohl die positive Seite von Π_2 und mithin auch die positive Halbebene von Π_3, nicht aber die positive Seite von Π_3 feststeht. Trifft man darüber eine Annahme, etwa wie in Fig. 12, so ist dadurch auch die positive Seite von Π_3 bestimmt. Denn durch die Annahme der $+\eta$-Richtung von X_{23} aus ist $+\Pi_3$ in der Umklappung und damit, da $+\Pi_3$ auf der positiven

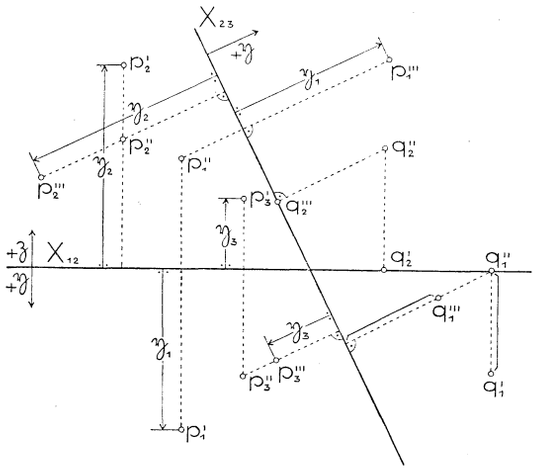


Fig. 12.

1) Sie verwandte schon *Desargues;* vgl. *Chr. Wiener*, Lehrb. d. darst. Geom., Bd. 1, S. 23. Ausführlich behandeln sie *Th. Olivier*, Cours de Géométrie descriptive, Paris 1843 (2. Aufl. 1852), chap. II, und *F. A. Klingenfeld*, a. a. O. § 4, S. 53.

Hosted by Google

Seite von Π_2 liegt, auch im Raume gegeben. Jene Seite von Π_3, die in der Umklappung dem Beschauer des Zeichenblattes zugekehrt ist, gibt im Raume aber deren positiven Seite. Von ihr aus muß bei der Darstellung von Körpern deren Sichtbarkeit beurteilt werden.

In Fig. 12 sind die Seitenrisse auf Π_3 von den bezüglich im $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$, $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$ befindlichen Punkten p_1, p_2, p_3, ferner von den Π_1 und Π_2 angehörigen Punkten q_1 und q_2 gezeichnet, mit genauer Angabe der erforderlichen Streckenauftragungen.

Analog erhält man die Seitenrisse von Punkten auf eine durch $[\Pi_1 \Pi_3] = X_{13}$ gegebene erstprojizierende Ebene Π_3, die man sich in Π_1 umgeklappt denkt. Da jetzt p' und p''' (in Fig. 13 etwa p_1' und p_1''') zugeordnete Normalrisse eines Punktes p sind, so muß p''' in $[p' | X_{13}]$ liegen und

$$\overline{X_{13}p'''} = \zeta = \overline{X_{12}p''}$$

sein, wobei die positive Richtung für die von X_{13} aus aufzutragenden ζ noch wählbar ist. Fig. 13 zeigt die Ermittlung des Seitenrisses für die im $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$ liegenden Punkte p_1 und p_4, ferner für die Π_1 und Π_2 angehörigen Punkte q_1 und q_2.

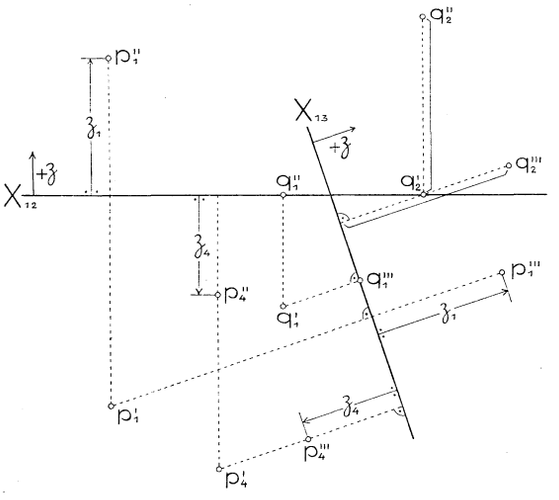


Fig. 13.

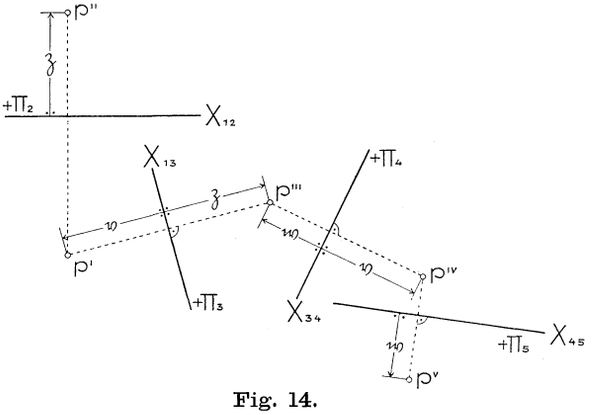


Fig. 14.

Von dem zweiten und dritten oder ersten und dritten Riß (als zugeordneten Normalrissen) ausgehend, läßt sich jetzt auf dieselbe Weise der Normalriß auf eine zu Π_3 senkrechte Ebene Π_4, dann auf eine zu Π_4 senkrechte Ebene Π_5 usw. finden Fig. 14 z. B. zeigt, wie man aus den zugeordneten Rissen p', p''' den Seitenriß p^{IV} auf eine durch $X_{34} = [\Pi_3 \Pi_4]$ ge-

Hosted by Google

gebene drittprojizierende Ebene Π_4 findet, die man sich in Π_3 umgeklappt denkt. p^{IV} liegt in $[p''' \mid X_{34}]$ derart, daß $\overline{X_{34}p^{IV}} = \overline{\Pi_3 p} = \overline{X_{13}p'} = \mathfrak{v}$ ist, wobei die positive Richtung für die Auftragung des $\mathfrak{v}$ von X_{34} aus oder, was dasselbe ist, die Seite auf der die Halbebene $+\Pi_4$ zu liegen kommen soll, wählbar bleibt. Aus p''', p^{IV} ist ferner noch der Seitenriß auf die durch $X_{45} = [\Pi_4 \Pi_5]$ gegebene viertprojizierende Ebene Π_5 (umgeklappt in Π_4) gefunden worden. Im Raume haben Π_4 und Π_5 gegen Π_1 und Π_2 ganz allgemeine Lage.

Die Ermittlung beliebiger Seitenrisse ist also eine Wiederholung der Aufgabe, aus den Normalrissen auf zwei rechtwinkelige Ebenen einen neuen Normalriß auf eine zu einer dieser Ebenen senkrechte Ebene zu finden. Nennt man denjenigen der zwei zugeordneten Risse, auf dessen Ebene die neue Rißebene nicht senkrecht steht, den *wegfallenden Riß*, dann sieht man, daß der Satz gilt:

Satz 1: *Der Abstand des neuen Risses eines Punktes von der neuen Achse ist gleich dem Abstande seines wegfallenden Risses von der alten Achse.*[1])

Zu zugeordneten Normalrissen auf die Ebenen Π_i und Π_k gehört eine Symmetrieebene Σ_{ik} und eine Koinzidenzebene Γ_{ik}.

8. Aufgabe: *Von einer durch Auf- und Grundriß gegebenen regelmäßigen sechsseitigen Pyramide soll der Seitenriß auf eine zu Π_2 senkrechte Ebene Π_3, dann auf eine zu Π_3 senkrechte Ebene Π_4 gezeichnet werden.* (Fig. 15).

Ist $X_{23} = [\Pi_2 \Pi_3]$ die Seitenrißachse (neue Achse), so ermittle man nach Nr. 7 die Seitenrisse sämtlicher Eckpunkte des Körpers; also b''' z. B., indem man in der Zeichenfläche auf $[b'' \; X_{23}]$ von X_{23} aus $\overline{X_{12}b'}$ abträgt. Sind diese gefunden, so zeichne man die Bilder der Kanten ein, d. h. verbinde je zwei Punkte im Seitenriß durch eine (vorerst schwach gezogene) Strecke, die im Raume durch eine Kante verbunden sind. Dann gehe man an die Beurteilung der Sichtbarkeit, wobei der Körper von der positiven Seite von Π_3 aus zu betrachten ist, die durch die Annahme von $+\Pi_3$ in der Umklappung bestimmt wird. In Fig. 15 gibt der Pfeil diese Sehrichtung an.

Erleichtert wird diese Beurteilung durch Beachtung der folgenden Gesetze[2]), die für *konvexe Polyeder* gelten, d. h. für solche von lauter ebenen Flächen begrenzte Körper, deren Oberflächen von Geraden höchstens in zwei Punkten geschnitten werden.

1) In dieser leicht merkbaren Form findet sich der Satz bei *R. Haussner,* Darst. Geometrie, 1. T., Leipzig 1902 (Sammlung Göschen), S. 124.

2) Vgl. *R. Sturm,* Elemente d. darst. Geom., 2. Aufl., Leipzig 1900, Nr. 107.

Hosted by Google

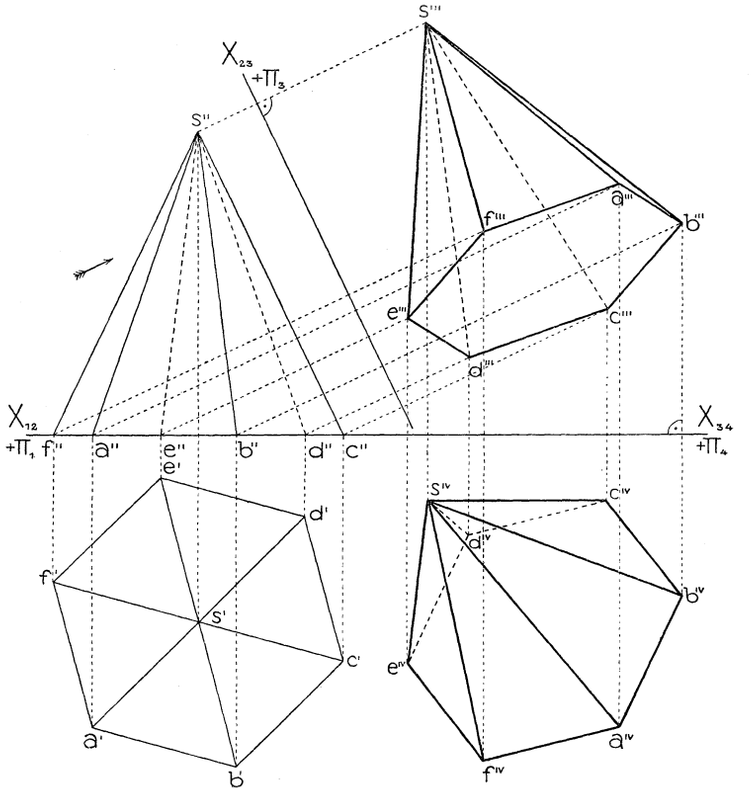


Fig. 15.

Gesetze: *a) Die Bilder der Flächen überdecken einen Teil der Bildebene doppelt.*

Denn jeder Sehstrahl trifft die Oberfläche des Polyeders höchstens in zwei Punkten; von diesen ist der eine *sichtbar*, der andere *unsichtbar*.

b) Die Grenze dieses überdeckten Teiles (scheinbarer Umriß oder *Kontur) ist stets sichtbar; sie ist das Bild jenes aus Kanten bestehenden geschlossenen Linienzuges, der den sichtbaren Teil der Oberfläche vom unsichtbaren trennt (wirklicher Umriß).*

Der wirkliche Umriß besteht aus jenen Punkten der Oberfläche, in denen diese von den Sehstrahlen in zwei zusammenfallenden Punkten geschnitten wird.

c) Die Bilder zweier sichtbaren oder zweier unsichtbaren Kanten dürfen sich zwischen ihren Endpunkten nie schneiden.

Denn sonst würde ein Sehstrahl den sichtbaren oder unsichtbaren Teil der Polyederoberfläche zweimal schneiden.

Hosted by Google

d) Die von einem sichtbaren (unsichtbaren), nicht dem Umriß angehörigen Punkte ausgehenden Kanten sind sichtbar (unsichtbar).

Diese Gesetze gelten auch für beliebige Parallel- oder Zentralrisse.

Man benutzt sie nun auf folgende Weise. Die den scheinbaren Umriß bildenden äußersten Kanten sind sichtbar, also in Fig. 15 der Linienzug $s'''b'''c'''d'''e'''s'''$. Liegen innerhalb dieses Umrisses noch Bilder anderer Eckpunkte, so ermittle man von einem solchen seine Sichtbarkeit. Am vorteilhaftesten beachtet man hierbei den H_3 fernsten (nächsten) Punkt, für den also der Abstand von H_3 mit Berücksichtigung des Vorzeichens ein Maximum (Minimum) ist, da er dem wie oben gewählten Beschauer am nächsten (fernsten) liegt und daher unbedingt sichtbar (unsichtbar) sein muß.[1]) In Fig. 15 ist f der H_3 fernste Punkt. Gehört er nicht dem Umriß an, so sind die von ihm ausgehenden Kanten, wie $f'''a'''$, $f'''e'''$, $f'''s'''$, nach Gesetz d) ebenfalls sichtbar (unsichtbar). Gelangt man auf ihnen zu Punkten, die noch innerhalb des Umrisses liegen, so müssen die weiteren von ihnen ausgehenden Kanten, wie $a'''b'''$, $a'''s'''$, wieder sichtbar (unsichtbar) sein usw. — Von allen noch übrig bleibenden Kanten, die die bisher gezogenen sichtbaren (unsichtbaren) zwischen den Endpunkten schneiden, weiß man, daß sie (nach Gesetz c)) unsichtbar (sichtbar) sind, wie $s'''d'''$, $s'''c'''$. So fortfahrend läßt sich die Sichtbarkeit sämtlicher Kanten rasch bestimmen.

Befinden sich innerhalb des scheinbaren Umrisses keine Bilder von Eckpunkten, so suche man mittels des Aufrisses jene Körperkante auf, die H_3 am fernsten oder nächsten liegt. Erstere ist sichtbar, letztere unsichtbar. Mittels Gesetz c) findet man dann die Sichtbarkeit der übrigen Kanten.

Handelt es sich um einen ebenflächigen, nicht überall konvexen Körper, wie es die Einzelheiten technischer Gegenstände meistens sind, so denke man sich den Körper in konvexe Teilkörper zerlegt, bestimme vorerst an jedem von ihnen die Sichtbarkeit unabhängig von den übrigen und beurteile dann die Überdeckung, die ein Teilkörper von dem anderen erfährt (vgl. Fig. 18).

Bezüglich des vierten Risses in Fig. 15 sei nur erwähnt, daß X_{34} mit X_{12} zusammenfallend gewählt und, Nr. 7, Satz 1 entsprechend, z. B. $\overline{X_{34}b^{IV}} = \overline{X_{23}b''}$ gemacht wurde. Der dritte und vierte Riß bilden zugeordnete Normalrisse eines Körpers, der gegen H_3 und H_4 jetzt keine besondere Lage besitzt. Man kann also das Zeichnen von Seitenrissen benutzen, um von Körpern anschaulichere Bilder zu erhalten.

1) Gibt es mehrere fernste Punkte, so sind sie alle sichtbar.

Hosted by Google

9. Zeichnen und Verwendung des Kreuzrisses. Der im technischen Zeichnen am häufigsten zur Verwendung kommende Seitenriß auf eine zu $[\Pi_1 \Pi_2]$ senkrechte Ebene Π_3 heißt gewöhnlich *Kreuzriß* oder *Querriß*, Π_3 dann *Kreuz-* oder *Querrißebene*. Oft wird unter „Seitenriß" oder „dritte Projektion" bloß der Kreuzriß verstanden. Nachdem Π_3 zu Π_2 und Π_1 senkrecht steht, kann ihre Umklappung in Π_2 oder Π_1 geschehen; ersteres ist gebräuchlicher. Die Figuren 16a, 16b zeigen die Ermittlung des Kreuzrisses p''' eines Punktes aus p' und p'' und zwar für je eine Art der Umklappung. Der gebräuchlichen Bezeichnungsweise Rechnung tragend, ist in diesen Figuren $[\Pi_1 \Pi_2] = X$, $[\Pi_2 \Pi_3] = Z$, $[\Pi_3 \Pi_1] = Y$ gesetzt worden. Zufolge Nr. 7, Satz 1 erhält man p''' in Fig. 16a, wenn man auf $[p'' Z]$ von

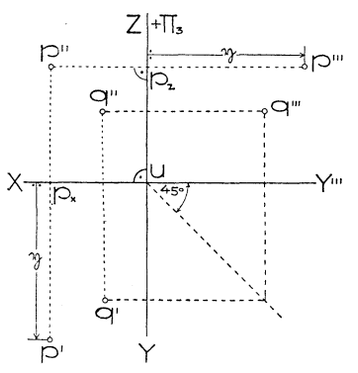


Fig. 16a.

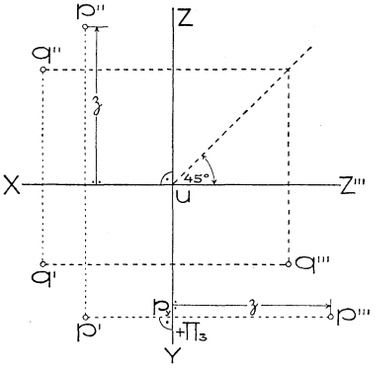


Fig. 16b.

Z aus das $\mathfrak{y}$ $(= \overline{Xp'})$ des Punktes p, in Fig. 16b auf $[p' Y]$ von Y aus das $\mathfrak{z}$ $(= \overline{Xp''})$ des Punktes p aufträgt. Unter Verwendung einer durch $u = [\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3]$ gezogenen, gegen X unter 45^0 geneigten Geraden kann man ohne Gebrauch des Zirkels, bloß mittels Reißschiene und Dreieck den Kreuzriß finden, wie es für die Punkte q gezeigt ist.

Anmerkung. Unpraktisch ist das Zeichnen des Kreuzrisses unter Verwendung eines Viertelkreises, wie man es in den Elementarbüchern der Anschaulichkeit halber findet. Denn wenn man schon einen Zirkel nach der Reißschiene zur Hand nimmt, ist es vorteilhafter, die Strecken $\mathfrak{y}$ oder $\mathfrak{z}$ unmittelbar zu übertragen.

Sind die positiven Seiten der zueinander rechtwinkeligen Ebenen Π_1, Π_2, Π_3 gegeben, so sind die Abstände $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}$ eines Punktes p von diesen Ebenen auch ihrem Vorzeichen nach bestimmt. Umgekehrt bestimmen die Zahlen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Lage des Punktes gegen die drei Ebenen und heißen deshalb seine *rechtwinkeligen Koordinaten*. Π_1, Π_2, Π_3 nennt man die *Koordinatenebenen*, X, Y, Z die *Koordinatenachsen*, u den *Ursprung* des Koordinatensystems. Legt man durch p die zu den

Hosted by Google

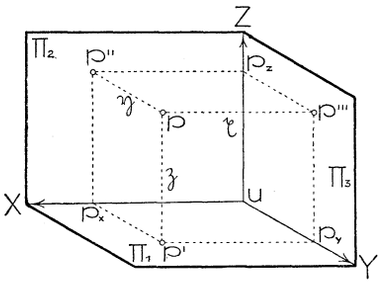


Fig. 17.

Achsen senkrechten Ebenen, so begrenzen sie mit den Koordinatenebenen das *Koordinatenparallelepiped* des Punktes p. Man sieht unmittelbar (Fig. 17), daß die von u ausgehenden Kanten dieses Parallelepipedes bzw. die Längen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ besitzen.

Das Konstruieren mittels Auf- und Kreuzriß ist auf dem Zeichenbrette ebenso bequem wie mittels Auf- und Grundriß, kommt auch sehr häufig zur Anwendung. Darum gewöhne sich der Techniker beizeiten an den Gebrauch dieser beiden Risse!

Fig. 18 zeigt, wie man aus Auf- und Kreuzriß eines Konsolsteins dessen Seitenriß auf eine zu Π_3 senkrechte Ebene Π_4, dann auf eine

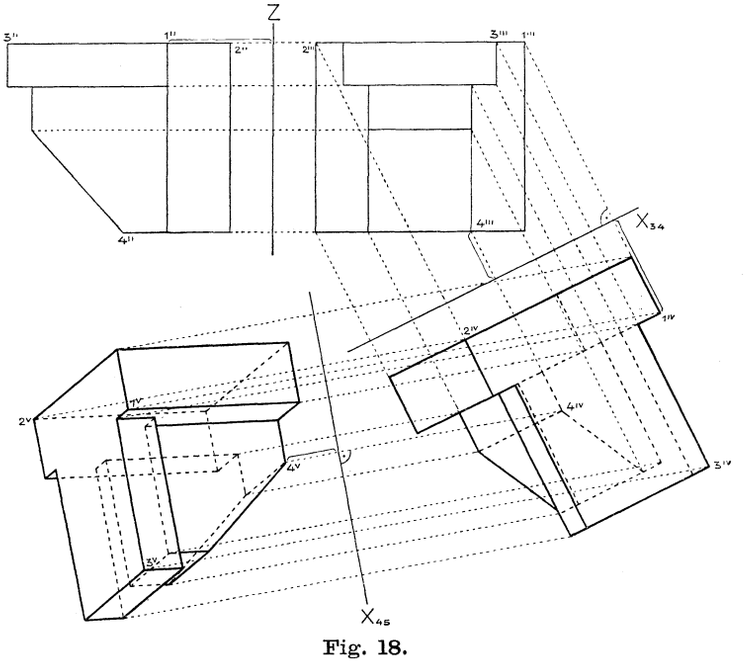


Fig. 18.

zu Π_4 senkrechte Ebene Π_5 findet. Zugleich gibt sie ein Beispiel für die Darstellung eines nichtkonvexen ebenflächigen Körpers.

Übungsaufgaben. Man zeichne von Prismen, Pyramiden, regulären Polyedern, Kristallgestalten und insbesondere verschiedenen, durch Auf- und Grund- oder Auf- und Kreuzriß gegebenen technischen Einzelheiten zwei neue Seitenrisse (etwa wie in den Fig. 15 u. 18) und konstruiere dann mittels

Hosted by Google

der letzten beiden Risse für eine gewählte Lichtrichtung die Schlagschatten des Körpers auf die Seitenrißebenen (vgl. Nr. 31).

10. Die Verwendung von Seitenrissen als allgemeines Konstruktionsprinzip. Es wurde schon früher (Nr. 7, S. 22) angedeutet, daß man mittels der Seitenrisse auf projizierende Ebenen auch Normalrisse auf beliebige Ebenen finden könne. Soll in der Tat der Normalriß irgend einer Figur, der der Punkt p (p', p'') angehört, auf eine durch ihre Spuren $E_1 = [\Pi_1 \varepsilon]$, $E_2 = [\Pi_2 \varepsilon]$ gegebene Ebene ε gesucht werden, so ermittle man zuerst den Seitenriß auf eine zu Π_1 (oder Π_2) und

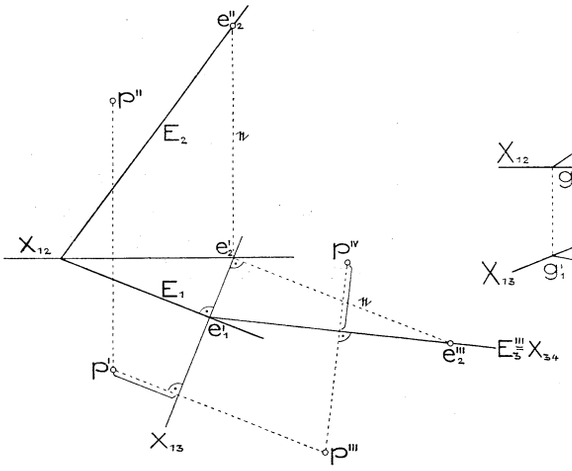


Fig. 19.

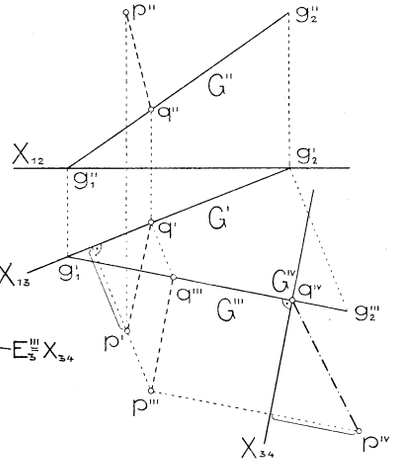


Fig. 20.

ε senkrechte Ebene Π_3; dann ist der gesuchte Normalriß der weitere Seitenriß auf die (zu Π_3 senkrechte) Ebene ε. Die Achse $X_{13} \perp E_1$ (Fig. 19) ist der Grundriß von $E_3 = [\varepsilon \Pi_3]$, welche Gerade E_1 in e_1, E_2 in e_2 schneidet (e_2' in X_{12}). Ermittelt man auf bekannte Weise e_2''' und p''', so ist, wegen $e_1''' = e_1'$, $E_3''' = [e_1' e_2''']$. Mittels dieser Geraden, als X_{34} betrachtet, findet man den Seitenriß p^{IV}, d. h. den Normalriß von p auf ε. (Zugleich ist $\overline{p''' E_3'''} = \overline{p\varepsilon}$).

Die Wichtigkeit der Seitenrisse besteht hauptsächlich darin, daß ihre Verwendung ein *allgemeines Konstruktionsprinzip* für den darstellenden Geometer bildet. Zahlreiche Aufgaben werden nämlich leicht oder auf gewohnte Weise lösbar, wenn gewisse Gebilde eine besondere Lage gegen eine Rißebene besitzen, wenn z. B. eine bestimmte Ebene zu ihr parallel oder eine bestimmte Gerade zu ihr normal ist. Beides läßt sich aber durch das Zeichnen von höchstens zwei Seitenrissen erreichen. Wie eine beliebige Ebene ε parallel zu einer Rißebene gemacht wird, zeigt Fig. 19. Damit eine beliebige

Hosted by Google

Gerade G (G', G'') zu einer Rißebene senkrecht stehe, lege man zuerst Π_3 durch G (oder $\| G$) normal Π_1 (oder Π_2) und hierauf $\Pi_4 \perp G'''$. G^{IV} ist dann ein X_{34} angehörender Punkt. Fig. 20 zeigt die Durchführung, wobei zum Zeichnen von G''' die Spurpunkte g_1 und g_2 von G benutzt wurden. Zugleich ist die Aufgabe gelöst, aus einem gegebenen Punkt p (p', p'') das Lot pq auf G zu fällen und dessen Länge zu ermitteln. Hat man p''' und p^{IV} gezeichnet, so ist, wegen q in G und $[pq] \| \Pi_4$, $q^{IV} = G^{IV}$, $\overline{q^{IV} p^{IV}} = \overline{qp}$, $[p''' q'''] \| X_{34}$ und damit q''' auf G''' gefunden. Daraus ergeben sich q' und q'' mithin $[p'' q''] = [pq]''$ und $[p' q'] = [pq]'$.

Es sei nur vorläufig noch erwähnt, daß man die Gestalt einer durch zwei zugeordnete Normalrisse gegebenen ebenen Figur, insbesondere den Winkel zweier sich schneidenden Geraden, im Seitenriß auf eine zur Figurenebene parallele Ebene, den Winkel zweier Ebenen im Seitenriß auf eine Normalebene ihrer Schnittlinie, den Normalabstand zweier windschiefen Geraden im Seitenriß auf eine Normalebene einer dieser Geraden unmittelbar gegeben hat. Ferner, daß man die Auffindung ebener Schnitte oder Durchdringungen von Flächen sowie Schattenkonstruktionen, wie wir später sehen werden, sehr oft durch Einführung eines oder zweier Seitenrisse vereinfacht.

III. Kapitel.

Drehungen.

11. Drehungen um Achsen, die zu den Rißebenen senkrecht stehen. Die Einführung von Seitenrissen hatte den Zweck, Raumgebilden eine andere Lage gegen die Rißebenen zu geben. Dasselbe erreicht man auch unter Beibehaltung der ursprünglichen Rißebenen durch eine Bewegung des Raumgebildes. Die zeichnerische Ausführung einer Bewegung gibt zugleich Gelegenheit zur Verwendung der Seitenrisse.

Jede Bewegung einer starren Figur läßt sich bekanntlich aus einer Parallelverschiebung (kurz *Schiebung*) und einer Drehung um eine Achse zusammensetzen. Bei der Schiebung legen alle Punkte gleich große, parallele und gleichgerichtete Wege zurück. Diese Wege erscheinen in jedem Parallelriß als gleich lange, parallele und gleichgerichtete Strecken; *mithin stellt eine Schiebung eines Raumgebildes sich in jedem Normalriß als Schiebung des Risses dar*, läßt sich demnach unmittelbar zeichnen.

Was die Drehungen betrifft, so beschreibt bei einer solchen jeder Punkt p der Figur einen Kreis, dessen Ebene zur Drehachse A (Fig. 21)

Hosted by Google

senkrecht steht und dessen Mitte m in A liegt. Die Drehungsradien aller Punkte (wie mp und nq) überstreichen dabei in demselben Sinne gleiche Winkel (Drehungswinkel) $\widehat{pmp_1}$, $\widehat{qnq_1}$. Die Darstellung der Drehung in zwei zugeordneten Normalrissen wird höchst einfach, wenn A zu einer der Rißebenen senkrecht steht, weil in ihr die Bahnkreise und Drehungswinkel in wahrer Gestalt erscheinen.

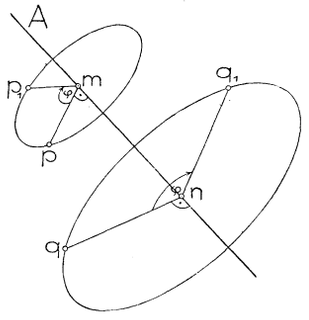


Fig. 21.

Sei z. B. (Fig. 22) $A \perp \Pi_2$ und φ der Winkel, um den die Punkte p und q in gegebenem Sinne gedreht werden sollen, so erhält man den Aufriß der gedrehten Lage p_1 von p, wenn man mit dem Halbmesser $\overline{A''p''}$ um A'' einen Kreis schlägt und darauf den dem Zentriwinkel φ entsprechenden Kreisbogen $\widehat{p''p_1''}$ in dem gegebenen Drehsinn abträgt. Da bei dieser Drehung die zweiten Tafelabstände der Punkte ungeändert bleiben, so liegt p_1' in $[p' \| X_{12}]$ und in der Ordnungslinie durch p_1''. Die Übertragung des Winkels φ bei der Drehung eines andern Punktes q kann, etwa wie in Fig. 22 angedeutet, geschehen.

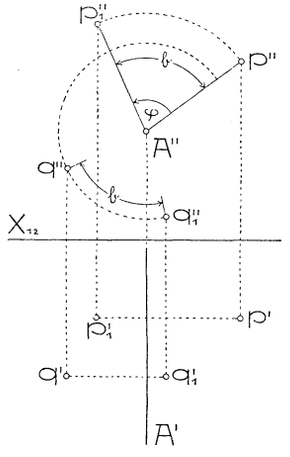


Fig. 22.

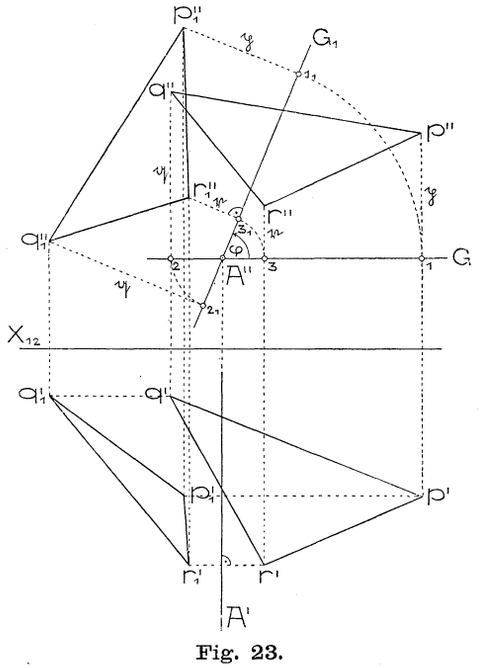


Fig. 23.

Aus dieser Überlegung folgert man den

Satz 1: *Wird ein Körper (oder eine starre Figur) um eine zu Π_2 (Π_1) senkrechte Achse gedreht, so dreht sich sein Aufriß (Grundriß) um*

Hosted by Google

den Aufriß (Grundriß) der Achse um den gleichen Winkel; die Punkte seines Grundrisses (Aufrisses) behalten ihre Abstände von der Rißachse.

Natürlich ließe sich dieser Satz in allgemeinerer Form für zwei beliebige zugeordnete Normalrisse aussprechen.

Die gedrehte Lage des Aufrisses erhält man für eine aus mehr Punkten bestehende Figur bequemer, wenn man die Punkte des gegebenen Aufrisses gegen eine passend gewählte Gerade G durch darauf gefällte Lote festlegt und dann diese Gerade samt ihren Loten dreht. Fig. 23 zeigt die auf diese Weise durchgeführte Drehung eines Dreiecks pqr um die zu Π_2 senkrechte Achse A.

12. Drehungen um Achsen, die zu den Rißebenen parallel sind. Die Drehung einer Figur um eine zu Π_1 oder Π_2 parallele Achse läßt sich durch Verwendung eines Seitenrisses auf die frühere Aufgabe zurückführen.

Aufgabe: Die Strecke pq soll um die zu Π_1 parallele Achse A um 105^0 gedreht werden (Fig. 24).

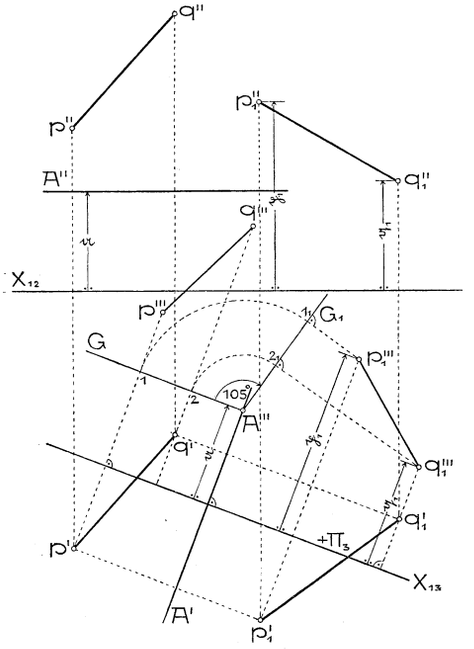


Fig. 24.

Legt man die Seitenrißebene $\Pi_3 \perp A$ und zeichnet p''', q''', A''', so läßt sich mittels Grund- und Seitenriß die Drehung wie in Nr. 11 durchführen. Da die ersten Tafelabstände $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{q}_1$ der gedrehten Punkte p_1, q_1 aus dem Seitenriß entnehmbar sind, können die Aufrisse p_1'', q_1'' unmittelbar gezeichnet werden.

Es sei zu Fig. 24 noch bemerkt, daß das Zeichnen von $p'''q'''$ entbehrlich wird, wenn man, wie in Fig. 23, die Punkte p''', q''' in Bezug auf eine passend gewählte Gerade G festgelegt denkt. Hat man nämlich die gedrehte Lage G_1 von G gezeichnet, so genügt es, $\overline{A'''1_1} = \overline{A'p'}$, $\overline{A'''2_1} = \overline{A'q'}$ zu machen und senkrecht zu G_1 von 1_1 und 2_1 aus die Abstände $\overline{A''p''}$ und $\overline{A''q''}$ abzutragen, um die Seitenrisse p_1''', q_1''' der gedrehten Punkte zu erhalten.

Handelt es sich um die Drehung eines Körpers oder einer Figur mit einer größeren Anzahl von Punkten, so ist es vorteilhafter, den Seitenriß der gedrehten Figur nicht wie vorhin umzuklappen, sondern

Hosted by Google

so in die Zeichenfläche zu legen, daß X_{13} auf X_{12} fällt und $+ \Pi_3$ sich mit $+ \Pi_2$ deckt.[1]) Denn einmal wird dadurch das Zeichnen des Aufrisses der gedrehten Figur vereinfacht, indem Auf- und Seitenriß jedes Punktes in einer zu X_{12} parallelen Geraden liegen, ferner bleibt der das Ergebnis enthaltende Teil der Zeichnung von Hilfslinien verschont. Nach dieser Methode ist in Fig. 25 die Aufgabe durch-

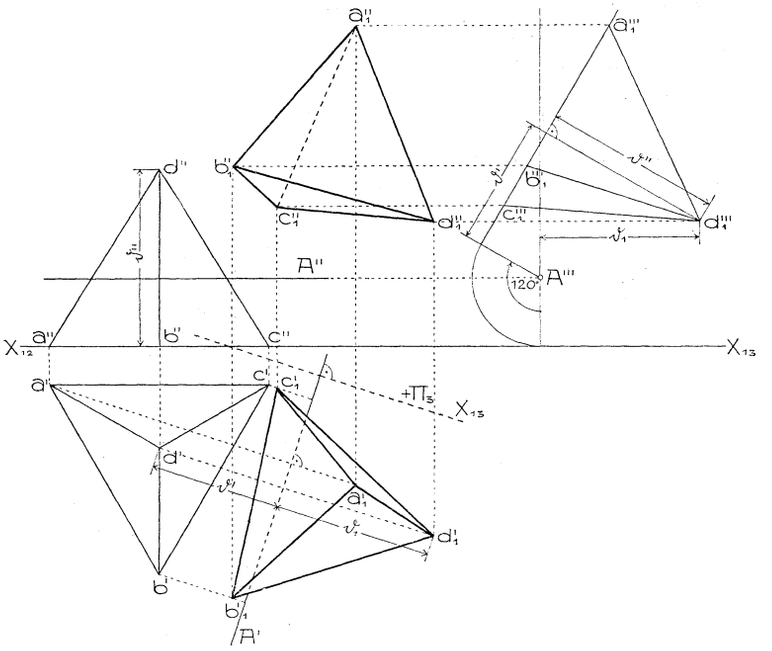


Fig. 25.

geführt: *Ein reguläres auf der Grundrißebene stehendes Tetraeder um die zu Π_1 parallele Gerade A um 120^0 zu drehen.* Zur Erläuterung mögen folgende Bemerkungen dienen. A''' darf auf gleicher Höhe mit A'' beliebig gewählt werden. Der Seitenriß der (ungedrehten) Tetraederfläche abc liegt in X_{13} und zwar bei unserer Annahme links von A'''. Dreht man daher diesen Halbstrahl um 120^0 um A''', so liegen darin a_1''', b_1''', c_1''' und zwar vom Fußpunkte des aus A''' auf den Halbstrahl gefällten Lotes um die Strecken $\overline{A'a'}$, $\overline{A'b'}$, $\overline{A'c'}$ entfernt. Die Auffindung des Punktes d_1''' ist durch die eingeschriebenen Strecken $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d}''$ gekennzeichnet. Da die erstprojizierende Ebene durch A sich im Seitenriß als die Lotrechte

1) *R. Staudigl*, Autographierte Vorlesungen über darstellende Geometrie, Wien 1880, S. 21.

Hosted by Google

durch A''' abbildet, so sind die Entfernungen der Punkte $a_1''', .. d_1'''$ von dieser Geraden gleich den Abständen $\overline{A'a_1'}, .. \overline{A'd_1'}$; trägt man sie also auf den Geraden $[a'\ A'], .. [d'\ A']$ von A' aus mit Berücksichtigung ihres Sinnes ab, so gelangt man zu den Punkten $a_1', .. d_1'$. In deren zu X_{12} normalen Ordnungslinien liegen dann auf gleicher Höhe mit ihren Seitenrissen $a_1'', .. d_1''$.

13. Drehungen um Achsen allgemeiner Lage. Die Drehung einer Figur um eine beliebige Achse A wird mittels eines Seitenrisses auf eine projizierende Ebene durch A auf die vorhergehende Aufgabe zurückgeführt.

Die Drehung eines einfachen Körpers erfordert schon ziemlich viele Linien, daher wollen wir uns auf die Lösung der Teilaufgabe beschränken: *Einen Punkt p um eine Gerade A um 120^0 zu drehen* (Fig. 26).

Sucht man von A und p den Seitenriß auf die Ebene $\Pi_3 = [A\,|\,\Pi_2]$ und achtet jetzt bloß auf den zweiten und dritten Riß, so hat man, weil A in Π_3 liegt, eine Aufgabe der in Nr. 12 behandelten Art vor sich. Man wird also einen vierten Riß auf eine zu A senkrechte Ebene Π_4 zeichnen, mit Hilfe der beiden letzten Risse die Drehung (nach Nr. 11) ausführen und aus den Projektionen p_1^{IV}, p_1''' des gedrehten Punktes (nach Nr. 7, Satz 1) die Risse p_1'' und p_1' ableiten (vgl. Fig. 26).

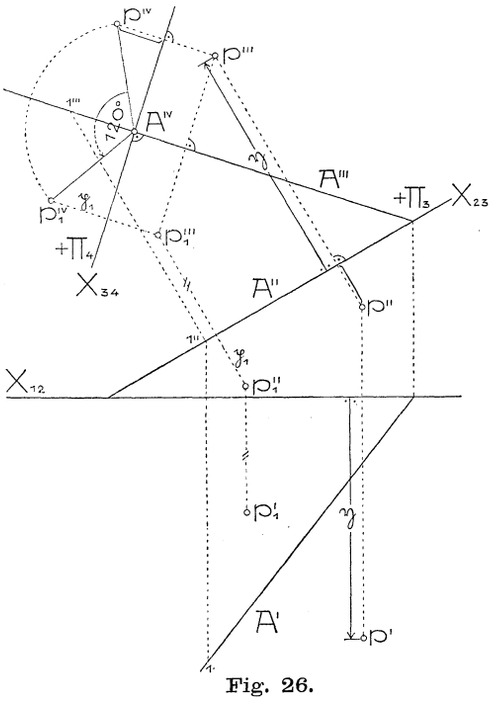


Fig. 26.

Handelt es sich um die Drehung eines Körpers, so wird man wohl den dritten Riß wie vorhin zeichnen, dann aber vorteilhafter, analog wie in Fig. 25, den vierten Riß des gedrehten Körpers so in die Zeichenfläche legen, daß X_{34} auf X_{23} fällt und $+\Pi_4$ sich mit $+\Pi_2$ deckt.

Übungsaufgaben. Man drehe Körper der am Schlusse von Nr. 9 genannten Art um Achsen, die zur Grund- oder Aufrißebene parallel sind (oder auch allgemeine Lage besitzen), und konstruiere von den gedrehten Körpern die Schlagschatten auf die Rißebenen (vgl. Nr. 31).

Hosted by Google

IV. Kapitel.

Das Weglassen der Rißachsen.

14. Einfluß einer Schiebung der Rißachse. Verschiebt man die Grundrißebene parallel zu sich selbst, während die Aufrißebene und der abzubildende Körper ihre Lage im Raume behalten, so bleibt der Grundriß seiner Gestalt nach ungeändert, verschiebt sich jedoch nach der Umklappung von Π_1 in Π_2 senkrecht zur früheren Achse. Die Unterschiede der ersten Tafelabstände der Punkte ändern sich hierbei nicht. Entsprechendes tritt bei Parallelverschiebung der Aufrißebene ein.

Befinden sich Auf- und Grundriß eines Körpers in perspektiver Lage und man verschiebt nun, ohne die Bilder zu ändern, die Rißachse parallel, so entspricht dieser Änderung im Raume eine gleichzeitige Parallelverschiebung beider Rißebenen. Denn findet die Verschiebung von X_{12} nach $\overline{X}_{12}$ (Fig. 27 a) um die Strecke a nach abwärts (genauer in der Richtung $+\eta$) statt, so erfahren die ersten Tafelabstände eine Vergrößerung, die zweiten Tafelabstände eine Verkleinerung um a. Die neue Grundrißebene $\overline{\Pi}_1$ liegt also um a unterhalb Π_1 und die neue Aufrißebene $\overline{\Pi}_2$ um a vor Π_2 (vgl. Fig. 27 b, wo die Rißebenen Π_1, Π_2, $\overline{\Pi}_1$, $\overline{\Pi}_2$, die Koinzidenzebene Γ sowie zwei Punkte p, q mit ihren ersten und zweiten Bildern im Kreuzriß dargestellt sind). Die neue Achse $\overline{X}_{12}$ liegt in der zu Π_1, Π_2 gehörigen Koinzidenzebene oder, anders ausgedrückt, *die Koinzidenzebene bleibt bei einer Schiebung der Rißachse ungeändert.* Hervorgehoben sei noch, *daß die Unterschiede der ersten und zweiten Tafelabstände je zweier Punkte einer Raumfigur bei einer solchen Schiebung ungeändert bleiben.* Wir werden daher späterhin von dem ξ oder η einer Strecke pq (vgl. Fig. 27 a) sprechen und darunter den Unterschied der ersten bzw. zweiten Tafelabstände ihrer Endpunkte verstehen.

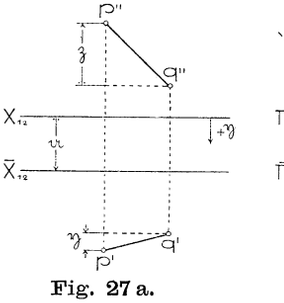


Fig. 27 a.

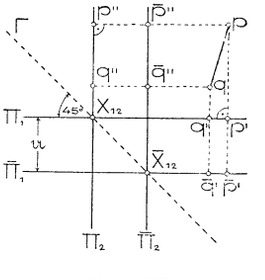


Fig. 27 b.

15. Einfluß des Weglassens der Rißachse. Sieht man überhaupt von einer bestimmten Lage der Rißachse in der Zeichenfläche ab, wobei aber ihre Richtung oder die der zugehörigen Ordnungslinien als gegeben vorausgesetzt wird, so ist durch die beiden Risse wohl

Hosted by Google

das Raumgebilde (etwa der dargestellte Körper) selbst vollkommen bestimmt, seine Lage gegen die gewählten Rißebenen aber nur bis auf Schiebungen senkrecht zur zugehörigen Symmetrieebene. Nun kommt es dem Ingenieur oder Architekten nie auf die Lage der dargestellten Gegenstände gegen die Projektionsebenen an; deshalb zeichnet er in seinen Plänen und Entwürfen auch nie eine Projektionsachse. Will er einmal die Lage irgend welcher Gebilde gegen eine bestimmte Ebene in Betracht ziehen, dann gehört eben diese Ebene mit zu den darzustellenden Gebilden. Aus diesem Grunde schon wollen wir uns in der Folge an das *Weglassen der Rißachse* gewöhnen, weil sonst erfahrungsgemäß das „Fehlen der Achse" dem raschen Verständnis rein technischer Zeichnungen hinderlich im Wege steht.[1]) Das Weglassen der Achse ist aber auch, vom Standpunkte des darstellenden Geometers aus beurteilt, empfehlenswert, weil es, wie wir in vielen Beispielen sehen werden, mannigfaltige Konstruktionsabkürzungen gestattet.

Aus der Unbestimmtheit der Lage von X_{12} folgt natürlich, daß bei Einführung von Seitenrissen auch die neuen Achsen bloß der Richtung nicht der Lage nach zu wählen sind. *Man darf also den Seitenriß eines Punktes und auf der dadurch bestimmten Ordnungslinie die Richtung für die betreffenden positiven Tafelabstände beliebig wählen.* Die Seitenrisse der übrigen Punkte ergeben sich dann mittels des Satzes 1 in Nr. 7, der jetzt vorteilhafter in der folgenden Form ausgesprochen wird:

Satz 1: *Der Abstandunterschied der neuen Risse zweier Punkte in Bezug auf die neue Achse ist gleich dem Abstandunterschied ihrer wegfallenden Risse in Bezug auf die alte Achse.*

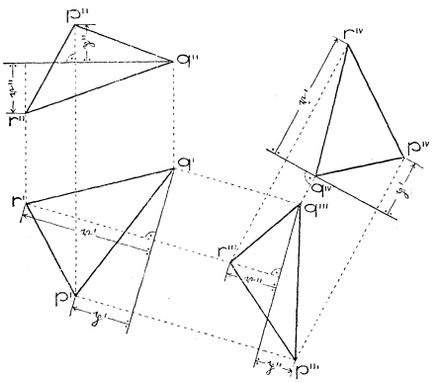


Fig. 28.

Um z. B. aus dem ersten und zweiten Riß eines Dreiecks pqr (Fig. 28) einen dritten Riß auf eine zu Π_1 normale Ebene Π_3 zu erhalten, wähle man etwa q''' beliebig und ziehe $[q''' \mid q'q''']$. Von dieser Geraden aus trage man die aus dem zweiten Risse entnehmbaren Unterschiede der ersten Tafelabstände ($\mathfrak{p}''$ für p und $\mathfrak{r}''$ für r) auf den zu $[q'q''']$ parallelen Ordnungslinien der betreffenden Punkte mit Berück-

1) Vgl. hiezu die Vorrede von *F. A. Klingenfeld,* Lehrb. d. darst. Geometrie, Nürnberg 1851. *A. Mannheim,* Nouv. Ann. Math. (3), 1 (1882), p. 385—400,

Hosted by Google

sichtigung des Vorzeichens auf. Die Konstruktion ist also so durchgeführt, als ob $X_{12} = [q'' \mid q'q'']$ und $X_{13} = [q''' \mid q'q''']$ gewesen wäre. Der Vorteil des Weglassens der Achsen besteht aber gerade darin, daß sie nicht feststehen, sondern, wenn man es so auffassen will, für verschiedene Konstruktionen verschieden gewählt werden dürfen. Ermittelt man z. B. einen neuen Seitenriß von pqr auf eine zu Π_3 normale Ebene Π_4 und wählt hierzu q^{IV} beliebig, so wird man $[q' \mid q'q''']$ als X_{13} betrachten, weil man die Unterschiede der dritten Tafelabstände $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{r}'$ der Punkte p und r gegenüber q von dieser Geraden aus zu messen und sie dann von $[q^{IV} \mid q'''q^{IV}]$ aus abzutragen hat

Da bei Weglassung der Achsen die Lage der dargestellten räumlichen Gebilde gegen die Rißebenen nicht völlig bestimmt ist, so dürfen wir weder zur Festlegung von Geraden und Ebenen noch bei der Ausführung von Konstruktionen, die sich auf sie beziehen, deren Spurelemente benutzen. Wir werden daher im folgenden eine Ebene nicht durch ihre Spuren gegeben denken, sondern fast ausnahmslos durch die Risse dreier ihrer Punkte oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch die Risse eines Punktes und einer Geraden oder zweier sich schneidenden oder parallelen Geraden. Damit stimmen wir wieder nur mit der Praxis überein, wo kaum jemals die Spuren einer Ebene auf den Projektionsebenen gezeichnet werden.[1])

Hingegen dürfen die Schnitte von Geraden und Ebenen mit der Koinzidenzebene Verwendung finden, weil diese Ebene von der Lage der Rißachse unabhängig ist.

V. Kapitel.

Die Grundaufgaben über Lagenbeziehungen.

16. Einteilung der geometrischen Aufgaben. Sämtliche geometrischen Aufgaben lassen sich in zwei große, wesentlich voneinander verschiedene Gruppen bringen. Zur ersten Gruppe gehören alle jene Aufgaben, in denen weder Längen von Strecken (oder Flächen- oder Rauminhalte) noch Größen von Winkeln auftreten, in denen es sich also bloß um Lagenbeziehungen zwischen Punkten,

433—450, schlägt vor, das von den Ingenieuren angewandte Verfahren, die Projektionsachsen nur ihren Richtungen nach zu benutzen, schon in den ersten Elementen zu lehren. Meiner Meinung nach sollte man jedoch im Mittelschulunterricht die festen Rißebenen beibehalten.

1) Nach *Chr. Wiener*, a. a. O. S. 38, hat schon *Bardin*, Notes et croquis de Géom. descr., 1847, die Aufgaben über Ebenen auf diese Weise gelöst. Weiter verfolgt hat diese Darstellungsweise *F. A. Klingenfeld*, a. a. O. — Vor *G. Monge* kannte man übrigens eine feste Achse noch nicht.

Hosted by Google

Linien und Flächen, bei den Elementaraufgaben insbesondere um Lagenbeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen handelt. Solche Aufgaben sind: Die Aufsuchung des Schnittes einer Geraden mit einer Ebene oder der Schnittlinie zweier Ebenen; die Ermittlung einer Geraden, die durch einen gegebenen Punkt geht und zwei gegebene Geraden oder Kurven schneidet usw. Wir nennen diese Aufgabengruppe *„Aufgaben über Lagenbeziehungen"*.[1])

Alle übrigen Aufgaben, in denen also entweder Längen oder Winkel, insbesondere rechte Winkel auftreten, wie z. B. die Ermittlung des Abstandes eines Punktes von einer Geraden oder Ebene, die Ermittlung des Neigungswinkels zweier Geraden oder Ebenen, die Darstellung von Kreisen usw., gehören zu den *„Aufgaben über Maßverhältnisse"*.

Die Aufgaben über Lagenbeziehungen sind, vom darstellendgeometrischen Standpunkt betrachtet, einfacherer Art; denn sie genießen den großen Vorzug, daß sie sich auch in schiefer und zentraler Projektion mit genau denselben Linien lösen lassen.[2])

Wir wollen daher jetzt die Lösung dieser Aufgaben unter alleiniger Zugrundelegung genau präzisierter Annahmen durchführen, um uns später, bei Behandlung der schiefen und zentralen Projektion, auf den Nachweis des Erfülltseins dieser Annahmen beschränken zu dürfen; denn ist dieser Nachweis erbracht, so gelten die hier gegebenen Lösungen auch für jene Abbildungsarten.

17. Voraussetzungen für die Lösung der Aufgaben über Lagenbeziehungen. Über zwei zugeordnete und in perspektive Lage gebrachte Normalrisse eines Raumgebildes gelten (nach Nr. 3, 5 u. 6) die folgenden vier

Gesetze: 1. *Jeder Punkt des Raumes wird durch ein Punktepaar (sein Bildpaar oder sein erstes und zweites Bild) dargestellt, dessen*

1) Sie heißen auch „Aufgaben aus der Geometrie der Lage" oder „deskriptive Aufgaben", die übrigen „Aufgaben aus der Geometrie des Maßes" oder „metrische Aufgaben". Diese Scheidung stammt von *J. V. Poncelet*, Traité des propriétés projectives des figures, Paris 1822; 2e éd., T. 1, 1865, art. 5, 7. Die Wichtigkeit dieser Scheidung für die darstellende Geometrie hat wohl *R. Staudigl*, Über die Identität von Konstruktionen in perspektivischer, schiefer und orthogonaler Projektion, Stzbr. Ak. Wien, 64, 2. Abt. (1871), S. 490—494, zuerst erkannt. Vgl. auch von ihm „Die axonometrische und schiefe Projektion", Wien 1875, S. 32f.

2) Auch die Aufgaben über Maßverhältnisse lassen einheitliche Lösungen für alle drei Projektionsarten zu, wie es der Verfasser in einem Vortrage auf der Naturforscher-Versammlung in *Meran* (Sept. 1905) kurz dargelegt (vgl. Jhrsb. Dtsch. Math.-Ver. 14 (1905), S. 572) und in einer an der technischen Hochschule in Wien 1905/06 gehaltenen Sondervorlesung über die Abbildungsmethoden der darst. Geom. ausgeführt hat. Hier würde ein näheres Eingehen darauf zu sehr vom gesteckten Ziele ablenken.

Hosted by Google

Verbindungslinie zu einer festen Richtung in der Zeichenebene (Richtung der Ordnungslinien) parallel ist.

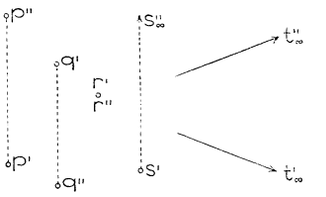


Fig. 29.

Die Reihenfolge der Punkte eines Bildpaares ist zu beachten, d. h. das erste und zweite Bild sind nicht vertauschbar. Die Punkte eines Paares dürfen ferner (vgl. Fig. 29) zusammenfallen oder einzeln oder beide ins Unendliche rücken. Im letzten Falle sind sie als die unendlichfernen Punkte zweier Geraden gegeben.

2. *Jedes solche Punktepaar der Zeichenfläche bestimmt eindeutig einen Punkt im Raume.*

Ausgenommen davon ist der als zusammenfallendes Punktepaar aufzufassende unendlichferne Punkt der Ordnungslinien; in ihm fallen die Bildpaare sämtlicher Punkte einer Geraden zusammen (Nr. 5).

3. *Die Bildpaare p'p'' der Punkte einer Geraden G erfüllen zwei gerade Linien G', G'' (ihr Bildpaar) und bilden auf ihnen ähnliche Punktreihen.*

Die Geraden G', G'' dürfen auch (vgl. Fig. 30) zusammenfallen; decken sich dabei die beiden Bilder von zwei Punkten p, q, so decken sich zufolge des Gesetzes 3 (vgl. Nr. 4) die Bilder eines jeden Punktes von G. Es kann auch G' oder G'' zum Punkte, mithin G'' bzw. G' zur zugehörigen Ordnungslinie werden. G heißt dann ein *erst-* oder *zweitprojizierender Strahl.* Wie schon in Nr. 5 erwähnt, ist für einen erst-(zweit-) projizierenden Strahl eigentlich jede Gerade durch den Punkt $G'(G'')$ als erstes (zweites) Bild zu betrachten. Die ähnlichen Punktreihen auf G' und G'' sind hier *singulär* (Nr. 4). Für eine einzige Gerade des Raumes werden beide Bilder zu Punkten; sie fallen mit dem unendlichfernen Punkte der Ordnungslinien zusammen.

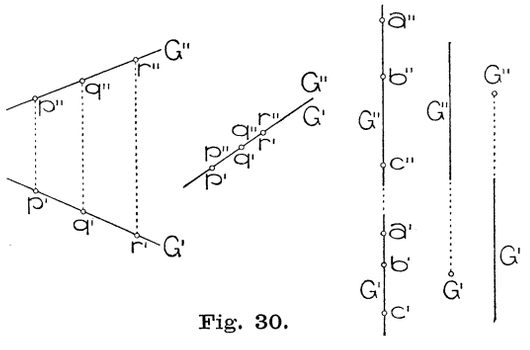


Fig. 30.

4. *Jedes solche Paar von Punktreihen in der Zeichenfläche bestimmt eindeutig eine Gerade des Raumes.*

Diese vier Gesetze charakterisieren das Grund- und Aufrißverfahren noch nicht, denn sie gelten auch für mannigfaltige andere Abbildungsarten. So z. B. für zwei in perspektive Lage gebrachte Normalrisse

Hosted by Google

auf nichtrechtwinkelige Ebenen oder für Abbildungen, die sich ergeben, wenn man ein Raumgebilde normal auf Π_1 und diesen Riß samt dem Raumgebilde zentral oder schief auf die zu Π_1 rechtwinkelige Ebene Π_2 projiziert.

Wir wollen nun im folgenden beweisen:

Satz 5: *Sämtliche Aufgaben über Lagenbeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen lassen sich ganz allein auf Grund der obigen vier Gesetze lösen, also ohne Bezugnahme auf das räumliche Zustandekommen der Bilder eines Punktes.*

Ausdrücklich sei noch bemerkt, daß in dem allgemeinen Fall, den wir jetzt stets vor Augen behalten wollen, die Bilder eines unendlichfernen Punktes im Endlichen, hingegen die eines endlichfernen Punktes im Unendlichen liegen können. Wir nennen jeden Punkt des Raumes mit unendlichfernen Bildern *Verschwindungspunkt.*

18. Das Ineinanderliegen von Punkten und Geraden. Von den drei Raumelementen *Punkt, Gerade, Ebene* können ineinanderliegen, d. h. das eine dem anderen angehören oder das eine durch das andere gehen: Punkt und Gerade, Gerade und Ebene, Punkt und Ebene. Die bildliche Darstellung dieser ineinanderliegenden Elemente auf Grund der obigen Gesetze (Nr. 17) wollen wir näher betrachten.

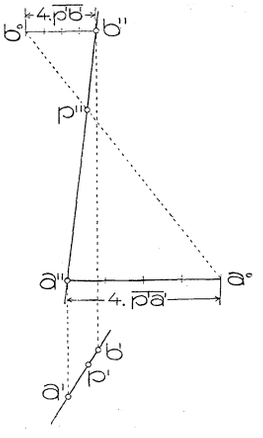


Fig. 31.

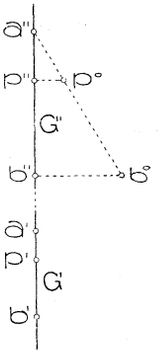


Fig. 32.

Ein Punkt p gehört einer Geraden G dann und nur dann an, wenn die Bilder von p entsprechende Punkte der ähnlichen Reihen G', G'' sind. Liegen G' und G'' nicht in einer Ordnungslinie, so findet man aus einem Bilde von p, z. B. p', das andere p'' als Schnitt der Ordnungslinie durch p' mit G'' (Fig. 30, 1. Fall). Diese Konstruktion wird desto ungenauer, je weniger G'' gegen die Ordnungs-

Hosted by Google

richtung geneigt ist. Kennt man bei einer geringen Neigung die Bilder zweier Punkte a, b von G, so geschieht die Ermittlung von p'' aus p' genauer mit Benutzung des Gesetzes 3 in Nr. 17. Diesem zufolge teilt p'' die Strecke $a''b''$ in demselben Verhältnis wie p' die Strecke $a'b'$. Die Ausführung der Konstruktion zeigt Fig. 31, wobei jedoch statt des Vierfachen der Teilstrecken $\overline{p'a'}$ und $\overline{p'b'}$ auch andere Vielfache benutzt werden dürfen, damit $[a^0b^0]$ und $[a''b'']$ sich unter größerem Winkel schneiden.

Gehören G' und G'' einer Ordnungslinie an, so müssen zur Bestimmung der ähnlichen Reihen die Bilder zweier Punkte a, b von G gegeben sein und das Zeichnen des Bildpaares p', p'' eines weiteren Punktes p kann nur auf Grund des erwähnten Gesetzes 3 geschehen. Die Ausführung erfolgt auf obige Art oder nach Fig. 32. (Bei gegebenem p'': $\overline{b''b^0} = \overline{a'b'}$, $p^0 = [p''\, b''b^0 \cdot a''b^0]$, $\overline{a'p'} = \overline{p''p^0}$.)

19. Darstellung einer Ebene. Eine Ebene ist durch die Bilder dreier ihrer Punkte bestimmt, die nicht derselben Geraden angehören. Dafür kann man auch die Bilder zweier ihrer Geraden wählen. Da zwei Geraden G und H dann und nur dann in einer Ebene liegen, wenn sie einen endlich- oder unendlichfernen Punkt gemeinsam haben, so werden die Bildpaare (G', G''), (H', H'') dann und nur dann eine Ebene bestimmen, wenn die Bilder eines Punktes den entsprechenden Bildern beider Geraden angehören.

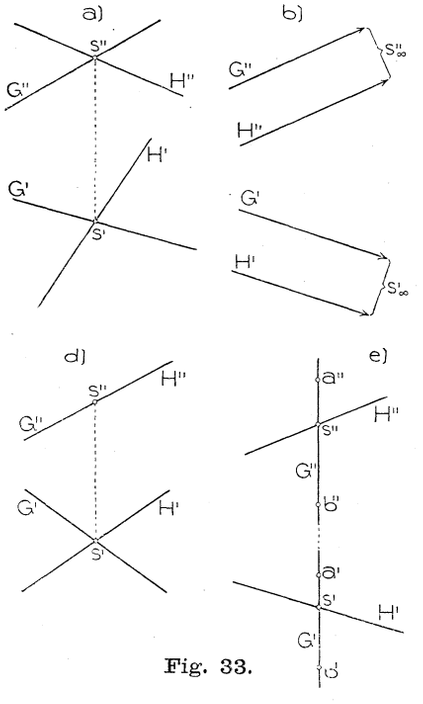


Fig. 33.

In Fig. 33 zeigen die Fälle a), b), d) sich schneidende Geraden; im Fall b) liegen die Bilder des Schnittpunktes s unendlichfern, s selbst kann trotzdem im Endlichen liegen. Fall c) zeigt zwei *nichtschneidende, windschiefe* oder *sich kreuzende* Geraden; im Fall e) schneiden sich G und H dann und nur dann, wenn $a''b''$ von $[H''G'']$

in demselben Verhältnis geteilt wird wie $a'b'$ von $[H'G']$. Aus Fall d) und dem analogen $(G' = H')$ folgern wir den

Satz 1: *Alle Punkte des Raumes, deren erste oder zweite Bilder in einer Geraden liegen, gehören einer Ebene an.*

Man nennt solche Ebenen *erst-* oder *zweitprojizierend.* Durch eine Gerade allgemeiner Lage ist eine erst- und eine zweitprojizierende Ebene legbar.

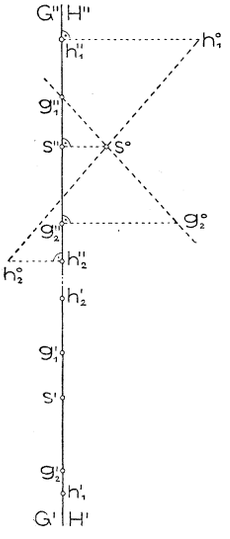


Fig. 34.

Fallen die Bilder der Geraden $G = [g_1 g_2]$, $H = [h_1 h_2]$ in dieselbe Ordnungslinie, so schneiden sich die Geraden ebenfalls. Macht man nämlich (Fig. 34) $\overline{g_2'' g_2^0} = \overline{g_1' g_2'}$, $\overline{h_2'' h_2^0} = \overline{g_1' h_2'}$, $\overline{h_1'' h_1^0} = \overline{g_1' h_1'}$, sucht $s^0 = [g_1'' g_2^0 \cdot h_1^0 h_2^0]$, $s'' = [G'' \cdot s^0\ G'']$ und trägt $\overline{s'' s^0}$ von g_1' aus auf G' bis s' ab, so sind s'', s' die Bilder eines G und H angehörigen Punktes. Denn ob ich s'' als zweites Bild eines Punktes von G oder von H betrachte, so hat das erste Bild (nach Fig. 32) immer die Entfernung $\overline{s'' s^0}$ von g_1'. Daraus folgt:

Satz 2: *Alle Punkte des Raumes, deren Bilder derselben Ordnungslinie angehören, liegen in einer Ebene,*

weil je zwei aus solchen Punkten bestehende Geraden sich schneiden (vgl. Fußn. S. 8). Jede derartige Ebene heiße *doppelprojizierend.*

Auf ähnliche Weise erkennt man die Richtigkeit des Satzes:

Satz 3: *Sämtliche Punkte, deren beide Bilder zusammenfallen, gehören einer Ebene an.*

Betrachten wir nämlich irgend zwei Geraden G und H, deren sämtliche Punkte zusammenfallende Bilder besitzen, dann ist $[G'H'] = [G''H'']$, die beiden Geraden haben also einen Punkt gemeinsam. Alle Geraden, deren Punkte zusammenfallende Bilder besitzen, schneiden sich gegenseitig, gehören mithin (nach Fußn. S. 8) einer Ebene an.

Diese Ebene soll auch in dem jetzigen allgemeinen Falle mit Γ oder, wenn noch andere Bilder in Betracht kommen, mit Γ_{12} bezeichnet und *Koinzidenzebene* genannt werden.

20. Das Ineinanderliegen von Ebenen und Geraden. Eine Gerade liegt in einer Ebene dann und nur dann, wenn sie zwei Geraden dieser Ebene in nicht zusammenfallenden Punkten schneidet.

Von einer der (nicht projizierenden) Ebene ε angehörenden Geraden G ist ein Bild willkürlich wählbar, das andere dadurch bestimmt.

Hosted by Google

Sei z. B. (Fig. 35) ε durch die Bilder der zwei sich schneidenden (oder parallelen) Geraden A, B und außerdem G'' gegeben. Schneidet G'' die Geraden A'', B'' in den von $s'' = [A''B'']$ verschiedenen Punkten $a'' = [G''A'']$, $b'' = [G''B'']$, so sind dies die zweiten Bilder der Schnittpunkte a, b von G mit A und B. Ermittelt man nun a', b' in A' bzw. B', so ist $G' = [a'b']$.

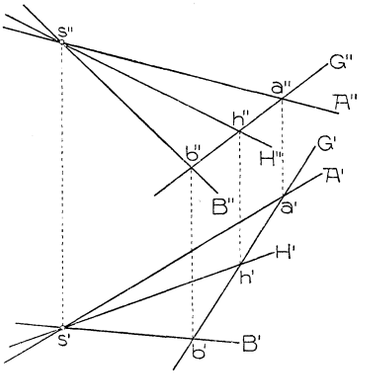


Fig. 35.

Geht von einer ε angehörigen Geraden H das gegebene Bild H'' durch s'', so benutzt man zur Ermittlung ihres ersten Bildes eine Hilfsgerade G, von der G'' H'' in einem von s'' verschiedenen erreichbaren Punkte h'' schneidet, deren erstes Bild G' also wie vorher konstruierbar ist. Auf G' liegt dann h' und man hat $H' = [s'h']$.

Ebenso verfährt man, wenn H'' eine oder beide der Geraden A'', B'' in unzugänglichen (d. h. außerhalb des Zeichenblattes fallenden) Punkten trifft. Wäre jedoch etwa $H'' \parallel A''$, so wäre auch $H' \parallel A'$.

In ε befindet sich auch eine Gerade V, von der V'' und V' im Unendlichen liegen. Wir nennen V die *Verschwindungslinie* von ε. Die durch s gehenden Strahlen von ε bilden sich als zwei Strahlbüschel mit den Scheiteln s', s'' ab und die unendlichfernen Punkte zusammengehöriger Strahlen dieser Büschel sind die Bilder von Punkten der Verschwindungslinie. Jedes andere Paar von Strahlbüscheln mit den Scheiteln s_1', s_1'', deren Strahlen zu denen von s', s'' entsprechend parallel sind, bestimmt dieselbe Gerade V. Hat man nun zwei verschiedene Verschwindungslinien V, V_1 durch Paare von Strahlbüscheln definiert, so darf man sie durch zwei neue Paare von Strahlbüscheln mit gemeinsamen Scheiteln ersetzen. Dann erkennt man aber leicht, daß sie ein zusammengehöriges Strahlenpaar gemeinsam haben oder, anders ausgedrückt, daß V und V_1 sich schneiden. Nach Fußnote S. 8 folgt daraus: *Sämtliche Verschwindungspunkte des Raumes gehören einer Ebene (der Verschwindungsebene) an.* Bei der Darstellung durch zugeordnete Normalrisse fällt die Verschwindungsebene mit der unendlichfernen Ebene Ω zusammen.

21. Das Ineinanderliegen von Punkten und Ebenen. Ein Punkt gehört einer Ebene dann und nur dann an, wenn er einer in der Ebene liegenden Geraden angehört.

Ist eine (nicht projizierende) Ebene ε wie in Nr. 19 durch die Bilder der Geraden A und B gegeben (Fig. 36), so darf von einem in ihr liegenden Punkte p ein Bild, z. B. p', willkürlich gewählt werden, das andere p'' ist dadurch bestimmt. Um es zu erhalten, legt man in ε durch p eine Gerade, deren erstes Bild (durch p') so gewählt

Hosted by Google

wird, daß es A' und B' in zugänglichen Punkten 1′, 2′ schneidet. Ihr zweites Bild wird nach Nr. 20 konstruiert, in ihm liegt p''. Analog findet man aus dem zweiten Bilde eines ε angehörenden Punktes q das erste Bild.

Das gegebene Bild eines Punktes von ε darf insbesondere auch unendlichfern liegen.

Wenn ε durch zwei Geraden gegeben ist, deren Bilder sich schneiden, so verwendet man als Hilfsgerade durch p vorteilhaft die Verbindungslinie mit einem der Verschwindungspunkte der gegebenen Geraden.

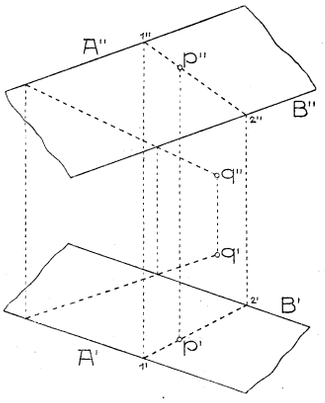


Fig. 36.

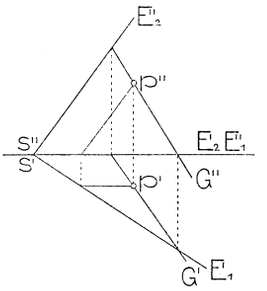


Fig. 37.

Die im Auf- und Grundrißverfahren übliche Bestimmung einer Ebene ε durch ihre Spuren E_1, E_2 ist ein Sonderfall der oben verwendeten durch zwei sich schneidende Geraden (Fig. 37). Die erläuterten Konstruktionen der Bilder von Punkten oder Geraden der Ebene lassen sich auf diesen Sonderfall unmittelbar anwenden.

22. Die Grundaufgaben über Lagenbeziehungen. Dualitätsgesetz. Nach der Betrachtung des Ineinanderliegens der Raumelemente gehen wir zur Besprechung der Grundaufgaben über Lagenbeziehungen über. Wie sich aus der Zusammenstellung der Raumelemente ergibt, treten nur sechs solche Aufgaben auf, die sich paarweise einander gegenüberstellen lassen, nämlich:

Es ist zu zeichnen:

a) *Die Verbindungslinie zweier Punkte.*	a′) *Die Schnittlinie zweier Ebenen.*
b) *Die Verbindungsebene einer Geraden und eines Punktes.*	b′) *Der Schnittpunkt einer Geraden und einer Ebene.*
c) *Die Verbindungsebene zweier Geraden durch einen Punkt.*	c′) *Der Schnittpunkt zweier Geraden in einer Ebene.*

Zu diesen Aufgaben sei bemerkt, daß jede einem geometrischen Grundgesetze zugeordnet ist, des Inhalts nämlich, daß die gegebenen

Hosted by Google

Gebilde eindeutig das zu konstruierende bestimmen, also zwei Punkte oder Ebenen eine Gerade, ein Punkt und eine Gerade eine Ebene usw.[1]) Ferner sei darauf hingewiesen, daß die gegenübergestellten Aufgaben, mithin auch die entsprechenden Sätze, sich bloß durch die Vertauschung der Ausdrücke Punkt und Ebene, Verbinden und Schneiden unterscheiden, dem Ineinanderliegen von Punkt und Gerade mithin das Ineinanderliegen von Ebene und Gerade gegenübersteht. Aus der Möglichkeit, die geometrischen Grundgesetze einander derart gegenüberstellen zu können, folgt das sogenannte *Dualitätsgesetz* (auch *Reziprozitätsgesetz*) für den Raum[2]), welches aussagt, *daß aus jedem geometrischen Satze über Lagenbeziehungen ein anderer hervorgeht, indem man die Ausdrücke Punkt und Ebene, Verbinden und Schneiden vertauscht.*

Von den obigen sechs Grundaufgaben sind die Aufgaben a), b), c), c′) durch das Vorhergehende eigentlich schon erledigt; es genüge daher auf folgendes hinzuweisen:

Zu a). Sind (p', p''), (q', q'') die Bilder der gegebenen Punkte, so sind $[p'q'] = G'$, $[p''q''] = G''$ die Bilder der Verbindungsgeraden; durch die beiden Punktepaare sind auch die ähnlichen Punktreihen auf ihnen bestimmt.

Zu b). Sind p', p'' die Bilder des gegebenen Punktes, G', G'' die der gegebenen Geraden, so wähle man (nach Nr. 18) auf G einen Punkt $s(s', s'')$; $[s'p'] = H'$, $[s''p''] = H''$ sind dann die Bilder einer Geraden H, die mit G (nach Nr. 19) die Ebene bestimmt.

Zu c). Die gegebenen Geraden bestimmen nach Nr. 19 schon die Ebene.

Zu c′). Gehören $G(G', G'')$, $H(H', H'')$ einer Ebene an, so sind $[G'H'] = s'$, $[G''H''] = s''$ die Bilder ihres Schnittpunktes. Für den Fall, als die Bilder derselben Ordnungslinie angehören, ist in Nr. 19 (Fig. 34) die Konstruktion von s', s'' angegeben.

Es bleiben demnach noch die Aufgaben a′) und b′) zu lösen, von denen wir b′) zuerst betrachten wollen.

23. Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene. Die Ebene ε sei durch die Bilder des Dreiecks abc gegeben, die Gerade heiße G

1) Genaueres darüber und über das Folgende bei *F. Enriques*, Vorl. über projektive Geom., deutsch von *H. Fleischer*, Leipzig 1903, Kap. 1 u. 2.

2) Auch für die Ebene gilt ein Dualitätsgesetz; vertauschbar sind in ihr außer Verbinden und Schneiden: *Punkt* und *Gerade*. Dieses Gesetz hat *J. V. Poncelet* erkannt und *Gergonne*, Ann. math. p. appl., (1825 u. 1826), p. 209—231, ungefähr in obiger Weise dargelegt. In vollständiger Allgemeinheit wurde es erst von *A. F. Möbius*, Der baryzentrische Kalkül, Leipzig 1827, § 288, und *J. Plücker*, Analytisch-geom. Entwickelungen, Bd. 2, Essen 1831 (2. Abt., S. 242—251) erfaßt.

Hosted by Google

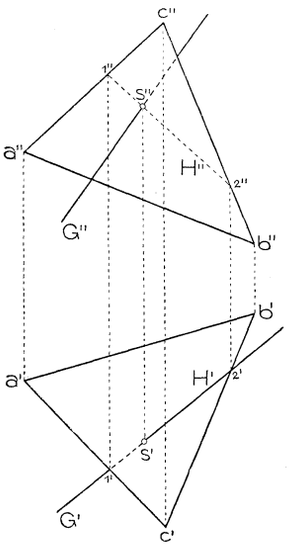


Fig. 38.

(Fig. 38). Man legt durch G eine der beiden projizierenden Ebenen (Nr. 19), z. B. die erstprojizierende. Sie schneidet ε in einer Geraden H, für die $H' = G'$ ist und H'' nach Nr. 20 gefunden wird. Dann ist $[H''G''] = s'' = [\varepsilon G]''$, während s' dem Bilde G' angehört. Fällt s'' ins Unendliche, so liegt s in der Verschwindungsebene (Nr. 20). Für eine erstprojizierende Gerade G wird die erstprojizierende Ebene unbestimmt; man wähle dann H' irgendwie durch den Punkt G'.

Der Treffpunkt c der beiden Bilder einer Geraden G stellt deren *Schnittpunkt mit der Koinzidenzebene* dar (Fig. 39a), denn es ist der einzige Punkt der Geraden mit sich deckenden Bildern. Für $G'' \parallel G'$ (Fig. 39b) schneidet G die Schnittlinie der Koinzidenz- und Verschwindungsebene. Wegen der Konstruktion von $[G\Gamma]$ für den Fall, als G einer doppelprojizierenden Ebene angehört, vgl. Nr. 24.

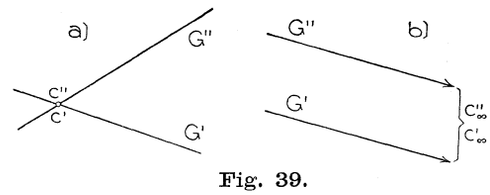


Fig. 39.

Die Sichtbarkeit in Fig. 38 (sowie in Fig. 40) ist unter der Annahme, daß man Auf- und Grundriß (bzw. Auf- und Kreuzriß) vor sich habe, gezeichnet (vgl. Nr. 29). Unter derselben Annahme stellt Fig. 39b eine zur Koinzidenzebene parallele Gerade dar; wir können also den Satz aussprechen:

Alle Geraden mit parallelem Auf- und Grundriß sind zur Koinzidenzebene parallel.

24. Schnittlinie zweier Ebenen. Da die Schnittlinie durch zwei ihrer Punkte bestimmt ist, so wird man zweimal von je einer Geraden der einen Ebene den Schnittpunkt mit der andern Ebene nach Nr. 23 ermitteln; die Verbindungslinie dieser Punkte liefert die gesuchte Schnittlinie.

In Fig. 40 ist ε durch die schneidenden Geraden AB, φ durch CD gegeben und deren Bilder sind, bei horizontaler Richtung der Ordnungslinien, mit A'', A''' usw. bezeichnet. Da die Punkte $a = [A\varphi]$, $b = [B\varphi]$, $d = [D\varepsilon]$, $c = [C\varepsilon]$ in der Schnittlinie $[\varepsilon\varphi]$ liegen, so braucht man nur zwei davon zu ermitteln. Fig. 40 zeigt die Konstruktion der Bilder der drei ersten Punkte.

Die Konstruktion vereinfacht sich, wenn eine der Ebenen projizierend ist, indem dann das als Gerade erscheinende Bild dieser Ebene

Hosted by Google

sich mit dem einen Bilde der Schnittlinie deckt, das andere daher nach Nr. 20 gefunden werden kann.

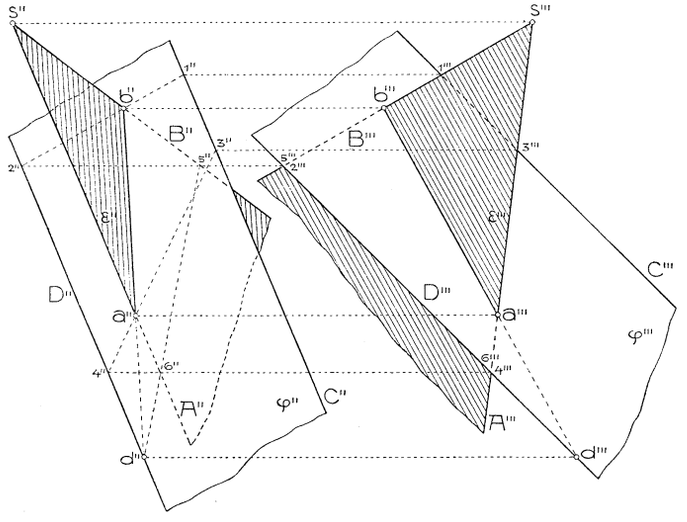


Fig. 40.

Die Schnittlinie einer beliebigen Ebene $\varepsilon = [AB]$ mit Γ (vgl. Fig. 41) ist $S = [\Gamma A \cdot \Gamma B] = [ab]$, wobei $a' = a'' = [A'A'']$, $b' = b'' = [B'B'']$. Werden diese Punkte unzugänglich, so sucht man die Schnittpunkte irgend welcher anderen Geraden von ε mit Γ. Für späteren Gebrauch sei der daraus folgende Satz hervorgehoben: *Die beiden Bilder einer jeden Geraden von ε schneiden sich auf den sich deckenden Bildern von $[\varepsilon\Gamma]$.* Unter Verwendung dieser Geraden vereinfacht sich die Lösung der in Nr. 20 besprochenen Aufgabe, aus dem einen Bilde einer Geraden G von ε, das andere Bild zu finden (vgl. Fig. 41).

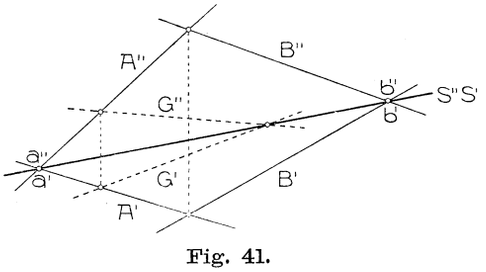


Fig. 41.

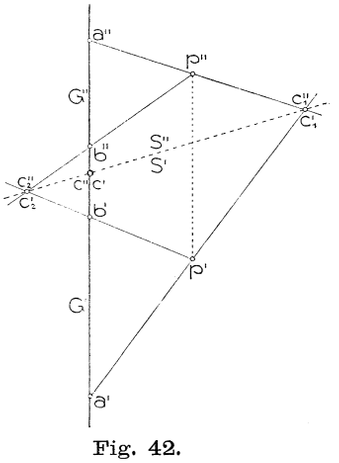


Fig. 42.

Damit läßt sich nun auch die in Nr. 23 unerledigt gebliebene Aufgabe leicht lösen: den Schnittpunkt c der einer doppelprojizierenden

Hosted by Google

Ebene angehörenden Geraden G mit Γ zu ermitteln. G muß durch die Bilder zweier ihrer Punkte a, b gegeben sein (Fig. 42). Wählt man außerhalb G einen Punkt p und sucht $[pa\Gamma] = c_1$, $[pb\Gamma] = c_2$, so ist $[c_1'' c_2'' G''] = c'' = c'$, wegen $[c_1 c_2] = [pab\Gamma]$.

Die in Fig. 34 behandelte Aufgabe kann jetzt auch dadurch gelöst werden, daß man durch jede der Geraden G und H, wie eben gezeigt, eine Hilfsebene legt, deren Schnittlinie aufsucht und sie mit G oder H zum Schnitt bringt.

Durch wiederholte Anwendung der Konstruktionen in Nr. 23 und 24 findet man auch die *Durchdringungslinie zweier ebenflächig-begrenzter Körper*. Näher gehen wir darauf nicht ein, da umständlichere solche Aufgaben praktisch nur sehr selten auftreten.

25. Allgemeines Gesetz betreffend die Lösung der Aufgaben über Lagenbeziehungen. Wir haben im vorhergehenden gesehen, daß die sechs Grundaufgaben über Lagenbeziehungen (Nr. 22) sich allein unter Voraussetzung der in Nr. 17 angeführten vier Gesetze lösen lassen. Da sämtliche Aufgaben über Lagenbeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen sich aus jenen Grundaufgaben zusammensetzen müssen, so ist damit auch Satz 5 in Nr. 17 bewiesen.

Aus diesem Satze ziehen wir aber noch die für Späteres wichtige Folgerung:

Satz 1: *Die Aufgaben über Lagenbeziehungen lassen sich in allen Abbildungsarten, für welche die in Nr. 17 ausgesprochenen vier Gesetze gelten, mit genau denselben Linien lösen wie bei Verwendung zugeordneter Normalrisse.*

Denn daß für zugeordnete Normalrisse jene vier Gesetze gelten, wurde schon in Nr. 17 hervorgehoben.

Da von den in diesem Satz erwähnten Abbildungsarten öfter gesprochen werden wird, so sollen sie in der Folge als *lineare Abbildungen* bezeichnet werden, obschon sie noch nicht die allgemeinsten sind, in denen sich gerade Linien im allgemeinen als Paare solcher abbilden.

VI. Kapitel.

Schattenbestimmung für ebenflächige Körper in zugeordneten Normalrissen.

26. Beleuchtungsarten. Eine wichtige Anwendung finden die Aufgaben über Lagenbeziehungen bei der Schattenbestimmung an ebenflächigen Körpern. Diese ließe sich sofort völlig allgemein für eine beliebige lineare Abbildung behandeln; um aber anschaulicher bleiben und einfacher von den Dingen reden zu können, setzen wir

Hosted by Google

jetzt voraus, daß der Körper in zugeordneten Normalrissen dargestellt sei.

Wie bei jeder mathematischen Behandlung von Vorgängen der wirklichen Welt müssen wir auch bei der Schattenbestimmung von vereinfachenden Annahmen ausgehen, die in der Wirklichkeit nur angenähert zutreffen. Eine erste solche Annahme ist die Punktförmigkeit der Lichtquelle; ihr am nächsten kommt die elektrische Bogenlampe. Die durch eine punktförmige Lichtquelle (einen *leuchtenden Punkt*) bewirkte Beleuchtung heißt in der darstellenden Geometrie *Zentralbeleuchtung*. Für die Darstellung der Beleuchtung durch die Sonne wird diese als unendlichferner Punkt betrachtet und von der atmosphärischen Strahlenbrechung abgesehen; die Sonnenstrahlen werden also als parallele Geraden angenommen. In der Tat verschwinden die Abmessungen eines Gegenstandes, an dem wir die Schatten gewöhnlich konstruieren, gegenüber seiner Entfernung von der Sonne. Eine solche Beleuchtung durch parallele Lichtstrahlen (einen unendlichfernen leuchtenden Punkt) heißt in der darstellenden Geometrie *Parallelbeleuchtung*.

Der Techniker führt seine Schattenkonstruktionen fast ausnahmslos unter Annahme von Parallelbeleuchtung aus, ja er benutzt sogar gewöhnlich eine ganz bestimmte Richtung der Lichtstrahlen, nämlich von links- oben- vorne einfallend und parallel zur Diagonale eines Würfels (daher auch *Diagonalbeleuchtung* genannt), dessen Flächen zu Grund-, Auf- und Kreuzrißebene parallel sind (Fig. 43a).

Grund-, Auf- und Kreuzriß dieses *„technischen Lichtstrahls“* schließen 45^0 mit den Achsenrichtungen ein (Fig. 43b), weshalb er zuweilen auch *„45^0-Lichtstrahl“* genannt wird. Es ist jedoch wohl zu beachten, daß die Neigung α dieser Lichtrichtung gegen die drei Rißebenen von 45^0 verschieden ist. Denn aus Fig. 43a entnimmt man sofort

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Es möge für späteren Gebrauch gleich hier bemerkt werden, daß wegen

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} 30^0$$

die Gleichung

$$\sin\alpha = \operatorname{tg} 30^0$$

besteht.

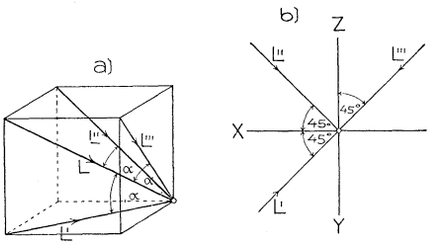


Fig. 43.

Mit Rücksicht auf die praktischen Anwendungen kommen in der Folge bloß die Schattenkonstruktionen für Parallelbeleuchtung zur Besprechung. Auf Vereinfachungen, die bei Verwendung des technischen Lichtstrahls erzielbar sind, soll an den betreffenden Stellen

Hosted by Google

stets hingewiesen werden. Es ist jedoch wichtig, die Schatten für beliebige Lichtrichtungen konstruieren zu können; denn legt man auch ursprünglich 45°-Beleuchtung zugrunde, so hat bei der notwendig werdenden Einführung von Seitenrissen diese Lichtrichtung gegen die neuen Rißebenen keine besondere Lage.

27. Schlagschatten eines Punktes; Licht- und Schattenseite einer Ebene. Den Schlagschatten p_s eines Punktes p auf eine ebene oder krumme Fläche erhält man, wenn man durch p den Lichtstrahl legt und dessen Schnitt p_s mit der Fläche aufsucht (Fig. 44a). Jenachdem die Richtung von p nach p_s mit der (Pfeil-)Richtung des Lichtstrahles übereinstimmt oder ihr entgegengesetzt ist, nennt man p_s den *eigentlichen* oder *uneigentlichen* (*ideellen*) Schatten (Fig. 44b) von p. Letzterer wird durch Umkehrung der Lichtrichtung zum eigentlichen Schatten.

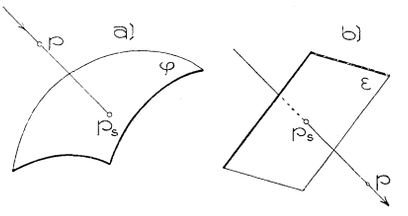


Fig. 44.

Fig. 45 zeigt die nach Nr. 23 ausgeführte Konstruktion des Schlagschattens eines Punktes p auf. die durch zwei Parallele A, B gegebene Ebene.

Jede Ebene ist auf der von den auffallenden Lichtstrahlen getroffenen Seite *beleuchtet* („im Licht"), auf der anderen *beschattet* („im *Eigen-* oder *Selbstschatten*"), besitzt also eine *Licht-* und eine *Schattenseite*. Es taucht hier sofort die Frage auf, *welche Seite einer durch zwei Normalrisse gegebenen Ebene man in jedem der Risse sieht.* Zur Entscheidung dieser Frage legen wir (Fig. 46) durch irgend einen Punkt e von ε den hier auftreffenden Lichthalbstrahl L und den auftreffenden Sehhalbstrahl (Projektionsstrahl) P. Jenachdem L und P auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten von ε (gleichseitig oder ungleichseitig gegen ε) liegen, sieht man in dem zu P gehörigen Normalriß die Licht- oder Schattenseite von ε. Schneidet Ebene $[PL]$ ε in S, so tritt das eine oder andere ein, jenachdem P und L gleichseitig oder ungleichseitig gegen S liegen. Da Ebene $[PL]$ projizierend ist, so ersieht man das Lagenverhältnis aus dem anderen Risse.

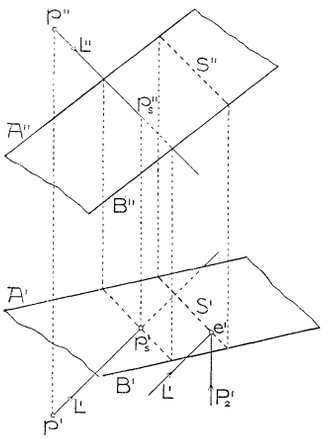


Fig. 45.

Hosted by Google

Um z. B. in Fig. 45 zu entscheiden, ob von Ebene $[AB]$ im Aufriß die Licht- oder Schattenseite sichtbar ist, braucht man nur parallel zu L eine zweitprojizierende Ebene zu legen, den Grundriß ihrer Schnittlinie S ($S'' \parallel L''$) mit $[AB]$ aufzusuchen und nachzusehen, ob für einen beliebigen Punkt e dieses Schnittes L' und P_2' (parallel zu den Ordnungslinien) gleich- oder ungleichseitig gegen S' liegen. Da in unserer Figur L' und P_2' sich auf derselben Seite von S' befinden, wird die Ebene $[AB]$ im Aufriß von der Lichtseite gesehen.

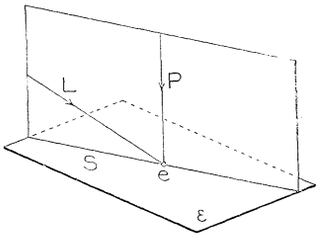


Fig. 46.

Für den Grundriß könnte die analoge Untersuchung vorgenommen werden. Einfacher ist es jedoch, von dem folgenden Satz Gebrauch zu machen:

Satz 1: *Eine Ebene erscheint in zwei zugeordneten Normalrissen von derselben oder von verschiedenen Seiten gesehen, jenachdem die beiden Risse eines Dreiecks dieser Ebene gleich- oder gegensinnig sind.*

Bezeichnen $a'b'c'$ und $a''b''c''$ diese Risse, so nennt man bekanntlich die beiden Dreiecke gleich- oder gegensinnig, jenachdem c' in bezug auf den Halbstrahl $[a'b']$ die gleiche oder die entgegengesetzte Lage hat wie c'' gegenüber dem Halbstrahl $[a''b'']$ (vgl. z. B. Fig. 52).

Zum Beweise des obigen Satzes denke man sich durch den Eckpunkt c des Dreiecks abc die doppelprojizierende, $[abc]$ in S und $[ab]$ in d schneidende Ebene gelegt. Treffen in irgend einem zwischen c und d befindlichen Punkte e von S die Sehhalbstrahlen P_1 und P_2 auf, so erscheint abc in beiden Rissen von derselben oder von verschiedenen Seiten gesehen, jenachdem P_1 und P_2 gegen $[abc]$, mithin auch gegen S gleich- oder ungleichseitig liegen. Da die Ebene $[P_1P_2]$ zur Kreuzrißebene parallel ist, läßt sich das Eintreten des einen oder anderen Falles aus dem Kreuzriß beurteilen, als welcher Fig. 47 gelten kann.

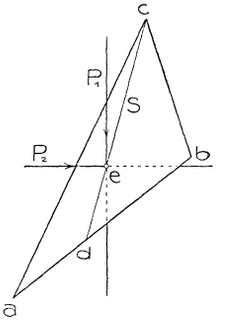


Fig. 47.

Um aber ein Kriterium zu haben, nach dem man aus Auf- und Grundriß urteilen kann, beachte man folgendes. Jenachdem P_1 und P_2 gegen S gleich- oder ungleichseitig liegen, befindet sich S außerhalb oder innerhalb der von den Halbstrahlen P_1, P_2 sowie deren Ergänzungen gebildeten rechten Winkel. Da c und d stets verschiedenen Winkelräumen angehören, so muß im ersten Falle (P_1 und P_2 gleichseitig gegen S), wenn d sich unterhalb c befindet (Beurteilung nach der Richtung von P_1), gleichzeitig d vor c liegen (Beurteilung nach der Richtung von P_2). Im Auf- und Grundriß des Dreiecks folgen also, von oben nach unten gehend, aufeinander $c''d''c'd'$, d. h. c'' und c' haben gegen $[a''b'']$ bzw. $[a'b']$ gleiche Lage oder die Dreiecksrisse sind gleichsinnig. Wenn im zweiten Falle (P_1

Hosted by Google

und P_2 ungleichseitig gegen S) d sich unterhalb c befindet, muß gleichzeitig c vor d liegen. Im Auf- und Grundriß des Dreiecks folgen also, von oben nach unten gehend, aufeinander $c''d''d'c'$, d. h. c'' und c' haben gegen $[a''b'']$ bzw. $[a'b']$ ungleiche Lage oder die Dreiecksrisse sind gegensinnig. Dabei wurde stillschweigend der Aufriß oberhalb des Grundrisses liegend vorausgesetzt.

Daß umgekehrt gleich- oder gegensinnigen Rissen Ansichten von derselben oder von verschiedenen Seiten entsprechen, ist eine logische Folge des eben Bewiesenen.

Da in Fig. 45 Grund- und Aufriß der Ebene $[AB]$ gleichsinnig sind, so erscheint sie im Grundriß ebenfalls von der Lichtseite gesehen.

Von einer zur Lichtrichtung parallelen Ebene sagt man, sie befinde sich auf beiden Seiten im *Streiflicht.*

Ähnlich wie Satz 1 läßt sich auch der folgende, oft verwendbare Satz beweisen:

Satz 2[1]***:*** *Zwei durch paralleles Licht beleuchtete Ebenen sieht man in einem Normalriß dann und nur dann von der gleichen (beleuchteten oder unbeleuchteten) Seite, wenn irgend ein Punkt der einen Ebene und sein Schatten auf die andere Ebene in diesem Riß auf derselben Seite der Schnittlinie beider Ebenen liegen.*

Des kürzeren Ausdruckes halber soll von zwei Scheitelwinkeln gesagt werden, sie bilden eine Winkelfläche[2]), sodaß also zwei sich in g schneidende Geraden A und B nur zwei Winkelflächen bestimmen. Nehmen wir noch zwei in g auftreffende Halbstrahlen P und L derselben Ebene hinzu, so sieht man: *P und L liegen dann und nur dann bezüglich beider Geraden A und B gleichseitig oder bezüglich beider ungleichseitig, wenn sie derselben Winkelfläche von AB angehören.*

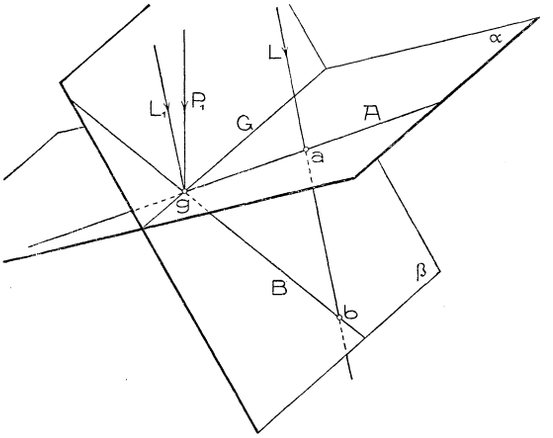


Fig. 48.

Bezeichnen nun (Fig. 48) α und β die gegebenen Ebenen und L einen beliebigen Lichtstrahl, so soll $[\alpha\beta] = G$, $[\alpha L] = a$, $[\beta L] = b$ sein. Zur Beurteilung, welche Seiten von α und β in dem zur Sehstrahlenrichtung P

1) *R. Schüssler,* Orthogonale Achsonometrie, Leipzig u. Berlin 1905, S. 30. Der daselbst gegebene Beweis des Satzes stützt sich auf einen Erfahrungssatz, dessen Voraussetzung bei dem folgenden Beweise vermieden wurde.

2) Die beiden Scheitelwinkelflächen hängen im Unendlichen zusammen.

Hosted by Google

gehörigen Normalriß sichtbar werden, legen wir wie früher durch L die zu P parallele Ebene λ und ermitteln $[\lambda\alpha] = A$, $[\lambda\beta] = B$, $[\lambda G] = g$. Werden ferner die in g auffallenden zu L und P parallelen Halbstrahlen L_1 und P_1 gelegt, so erscheinen in dem Normalrisse beide Ebenen dann und nur dann von derselben Seite gesehen, wenn P_1 und L_1 bezüglich beider Ebenen oder, was dasselbe ist, bezüglich beider Geraden A und B gleichseitig oder bezüglich beider ungleichseitig liegen. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist aber, daß P_1 und L_1 derselben Winkelfläche von AB angehören. Wegen $[ab] \parallel L_1$ kann aber L_1 nur jener Winkelfläche von AB angehören, in der die Strecke ab nicht liegt. Gehören also P_1 und L_1 derselben Winkelfläche an, so wird $[ab]$ von P_1 in einem außerhalb ab liegenden Punkte getroffen und umgekehrt. Für den Normalriß folgt daraus, daß P_1 und L_1 dann und nur dann derselben Winkelfläche von AB angehören, wenn a' und b' auf derselben Seite von g' mithin auch von G' liegen. Da von den Punkten a und b der eine den Schlagschatten des andern bildet, so ist damit Satz 2 bewiesen.

28. Schlagschatten einer Geraden. Unter dem Schlagschatten einer geraden (oder krummen) Linie auf irgend eine Fläche versteht man die Gesamtheit der Schlagschatten der einzelnen Punkte der Linie. Sämtliche durch die Punkte einer Geraden G gehenden Licht-

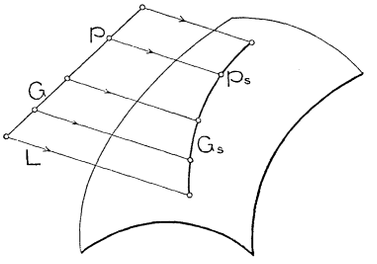


Fig. 49.

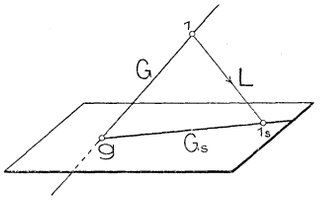


Fig. 50.

strahlen bilden eine zur Lichtrichtung L parallele Ebene, die *Lichtebene* von G. *Der Schnitt dieser Lichtebene mit der Fläche ist der Schlagschatten G_s der Geraden.* Der Schlagschatten einer Geraden auf eine Ebene ist daher wieder eine Gerade (nur für $L \parallel G$ ein Punkt). Man wird sie gewöhnlich als Verbindungslinie der Schlagschatten zweier Punkte der Geraden zeichnen. Oft verwendet man hierbei mit großem Vorteile als den einen Punkt den Spurpunkt von G auf der Ebene, der sein eigener Schatten ist (g in Fig. 50). Insbesondere bei Schattenkonstruktionen an ebenflächigen Körpern, wie sie in der Technik auftreten (vgl. Nr. 32—35), sind diese Spurpunkte häufig unmittelbar gegeben oder sehr einfach aufzufinden.

Aus obiger Bemerkung folgert man unmittelbar, daß z. B. der Schlagschatten einer Geraden auf eine Kugel ein Kreis, auf einen Drehzylinder im allgemeinen eine Ellipse, auf einen Drehkegel eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist.

Hosted by Google

Handelt es sich um die Lösung der *Aufgabe: Den Schlagschatten zu ermitteln, den eine Gerade G auf eine sie kreuzende Gerade H wirft,* so wird man nach obigem durch G die Lichtebene legen und deren Schnitt mit H aufsuchen. Zur Durchführung, etwa mittels Auf- und Kreuzriß (Fig. 51), lege man durch einen beliebigen Punkt 1 von G den Lichtstrahl L_1 und suche den Schnittpunkt h der Ebene $[GL_1]$ mit H, etwa unter Benutzung der drittprojizierenden Ebene durch H nach Nr. 23. Schneidet der Lichtstrahl durch h die Gerade G in g und stimmt die Richtung $g \rightarrow h$ mit der Pfeilrichtung des Lichtstrahls überein, so ist h der Schatten von g also auch von G. Ist die Richtung

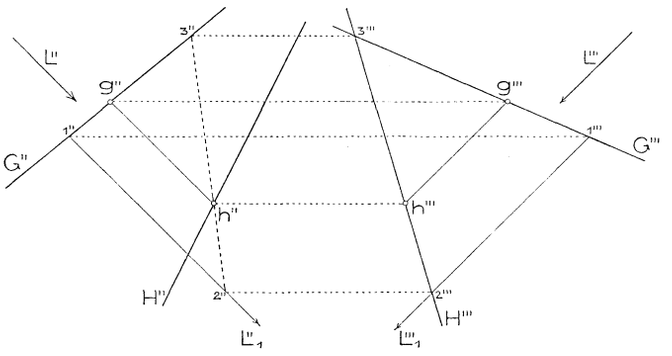


Fig. 51.

$g \rightarrow h$ der Lichtrichtung entgegengesetzt, so wirft H den Schatten g auf G.

Hiermit hat man zugleich die Aufgabe gelöst: *Jene zu L parallele Gerade zu zeichnen, die zwei gegebene windschiefe Geraden G, H schneidet.*

Manchmal ermittelt man den Schlagschatten von G auf H einfacher mittels einer anderen Überlegung. Da nämlich nur ein Lichtstrahl G und H trifft, so müssen die Schlagschatten beider Geraden auf irgend eine Ebene sich in der Verlängerung dieses Lichtstrahls schneiden. Hat man nun die Schlagschatten G_s und H_s auf eine Ebene bereits bestimmt und legt durch Punkt $[G_s H_s]$ den Lichtstrahl, so sind dessen Schnittpunkte mit G und H schon der schattenwerfende und der beschattete Punkt.

Die Konstruktion in Fig. 51 läßt sich auch auf diese Art deuten. Wählt man nämlich die drittprojizierende Ebene durch H als jene, auf die die Schlagschatten der beiden Geraden bestimmt werden, so ist $H_s = H$, $G_s = [23]$ und $[G_s'' H_s''] = h''$ der Aufriß des gesuchten Schlagschattens.

Der Schlagschatten einer Geraden auf einen ebenflächigen Körper ist dessen Schnitt mit der Lichtebene λ durch G. In dem Seitenriß auf eine zu λ normale Ebene stellt sich dieser Schnitt als

Hosted by Google

gerade Linie (Seitenriß von λ) dar. Seine ursprünglichen Normalrisse folgen daraus nach dem II. Kapitel.

Um den Schatten eines Polygons auf eine beliebige Ebene zu erhalten, ermittelt man die Schatten seiner Seiten. Dies kommt in der folgenden Aufgabe zur Anwendung.

29. Aufgabe: *Gegeben ist ein Dreieck abc und ein es schneidendes Parallelogramm defg; man ermittle für die Lichtrichtung L′L″ die an der Figur auftretenden Schatten.*

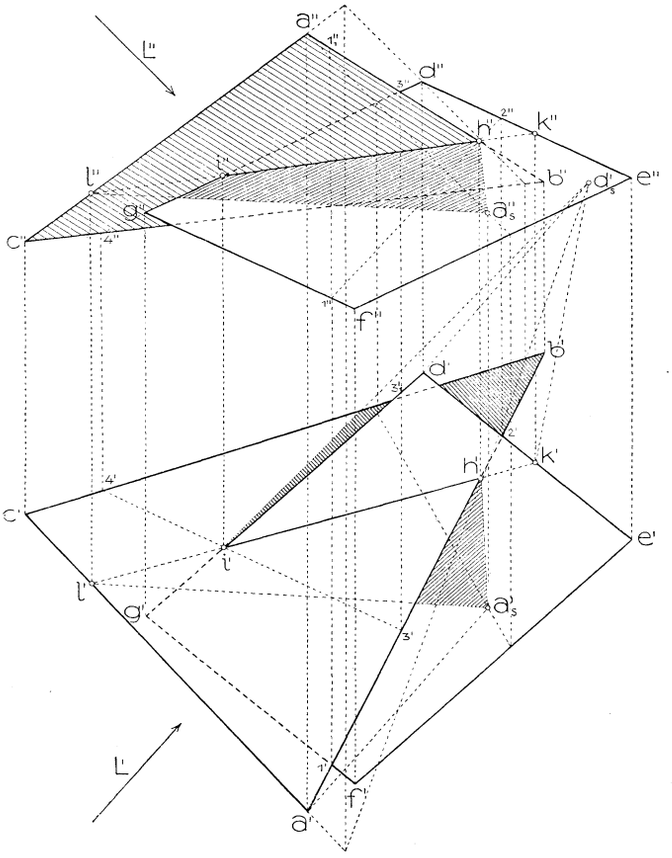


Fig. 52.

Wir suchen zuerst nach Nr. 24 die Schnittlinie $[hi]$ der beiden Polygonebenen. In Fig. 52 ist h mittels einer erstprojizierenden Ebene durch $[ab]$ und i mittels einer zweitprojizierenden Ebene durch $[gd]$ gefunden. Werden die Polygone, wie es für die Schattenkonstruktion notwendig, als undurchsichtig betrachtet, so überdecken sie sich teilweise in jedem der Risse. Zur Beurteilung, was von den sich

Hosted by Google

deckenden Teilen im Aufriß sichtbar oder unsichtbar sei, brauchen wir bloß für eine einzige Überdeckungsstelle der Polygongrenzen (oder deren Verlängerungen) zu wissen, welche Grenze vor der anderen liegt. In Fig. 52 decken sich z. B. $[a''b'']$ und $[d''g'']$ in $3''$. Dieser Punkt ist der Aufriß des Punktes 3 von $[ab]$ und des Punktes 3_1 von $[dg]$; aus deren Grundrissen $3'$ und $3_1'$ ist sofort ersichtlich, daß 3 dem Beschauer näher oder 3_1 hinter 3 liegt. abc verdeckt daher den einen an 3 angrenzenden Teil von dg. Nachdem $[dg]$ in i die Dreiecksebene durchdringt und $3i$ hinter abc liegt, muß ig vor abc liegen. Die weitere Parallelogrammgrenze bleibt so lange vor $[abc]$, bis sie von neuem diese Ebene durchdringt. Da diese Durchdringung in dem nicht überdeckten, $[ih]$ angehörigen Punkte k geschieht, so ist von dem Parallelogrammumfang im Aufriß bloß das Stück $3''i''$ unsichtbar. Was den Aufriß des Dreiecks anlangt, so liegt nach obigem ah vor und daher hb hinter $defg$. Es wird demnach von $a''b''c''$ im Aufriß $h''b''$ und jenes Stück von $b''c''$ unsichtbar zu zeichnen sein, das sich innerhalb $d''e''f''g''$ befindet.

Auf analoge Weise untersuchen wir die Sichtbarkeit im Grundriß. Von den Polygongrenzen überdecken sich z. B. $f'g'$ und $a'b'$ in $1'$. Aus dem Aufriß ersieht man, daß Punkt 1_1 von ab $(1_1' = 1')$ sich oberhalb des Punktes 1 von fg befindet, also die Strecke $g1$ und mithin auch gi vom Dreieck überdeckt wird. Alles übrige folgt aus der Beachtung des Umstandes, daß beim Überschreiten der Schnittlinie $[hi]$ die Grenze des einen Polygons auf eine andere Seite der Ebene des zweiten tritt.

Rücksichtlich der Schattenkonstruktion sei vorerst erwähnt, daß die Schnittpunkte der Seiten des einen Polygons mit der Ebene des andern, als auf $[ih]$ liegend, bekannt sind. Der Schatten von abc auf die Parallelogrammebene läßt sich daher zeichnen, sobald man den Schatten eines seiner Eckpunkte, z. B. a_s, kennt. In Fig. 52 wurde dieser Schatten (nach Nr. 27) mittels der zweitprojizierenden Ebene durch den Lichtstrahl des Punktes a gefunden. Seine Verbindungslinien mit den Spurpunkten h und l von $[ab]$ und $[ac]$ auf der Parallelogrammebene geben die Schatten dieser Geraden. Auf ihnen würden dann in den Lichtstrahlen durch b und c die Schatten b_s und c_s liegen. Ist a_s, wie in Fig. 52, eigentlicher Schatten, so sind b_s und c_s uneigentliche Schatten, brauchen also nicht eingezeichnet zu werden. Da von der Parallelogrammebene, wie nach Nr. 27 unmittelbar erkenntlich, im Grundriß (und mithin auch im Aufriß) die beleuchtete Seite gesehen wird, so sind die Schatten ha_s und la_s, letzterer soweit er auf der Parallelogrammfläche liegt, in beiden Rissen sichtbar. Zufolge Nr. 27, Satz 2 sieht man abc im Aufriß von der unbeleuchteten und zufolge Nr. 27, Satz 1 (oder auch 2) im Grundriß von der beleuchteten Seite.

Hosted by Google

Um schließlich noch den bloß im Grundriß sichtbaren Schatten des Parallelogramms auf das Dreieck zu erhalten, suche man den Schatten d_s von d auf $[abc]$; $[i' d_s']$ enthält die einzige Schattengrenze.

30. Gesetze über Schlagschatten von Geraden. Bei den Schattenkonstruktionen an ebenflächigen Körpern für Parallelbeleuchtung kommen die folgenden, unmittelbar als richtig erkennbaren Gesetze häufig zur Anwendung:

a) *Der Schatten einer Geraden auf eine beliebige Ebene enthält den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene* (Fig. 50).

b) *Der Schatten einer Geraden auf eine zu ihr parallele Ebene ist zur Geraden selbst parallel.*

c) *Der Schatten einer Strecke auf eine zu ihr parallele Ebene ist mit der Strecke parallel und gleich lang.*

Daraus folgt:

Der Schatten einer ebenen Figur auf eine zu ihr parallele Ebene ist eine kongruente Figur.

Insbesondere ist der Schatten eines Kreises K auf eine parallele Ebene ein kongruenter Kreis, dessen Mitte der Schatten der Mitte von K ist.

d) *Parallele Geraden werfen auf eine Ebene parallele Schatten.*

e) *Die Schatten einer Geraden auf zwei beliebige Ebenen treffen sich auf deren Schnittlinie.*

f) *Die Schatten einer Geraden auf parallele Ebenen sind parallel.*

g) *Der Schlagschatten einer zu einer Rißebene normalen Geraden auf jede zur Rißebene parallele Ebene ist zum betreffenden Riß des Lichtstrahls parallel.*

h) *Der Schlagschatten einer zu einer Rißebene normalen Geraden auf eine beliebige Fläche erscheint in dem betreffenden Riß als eine zum Riß des Lichtstrahls parallele Gerade.*

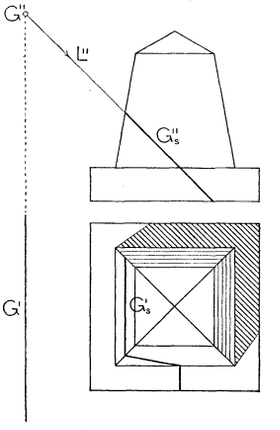


Fig. 53.

Denn steht die Gerade G z. B. zu Π_2 senkrecht, so ist ihre Lichtebene zweitprojizierend und alles in ihr Enthaltene, also auch ihr Schnitt mit irgend einer Fläche (ihr Schlagschatten auf diese Fläche), stellt sich als Gerade parallel L'' dar (Fig. 53).

31. Arten und Darstellung der an Körpern auftretenden Schatten. Zur Erhöhung des bildlichen Eindruckes der Körperrisse

Hosted by Google

zeichnet man oft die an ihnen bei Parallelbeleuchtung auftretenden Schatten ein. Von diesen hat man zwei Arten zu unterscheiden. Trifft ein Lichtstrahl die Oberfläche eines undurchsichtigen Körpers, so ist dieser an der Auftreffstelle *beleuchtet;* in allen Punkten hingegen, wo die Verlängerung des Lichtstrahls die Oberfläche dieses oder eines andern Körpers neuerdings trifft, sind die Körper im Schatten und zwar im *Eigen-* oder *Selbstschatten,* wenn der Lichtstrahl aus dem Innern des Körpers ins Äußere tritt, im *Schlagschatten,* wenn er aus dem Äußern ins Innere tritt.[1]) Durchläuft man also eine zur Lichtrichtung parallele Gerade im Sinne des einfallenden Lichtes, so ist der erste Schnittpunkt mit der Oberfläche eines allseitig begrenzten Körpers beleuchtet, jeder geradzahlige Schnittpunkt im Eigenschatten, jeder fernere ungeradzahlige im Schlagschatten. Dies gilt für ebenflächige wie krummflächige Körper.

Ein im Eigenschatten befindlicher Teil der Oberfläche bleibt es auch nach Entfernung der ihn umgebenden Körperteile, da die ihn treffenden Lichtstrahlen hier immer aus dem Inneren des Körpers ins Äußere treten. Ein im Schlagschatten befindlicher Teil der Oberfläche kann jedoch durch Entfernung anderer Körperteile beleuchtet werden, ist also, für sich allein betrachtet, immer im Licht. *Demnach kann auf einen im Eigenschatten befindlichen Teil der Körperoberfläche nie ein Schlagschatten fallen;* nur sämtliche benachbarten, an und für sich beleuchteten Teile erhalten vielleicht Schlagschatten.

Rücken von den Schnittpunkten der Lichtstrahlen mit der Körperoberfläche für gewisse Lagen zwei aufeinander folgende Punkte in einen zusammen, so sagen wir, der Lichtstrahl *streift* oder *berührt* die Körperoberfläche; letzteres tritt bloß bei krummen Oberflächen auf. Die Gesamtheit der die Körperoberfläche streifenden oder berührenden Lichtstrahlen erfüllen Prismen- oder Zylinderflächen, die Streifpunkte oder Berührungspunkte einen oder mehrere geschlossene Linienzüge, die man *Eigenschattengrenzen* (auch *Lichtgrenzen*[2])) des Körpers nennt. Der Schnitt des Lichtprismas oder Lichtzylinders durch eine Eigenschattengrenze mit der Oberfläche desselben oder eines anderen undurchsichtigen Körpers liefert eine *Schlagschattengrenze; sie ist also immer der Schlagschatten einer Eigenschattengrenze.* Aus diesem Grunde richte man bei der Durchführung einer Schattenkonstruktion sein Augenmerk gewöhnlich zuerst auf die Ermittlung der Eigenschattengrenzen.

In manchen Fällen empfiehlt es sich, zuerst den Schlagschatten aufzusuchen. Die Eigenschattengrenze eines konvexen Polyeders (Nr. 8) z. B. ist unmittelbar gegeben, wenn man die Schlagschatten seiner sämt-

1) *Chr. Wiener,* Lehrb. d. darst. Geom., Bd. 1, S. 390.

2) *K. Rohn* u. *E. Papperitz,* Lehrb. d. darst. Geometrie, I (3. Aufl., Leipzig 1906), S. 128.

Hosted by Google

lichen Eckpunkte auf irgend eine Ebene (etwa Π_1 oder Π_2) kennt. Denn der geschlossene Linienzug, der die äußersten dieser Punkte verbindet, sodaß also die Schattenpunkte entweder innerhalb dieses Linienzuges liegen oder ihm angehören, bildet die Grenze des Schlagschattens des Polyeders auf die Ebene. Jene Polyederkanten, deren Schlagschatten jenem Linienzug angehören, bilden dann die Eigenschattengrenze des Polyeders.

Für eine Pyramide folgt daraus:

Legt man aus dem Schlagschatten der Pyramidenspitze auf die Basisebene die Streifgeraden an die Basis, so gehören die durch die Streifpunkte gehenden Seitenkanten der Eigenschattengrenze der Pyramide an.

Dies gilt auch für Prismen, da man sie als Pyramiden mit unendlichferner Spitze auffassen kann (vgl. Nr. 88).

Die Dunkelheit der im Schatten befindlichen Oberflächenteile wird durch Schraffierung oder durch Auftragen von Tuschlagen mittels des Pinsels (Antuschen, Anlegen) nachgeahmt. Manche Zeichner unterscheiden hierbei Eigen- und Schlagschatten nicht. Wir wollen jedoch stets die im Schlagschatten befindlichen Flächen ungefähr in doppelter Stärke schraffieren oder tuschen wie die Flächen im Eigenschatten, weil hierdurch meist eine plastischere Wirkung erzielt wird, ferner das stete Unterscheiden der beiden Schattenarten für das Verständnis der Konstruktionen wichtig ist.

Auf dem Zeichenblatte ist das Antuschen der rascheren Ausführbarkeit wegen dem Schraffieren vorzuziehen. Hierbei sei empfohlen, zuerst Eigen- und Schlagschattenflächen mit einem entsprechenden Tuschtone und nach dessen Trocknen die Schlagschattenflächen mit demselben Tone nochmals zu überlegen.[1]) Die im Streiflicht befindlichen Flächen mögen wie Eigenschattenflächen behandelt werden.

Eine weitere Erhöhung der Bildwirkung der dargestellten Körper wird erreicht, wenn man die Materialien, aus denen sie hergestellt sind,

1) Vor dem Antuschen ist das an den Rändern aufgeklebte (nicht bloß mit Heftnägeln aufgespannte!) und durch Abreiben mit weichem Gummi gereinigte Zeichenblatt abzuwaschen und, wenn es wieder sehr getrocknet sein sollte, mit einem Schwamme leicht anzufeuchten. Zum Antuschen der Schatten verwende man gewöhnlich eingeriebene chinesische Tusche, hüte sich jedoch die in Fläschchen käufliche Ausziehtusche zum Anlegen zu verwenden, da mit ihr ein gleichmäßiges Anlegen unmöglich ist. Will man die Materialien, aus denen der abgebildete Gegenstand hergestellt gedacht wird, durch Farbtöne kennzeichnen, so trage man diese erst nach der Schattierung auf, damit die Schattenflächen ebenfalls diese Töne erhalten. Näheres über die Herstellung von technischen Zeichnungen und die zweckmäßige Handhabung der Zeichenmaterialien und Zeicheninstrumente findet man in dem Büchlein: *A. zur Megede*, Wie fertigt man technische Zeichnungen?, Berlin 1887 (6. Aufl., 1908).

Hosted by Google

mittels Farbtönen kennzeichnet. Bezüglich der Wahl dieser Farbtöne sei der Anfänger auf die beigefügte Tafel I verwiesen.

32. Schattenkonstruktion für die rechte Hälfte einer durch zwei Konsolen gestützten Platte. Unter Voraussetzung von 45°-Beleuchtung sollen mit Benutzung des Auf- und Kreuzrisses an dem in Fig. 54 dargestellten Körper die Schatten im Aufriß eingezeichnet werden. Der beigegebene Grundriß diene bloß zur besseren Veranschaulichung der Körperformen.

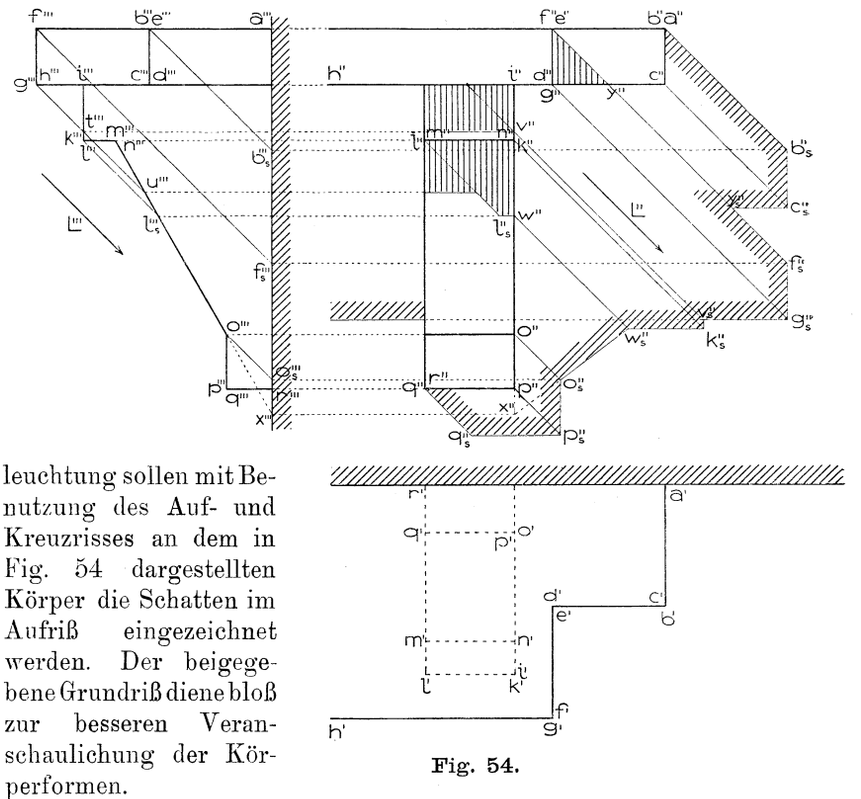


Fig. 54.

Alle Flächen dieses Körpers, mit Ausnahme der vorderen schrägen Konsolfläche, sind zu einer der drei Rißebenen parallel; unter ihnen sind die zu Π_2 parallelen Flächen (sowie die erwähnte Konsolfläche) an und für sich im Licht, einige der zu Π_1 bzw. Π_3 parallelen Flächen (nämlich die unteren und rechten) im Eigenschatten. Da letztere sich im Aufriß als gerade Linien abbilden, so werden im Aufriß nur Schlagschatten auftreten. Deren Grenze wird von der Eigenschattengrenze des Körpers geworfen, die sich aus den Schnittlinien zwischen beleuchteten und unbeleuchteten Flächen zusammensetzt, im vorliegenden Fall also aus den Linienzügen $abc \ldots gh$ und $ik \ldots pqr$ besteht. Hierbei sei besonders darauf hingewiesen, daß in einer Ecke wie g (oder c, k, p) die zu Π_1 bzw. Π_3 normalen Kanten

fg und $[gh]$, nicht aber die zu H_2 normale Kante gd der Eigenschattengrenze angehören. Die Schlagschatten befinden sich einesteils auf dem Körper selbst (Platte und Konsole), andernteils auf der Mauer. Man beginnt vorteilhaft mit der Ermittlung der ersteren.

Die zu H_2 normale Kante ef wirft auf die zu H_2 parallele Fläche $bcde$ (nach Nr. 30, g)) einen zu L'' parallelen Schlagschatten. Der Schlagschatten des Endpunktes f dieser Kante fällt schon, wie aus dem Kreuzriß ersichtlich, außerhalb der Fläche. Ferner wirft die Kante $[gh]$ auf die zu ihr parallele Konsolfläche $[ikl]$ nach Nr. 30, b) einen zu $[gh]$ parallelen Schatten. Im Kreuzriß stellt er sich als der Punkt $t''' = [g''' \parallel L''' \cdot i'''k''']$ dar, im Aufriß als Teil der Ordnungslinie durch t'''. $[gh]$ wirft noch auf die ebenfalls zu ihr parallele schräge Konsolfläche einen Schatten, dessen Kreuzriß $u''' = [g''' \parallel L''' \cdot n'''o''']$ ist und dessen Aufriß der Ordnungslinie dieses Punktes angehört. Auf die schräge Konsolfläche fällt außerdem der Schatten der Kanten ml und lk. Nachdem erstere zu H_2 normal steht, ist der Aufriß ihres Schattens zu L'' parallel; der Schnittpunkt des Lichtstrahles durch l mit der (drittprojizierenden) schrägen Konsolfläche gibt den Grenzpunkt l_s jenes Schlagschattens. Da ein Teil von ml schon von der Platte beschattet ist, wie aus dem Kreuzrisse zu ersehen, so wirft nur der übrig bleibende Teil wirklichen Schlagschatten. Von l_s aus geht parallel zu lk der Schlagschatten dieser Kante bis zur Grenze der Konsolfläche (w).

Jene Teile der oben angegebenen Eigenschattengrenze, deren Schlagschatten nicht auf den Körper selbst fallen, werfen auf die Mauer Schatten. Zu deren Ermittlung ist es aber bei Benutzung der in Nr. 30 angeführten Gesetze nicht nötig, von jedem Eckpunkte der Eigenschattengrenze mittels des Kreuzrisses den Schlagschatten zu konstruieren. Beginnen wir oben, so wirft die zu H_2 senkrechte Kante ab den zu L'' parallelen Schatten $a''b_s''$, dessen Endpunkt mittels des Kreuzrisses gefunden wurde.[1]) Es folgt dann der Schatten $b_s''c_s'' = b''c''$ (vgl. S. 10) der zur Mauer parallelen Kante bc (nach Nr. 30, c)), ferner der Schatten $c_s''y_s'' = c''y''$ des nichtbeschatteten Teiles cy von cd. Da y_s'' gleichzeitig der Schatten eines Punktes von ef ist, so geht von ihm aus der Schatten dieser Kante $\parallel L''$ bis zu dem mittels des Kreuzrisses gefundenen Punkte f_s'' weiter. Analog wie

1) Bei 45°-Beleuchtung läßt sich b_s'' auch ohne Benutzung des Kreuzrisses zeichnen, sobald man den Abstand des Punktes b von der Mauer kennt. Der Unterschied der dritten Tafelabstände zwischen b_s und b, also auch zwischen b_s'' und b'', ist nämlich in diesem Falle gleich dem Mauerabstande des Punktes b. b_s'' liegt also in $[a'' \parallel L'']$ um diesen Abstand rechts von a''. Dasselbe gilt für die andern im folgenden erwähnten Punkte, sodaß der ganze Schatten auch im Aufriß allein konstruiert werden kann, was für das praktische Zeichnen von Wert ist.

Hosted by Google

von b aus folgt jetzt der Schatten $f_s''g_s'' = f''g''$ von fg und der Schatten $[g_s''\ g''h'']$ von $[gh]$, der im Schlagschatten v_s'' des Punktes v von ik endigt, sich aber links von $[m''r'']$ wieder fortsetzt. Ferner schließt sich an v_s'' der Schatten $v_s''k_s'' = v''k''$ von vk und der Schatten $[k_s''\ k''l'']$ von kl. Letzterer endigt im Schatten w_s'' des Punktes w von no. Der nun folgende Schatten der Strecke wo ergibt sich entweder, indem man mittels des Kreuzrisses direkt den Schatten von o oder zuerst den Schnitt x von $[no]$ mit der Mauer im Aufriß aufsucht; in letzterem Falle ist $o_s'' = [o''\ L'' \cdot x''w_s'']$. Endlich sind $o_s''p_s'' = o''p''$, $p_s''q_s'' = p''q''$ und $q_s''r''$ die Schatten von op, pq und qr.

33. Schattenkonstruktion an demselben Körper in gedrehter Stellung. Wir wollen jetzt den in der vorhergehenden Nummer in Parallelstellung vorausgesetzten Körper um eine zu Π_1 senkrechte Achse um 30^0 rechtsum gedreht annehmen (Fig. 55). Die Darstellung des gedrehten Körpers im Grund- und Aufriß geschieht nach Nr. 11, Satz 1. Unter Voraussetzung technischer Beleuchtung befinden sich wieder die horizontalen unteren sowie die zur Mauer und zu Π_1 normalen rechten Flächen im Eigenschatten. Da auch (wie man nach Nr. 27 erkennt) die vordere schräge Konsolfläche beleuchtet ist, so verlaufen die Eigenschattengrenzen wie vorher ($abc \ldots gh$ und $ik \ldots pqr$).

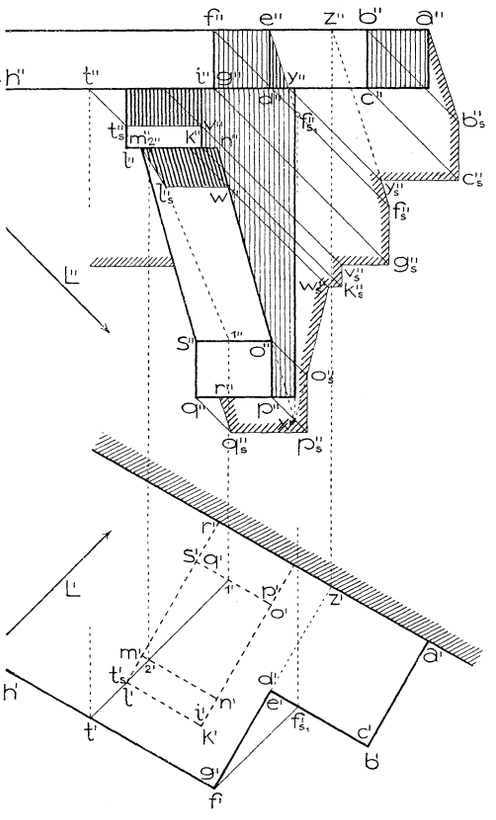


Fig. 55.

Bei der Konstruktion der Schlagschatten beginnen wir wieder mit den an dem Körper selbst (Platte und Konsole) auftretenden. Der Schatten von ef auf die Fläche $bcde$ beginnt in e und geht durch den mittels des Grundrisses erhaltenen Schnittpunkt f_{s_1} des Lichtstrahles durch f mit $[bcd]$. Nur die innerhalb $bcde$ liegende Strecke ey von $[ef_{s_1}]$ ist wirklicher Schatten. $[gh]$ wirft auf die

Hosted by Google

Fläche $[ikl]$ einen zu $[gh]$ parallelen Schatten. Wir suchen von ihm etwa den auf der lotrechten Kante durch l liegenden Punkt t_s. Der diesen Schatten werfende Punkt t von $[gh]$ hat seinen Grundriß auf $[g'h']$ und auf dem Grundriß des durch t_s gehenden Lichtstrahls d. i. auf $[l' \parallel L']$. Damit ist t', t'' und auf $[t'' \parallel L'']$ der Schatten t_s'', also auch der gesuchte Schlagschatten $t_s''v''$ der Kante $[gh]$ gegeben. Endlich werfen noch die Kanten ml und lk Schatten auf die schräge Konsolfläche $mnos$. Sie lassen sich zeichnen, sobald der Schlagschatten l_s von l auf $[mno]$, d. h. der Schnitt des Lichtstrahles durch l mit $[mno]$ gefunden ist. Dies geschieht nach Nr. 23 mit Benutzung der erstprojizierenden Ebene durch den Lichtstrahl, die $[mno]$ in $[12]$ schneidet. $m''l_s''$ ist dann der Aufriß des Schattens von ml und $l_s''w'' \parallel [l''k'']$ der Schatten von lk. Da in Fig. 55 der mit $[l \parallel L]$ in derselben erstprojizierenden Ebene liegende Lichtstrahl durch t die Strecke 12 erst in ihrer Verlängerung über 2 hinaus schneidet, so wirft $[gh]$ keinen Schatten auf die Fläche $mnos$.

Die Konstruktion der Schlagschatten auf die Mauer ist aus der Figur zu ersehen. Sie unterscheidet sich von der in Fig. 54 hauptsächlich nur dadurch, daß die Schatten der Kanten ab, ef, qr jetzt nicht mehr zu L'' sondern zu $[ef_{s_1}]$ parallel sind. Insbesondere sei darauf hingewiesen, daß von q_s'' aus die Schlagschattengrenze nicht nach q'' geht (wie es Anfänger fälschlich oft zeichnen) sondern nach r''.

Die Schattenkonstruktion an diesem gedrehten Körper hätte sich vorteilhaft auch nach der in der nächsten Nummer auseinandergesetzten Methode durchführen lassen.

34. Schattenkonstruktion an einer um eine lotrechte Achse gedrehten Balkenverbindung mittels Auf- und Seitenriß. Auf- und Grundriß der Balkenverbindung in Parallelstellung seien durch die Fig. 56 a und 56 b gegeben. Die Verbindung besteht aus einem horizontalen Balken $\boldsymbol{A}$, der auf einem vertikalen Balken $\boldsymbol{B}$ ruht und durch zwei Streben (Kopfbänder) $\boldsymbol{C}$ und $\boldsymbol{D}$ gestützt ist. Die vier Balken sind auf der Vorderseite bündig (d. h. ihre Vorderflächen liegen in einer Ebene), nicht aber auf der Rückseite. Diese Balkenverbindung werde um eine lotrechte Achse um einen Winkel von 60^0 linksum gedreht gedacht. Der Aufriß des gedrehten Körpers läßt sich auch ohne Benutzung des gedrehten Grundrisses zeichnen. Da nämlich die zu Π_1 senkrechten Entfernungen ungeändert bleiben, hat man bloß die Verkürzungen für die Längs- und Tiefenkanten zu ermitteln, von denen erstere unter 60^0, letztere unter 30^0 gegen Π_2 geneigt sind. Dies geschieht mittels einer Hilfsfigur 56 c. Um z. B. die Verkürzung der zur Längsrichtung parallelen Strecke l zu erhalten, trägt man sie auf der gegen X unter 60^0 geneigten Geraden G von $o = [GX]$ aus auf; die mit dem Zirkel unmittelbar abgreifbare lot-

Hosted by Google

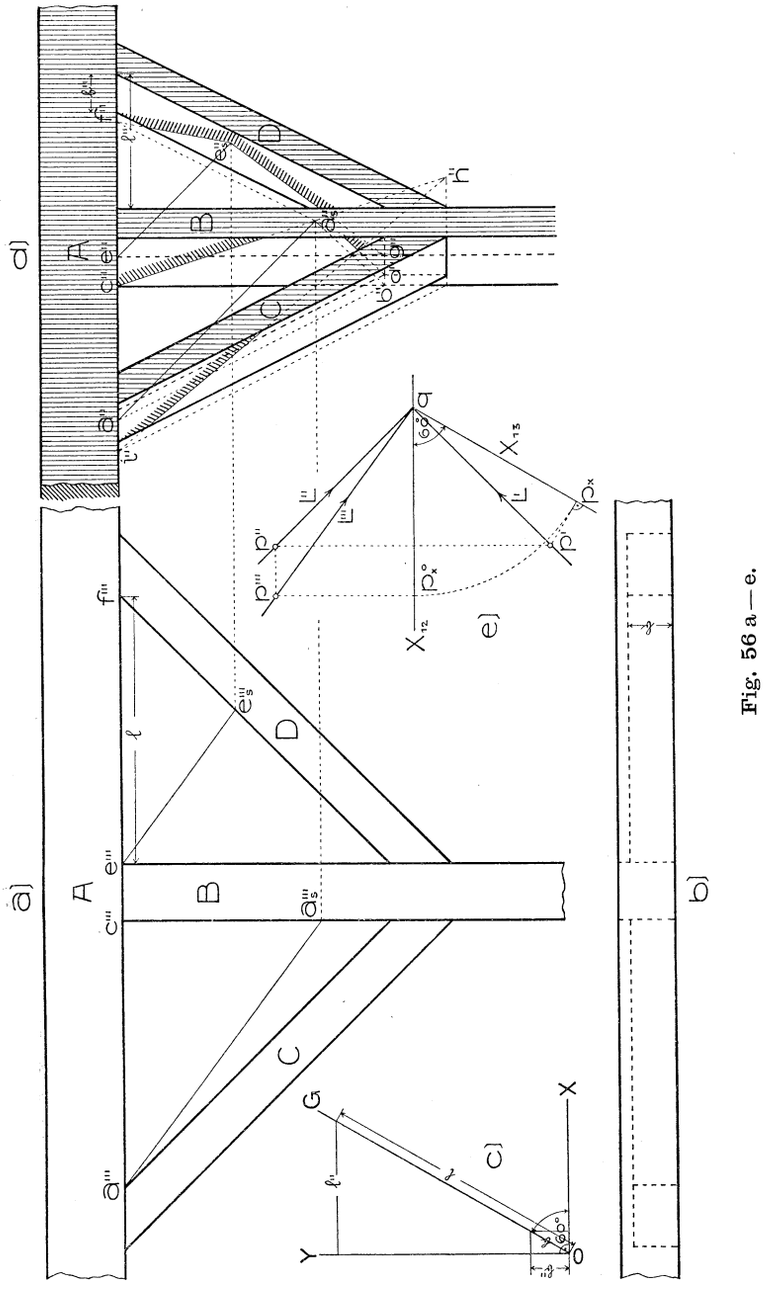


Fig. 56 a — e.

rechte Entfernung ihres Endpunktes von der zu X normalen Geraden Y ist die gesuchte verkürzte Strecke l''. Um die Verkürzung der zur

Tiefenrichtung parallelen Strecke b zu erhalten, trägt man sie ebenfalls von o aus auf G ab und nimmt die lotrechte Entfernung b'' ihres Endpunktes von X in Zirkel. Mit Hilfe der so verkürzten Strecken wurde der Aufriß Fig. 56d konstruiert.

Zur Schattenkonstruktion benutzt man vorteilhaft, außer dem Aufriß, den Seitenriß auf eine zur Vorderfläche der Balkenverbindung parallele Ebene Π_3, die man dann in die Zeichenebene umklappt. Als dieser Seitenriß kann schon Fig. 56a gelten. Die Lichtrichtung wird entweder im Auf- und Seitenriß willkürlich gewählt oder es wird, wenn sie durch L', L'' (in unserer Figur 45°-Beleuchtung) gegeben war, ihr Seitenriß L''' in einer Nebenfigur (56e) ermittelt. Zu diesem Zwecke zieht man durch den auf der Achse X_{12} angenommenen Punkt q L' und L'' sowie $X_{13} = [\Pi_1 \Pi_3]$, wählt auf L einen beliebigen Punkt p und denkt sich aus ihm das Lot auf Π_3 gefällt. Der Grundriß seines Fußpunktes, also des Normalrisses von p auf Π_3, ist dann $p_x = [p' | X_{13} \cdot X_{13}]$. Bei der Umklappung von Π_3 in Π_2 gelangt p_x nach p_x^0 $(\overline{qp_x^0} = \overline{qp_x})$ in X_{12}; senkrecht darüber und zwar in gleicher Höhe mit p'' liegt dann die Umklappung p''' des Normalrisses von p auf Π_3. Da q und q''' sich decken, ist $[qp'''] = L'''$. — Mittels Auf- und Seitenriß lassen sich die Schatten genau so konstruieren wie in Fig. 54 mittels Auf- und Kreuzriß. Denn es wurde schon in Nr. 17 erwähnt, daß auch für zwei in perspektive Lage gebrachte Normalrisse auf nicht-normale Ebenen, wie es obiger Auf- und Seitenriß sind, die vier Voraussetzungen, unter denen die Aufgaben über Lagenbeziehungen gelöst wurden, gültig bleiben.

Die Benennung der Balkenflächen und Kanten als vordere, hintere, rechte und linke sollen von der Parallelstellung her beibehalten werden. Aus Fig. 56e erkennt man, daß die Vorderflächen aller vier Balken sowie die rechte Fläche von $\boldsymbol{B}$ und aus Fig. 56a, daß die rechten Flächen von $\boldsymbol{C}$ und $\boldsymbol{D}$ sich im Eigenschatten befinden; dasselbe gilt für die Unterfläche von $\boldsymbol{A}$. Die hintere untere Kante von $\boldsymbol{A}$ wirft demnach auf die linke Fläche von $\boldsymbol{B}$ einen von c aus gehenden Schlagschatten. In dieser Kante suchen wir jenen Punkt a, der zugleich der erweiterten rechten Fläche von $\boldsymbol{C}$ angehört, indem wir im Aufriß die Schnittlinie dieser Fläche mit der linken Fläche von $\boldsymbol{B}$ bis b'' verlängern und durch diesen Punkt eine Parallele zur Kantenrichtung von $\boldsymbol{C}$ ziehen; sie trifft die Kante von $\boldsymbol{A}$ in a''. Mit Hilfe des Seitenrisses ermittle man nun den Schatten a_s von a auf die erweitert gedachte linke Fläche von $\boldsymbol{B}$. Der auf dieser Fläche befindliche Teil von $[ca_s]$ ist die Grenze des Schlagschattens von $\boldsymbol{A}$ auf $\boldsymbol{B}$.

Jetzt suchen wir den Schatten von $\boldsymbol{C}$ auf $\boldsymbol{B}$. Er wird begrenzt vom Schlagschatten der rechten hinteren Kante von $\boldsymbol{C}$, die $\boldsymbol{B}$ in d trifft. Die hierzu parallele Gerade $[ba]$ würde auf die linke Fläche

Hosted by Google

von $\boldsymbol{B}$ den Schatten $[ba_s]$ werfen; der Schatten jener Kante von $\boldsymbol{C}$ ist also die dazu parallele Gerade durch d.

Die hintere untere Kante von $\boldsymbol{A}$ trifft die linke erweiterte Fläche von $\boldsymbol{D}$ im Punkte f; dessen Aufriß erhält man, wenn man wie oben die Schnittlinie zwischen dieser Fläche und der rechten von $\boldsymbol{B}$ bis zum Schnitt g mit der rechten hinteren Kante dieses Balkens verlängert, durch diesen Punkt eine Parallele zu den Kanten von $\boldsymbol{D}$ zieht und sie mit der in Rede stehenden Kante von $\boldsymbol{A}$ zum Schnitt bringt. Der Schatten dieser Kante auf $\boldsymbol{D}$ verbindet f mit dem Schatten e_s ihres Schnittpunktes e mit der rechten Fläche von $\boldsymbol{B}$; e_s findet man leicht mittels des Seitenrisses. Gleichzeitig bildet ge_s den Schatten der rechten hinteren Kante von $\boldsymbol{B}$ auf $\boldsymbol{D}$.

Schließlich wirft noch die hintere untere Kante von $\boldsymbol{A}$ auf die linke Fläche von $\boldsymbol{C}$ einen Schatten; er geht von dem analog wie früher erhältlichen Schnittpunkte i von Kante und Fläche aus. Ein zweiter Punkt dieses Schattens ergibt sich nach Nr. 30, e), indem man den Schatten ca_s bis zum Schnitt h mit der Schnittlinie der linken Flächen von $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$ verlängert.

Die Schlagschatten wurden in Fig. 56 d wieder nur durch Schraffieren ihrer Grenzen angedeutet.

35. Schatten eines Schornsteinkopfes auf eine Dachfläche. Wir nehmen den am häufigsten auftretenden Fall an, daß die Dachfläche zur Kreuzrißebene senkrecht stehe und der Schornstein sich in Parallelstellung befinde. Bezüglich seiner Form (Fig. 57) sei erwähnt, daß er quadratischen Querschnitt hat, oben durch eine Platte mit aufgesetzter niedriger Pyramide abgeschlossen und in der Mitte durch ein Band verziert ist; die Abzugsöffnungen für den Rauch sollen nicht bloß vorn und hinten, sondern in derselben Größe auch rechts und links angebracht sein (vgl. den für die Schattenkonstruktion überflüssigen Schnitt xy). Der Kreuzriß des Schornsteinkopfes, etwa als Ansicht von rechts, wird demnach genau dieselbe Gestalt wie der Aufriß besitzen; man kann ihn daher als mit dem Aufriß sich deckend annehmen. Die Kreuzrisse der vorderen Punkte a und b fallen dann mit a'' zusammen, der vordere Endpunkt q der unteren äußeren Kante der rechten Rauchöffnung hat seinen Kreuzriß in q''' usw. Der Kreuzriß der Dachfläche ist die Gerade D''', welche mit der Horizontalrichtung einen der Horizontalneigung α des Daches gleichen Winkel einschließt.

Wir setzen technische Lichtrichtung voraus, für welche bei obiger Annahme $L''' \parallel L''$ wird. Die Eigenschattenflächen stellen sich im Aufriß sämtlich als gerade Linien dar. Im Aufriß sichtbare Schlagschatten treten an dem Schornstein nur zwei auf; ihre Grenzen sind die Schlagschatten $a_s u$ und $c_s v$ der Kanten ab und cd. Da die Schatten

Hosted by Google

der Punkte a und c in die lotrechte linke vordere Schornsteinkante fallen, die das Dach in e trifft, so sind sie mittels des Aufrisses allein auffindbar.

Bei der Ermittlung des Schlagschattens des Schornsteins auf das Dach beginnen wir mit dem Schlagschatten der (offenbar der Eigenschattengrenze angehörigen) rechten vorderen lotrechten Kante, die das Dach in f trifft. Wir suchen zu diesem Zwecke mittels des Kreuzrisses den Schlagschatten v_s des Punktes v dieser Kante auf. (Wird durch $v''' = c_s'''$ die Parallele zu $L''' = L''$ gezogen, so ist deren Schnitt mit D''' der Punkt v_s''' und auf dessen Ordnungslinie in $[v''\|L'']$ liegt der Punkt v_s''.) Seine Verbindungslinie mit f ist der gesuchte Schatten. Aus $f''v'' = e'''v'''$, $v''v_s'' = v'''v_s'''$ folgt $f''v_s'' = e'''v_s'''$, d. h. daß der Aufriß des Schlagschattens der Kante fv, mithin auch jeder anderen lotrechten Geraden zu D''' parallel wird. Da dieses Ergebnis für das rasche Zeichnen der so häufig vorkommenden Schatten auf Dachflächen wertvoll ist, wollen wir es als besonderen Satz in der folgenden Form aussprechen:

Satz 1: *Bei 45^0 Beleuchtung*[1]) *erscheint der Schatten einer lotrechten Geraden auf eine zu Π_3 senkrechte Dachfläche im Aufriß als Gerade parallel zum Kreuzriß des Daches (oder parallel zur Dachneigung).*

Diesen Satz als bekannt voraussetzend, hätte man den Schatten der lotrechten Kante durch f unmittelbar zeichnen können. Vom Schatten des Punktes v an wirft (ähnlich wie in den vorherigen Beispielen) Kante cd einen zu ihr parallelen (Nr. 30, b)) Schatten bis d_s, von hier an die lotrechte Kante dg den Schatten d_sg_s ($[d_s''g_s'']\|D'''$), ferner von g_s an die zu Π_2 senkrechte Kante durch g den im Aufriß zu L'' parallelen Schatten bis zum Schnitt mit dem Schatten der lotrechten Kante durch f, der nun bis u_s weitergeht. Wie vorhin werfen jetzt wieder die Kanten ab, bh und hi ($\perp \Pi_2$) Schatten, wobei, wegen $i'' = i'''$, i_s'' in D''' fällt. Nachdem sämtliche Flächen der oberen quadratischen Pyramide beleuchtet sind (der Schatten der Spitze fällt ins Innere der Basis), so verläuft die Eigenschattengrenze weiter längs der Kanten ik, kl, la, über deren Schlagschatten nichts Neues zu sagen ist. Die hintere Schornsteinfläche schneidet das Dach, wie aus dem Kreuzriß ersichtlich, längs der Geraden mn. Der zu D''' parallele Schatten der lotrechten Kante durch m begrenzt den Schlagschatten von la und wird gegen m hin durch den Schlagschatten des Bandes teilweise überdeckt. Von diesem werfen Schatten: Ein Stück der hinteren horizontalen Kante og, die hintere lotrechte Kante op und die zu Π_2 normale Kante pc. In Fig. 57 sind sie, bis auf eine kleine Umgebung des Punktes p_s, durch den Schornstein verdeckt.

1) Der Satz gilt allgemeiner für jede zu Γ_{23} parallele Lichtrichtung.

Hosted by Google

Aus dem Fig. 57 beigegebenen Schnitt xy erkennt man die Möglichkeit, daß durch die vordere und rechte und analog durch die

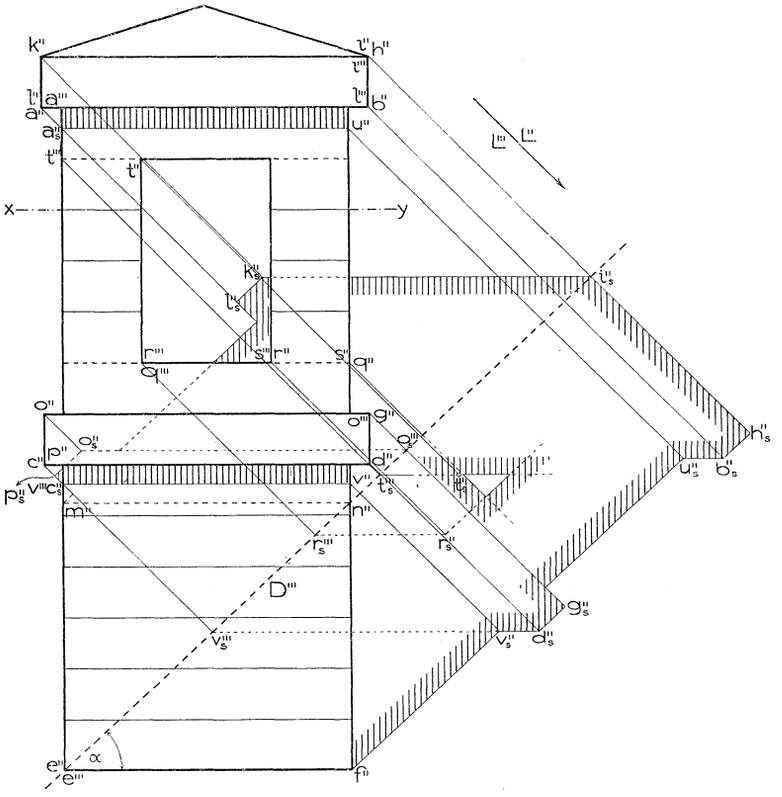


Fig. 57.

linke und hintere Rauchöffnung Licht auf die Dachfläche gelange und inmitten des Schlagschattens Lichtflecke hervorrufe. Der der vorderen und der rechten Öffnung etwa zugehörige Lichtfleck kann nur von den Schlagschatten jener die Öffnungen umrahmenden Kanten begrenzt werden, die der Eigenschattengrenze angehören. Dies sind: Von der vorderen Öffnung die horizontale und vertikale Kante durch t an der Außen-, durch r an der Innenseite; außerdem die horizontale und vertikale Kante durch

s an der rechten Außenseite. Von diesen Kanten zeichnen wir die Schlagschatten, indem wir mittels des Kreuzrisses die Schlagschatten der Punkte t und r aufsuchen. Die durch t_s'' und r_s'' gezogenen Parallelen zu D''' sind dann die Schlagschatten der drei lotrechten Kanten (die der Kanten durch t und s decken sich) im Bilde. Die Schlagschatten der Horizontalkanten durch t und r sind horizontal (Nr. 30, b)) und der der Horizontalkante durch s ist $\| L''$. In Fig. 57 entsteht bloß ein Lichtdreieck; die Schatten von t und r fallen also noch auf den Schornstein selbst.

Das Vorhandensein eines den beiden anderen Öffnungen entsprechenden Lichtflecks sowie eine einfache Konstruktion desselben ergeben sich aus der folgenden allgemeineren Bemerkung. Der Schornstein ist bezüglich der durch seine linke vordere und rechte hintere lotrechte Kante legbaren Ebene symmetrisch. Da die Verbindungslinien symmetrischer Punkte parallel sind und ihre Mitten in der Symmetrieebene liegen, der Schatten dieser Ebene auf die Dachfläche aber eine Gerade ist, deren Aufriß sich mit D''' deckt, so *müssen die Schatten symmetrischer Punkte des Schornsteins schiefsymmetrisch bezüglich D''' liegen.* Die Richtung der Symmetriestrahlen ist z. B. durch $[h_s'' k_s'']$ gegeben. Mittels dieser Bemerkung hätte schon der zweite, von k_s'' bis m'' reichende Teil des Schlagschattens aus dem ersten, von f'' bis h_s'' reichenden Teil ohne Benutzung der Körperrisse unmittelbar gezeichnet werden können. Auf diese Weise ergibt sich auch ein zu dem gefundenen Lichtdreieck bezüglich D''' schief symmetrisches; es wäre in unserer Figur im Aufriß unsichtbar, wurde daher nicht eingezeichnet.

Wäre die den Schlagschatten empfangende Dachfläche nicht $\perp \Pi_3$, so würde man zu dessen Konstruktion statt des Kreuzrisses bequem den Seitenriß auf eine zur Dachfläche normale lotrechte Ebene benutzen (analog wie in Nr. 34) oder mit Hilfe von Grund- und Aufriß operieren. In letzterem Falle handelt es sich um die wiederholte Ermittlung des Schlagschattens eines Punktes auf eine etwa durch zwei zur Firstlinie des Daches parallele horizontale Geraden gegebene Ebene (vgl. Fig. 45); die Lösung vereinfacht sich ein wenig mittels der Bemerkung, daß die erstprojizierenden Ebenen durch die Lichtstrahlen die Dachfläche in parallelen Geraden schneiden.

Übungsaufgaben. Man zeichne Gebäudeteile mit ebenen Begrenzungsflächen, insbesondere Gesimse, Türen und Fenster, Schornsteinköpfe und Dachfenster, ferner Teile von Dachstühlen, Gerüsten (Gerüstböcke) und hölzernen Brücken oder ähnlichen Konstruktionen in ziemlich großem Maßstabe in Parallelstellung oder um eine lotrechte Achse gedreht im Grund- und Aufriß oder Auf- und Kreuzriß und konstruiere dann die bei Parallelbeleuchtung daran auftretenden Schatten.

Hosted by Google

VII. Kapitel.

Affinität.

36. Definition einer allgemeinen Punktverwandtschaft zwischen zwei Ebenen, insbesondere einer Kollineation. Zwischen zwei Normalrissen einer ebenen Figur allgemeiner Lage, ferner zwischen einer ebenen Figur und ihrem Normal-, Schräg- oder Zentralriß oder, was dasselbe ist, zwischen einer ebenen Figur und ihrem Schatten auf eine andere Ebene bestehen Beziehungen der Art, daß jedem Punkte der einen Figur ein einziger Punkt der anderen Figur zugeordnet ist.

Man sagt allgemein von zwei Figuren in derselben oder in verschiedenen Ebenen, es bestehe zwischen ihnen eine *geometrische (Punkt-) Verwandtschaft,* wenn ihre Punkte nach einem bestimmten Gesetze einander stetig zugeordnet sind. Solche Zuordnungsgesetze zwischen zwei Ebenen σ' und σ'' lassen sich mannigfaltige angeben. Wählt man z. B. in jeder der Ebenen ein rechtwinkeliges Koordinatensystem, bezeichnet die Koordinaten der Punkte bezüglich mit $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$ und $\mathfrak{x}''$, $\mathfrak{y}''$ und setzt

$$\mathfrak{x}'' = f_1(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}'),$$
$$\mathfrak{y}'' = f_2(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}'),$$

wo f_1 und f_2 irgend welche (analytischen) Funktionen der in den Klammern stehenden Größen bedeuten, die bloß der Bedingung genügen, daß sich umgekehrt $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{y}'$ auch durch $\mathfrak{x}''$, $\mathfrak{y}''$ ausdrücken lassen, so ordnen diese Gleichungen im allgemeinen jedem Punkte von σ' mehrere, ja selbst unendlich viele diskrete Punkte von σ'' und jedem Punkte von σ'' mehrere Punkte von σ' zu. Sie definieren eine *geometrische Verwandtschaft* zwischen den Punkten von σ' und σ''. Entspricht jedem Punkte der einen Ebene (bis auf gewisse Ausnahmepunkte) stets nur ein Punkt der andern Ebene, so nennt man die Verwandtschaft *ein-eindeutig.* Durch sie werden den Punkten einer Geraden der einen Ebene im allgemeinen immer noch die Punkte einer krummen Linie in der andern Ebene zugeordnet. Entsprechen jedoch den Punkten einer jeden Geraden der einen Ebene die Punkte einer Geraden der andern Ebene, so heißt die Verwandtschaft eine *Kollineation* oder man sagt, die beiden Ebenen (auch Felder oder ebenen Systeme) sind *kollinear verwandt. Die Kollineation ist also eine solche ein-eindeutige Punktverwandtschaft zweier Ebenen*[1]),

1) Auch eine ein-eindeutige Punktverwandtschaft im *Raume,* bei der einer Geraden der einen Figur eine Gerade der andern entspricht, heißt *(räumliche)*

Hosted by Google

in der sämtlichen Geraden der einen Ebene wieder Geraden der andern entsprechen. In zwei kollinearen Ebenen sind demnach auch die Geraden einander ein-eindeutig zugeordnet. Die entsprechenden Punkte auf ihnen bilden *projektive* Punktreihen (Nr. 4).

37. Definition und Eigenschaften affin verwandter Ebenen. Sind alle entsprechenden Punktreihen kollinearer Ebenen insbesondere ähnlich, so sagt man, die beiden Ebenen sind *affin verwandt* oder es besteht zwischen ihnen die Verwandtschaft der *Affinität*[1]). Die Möglichkeit solcher Verwandtschaft wird zugleich mit dem folgenden Satz bewiesen.

Satz 1: *Die affine Verwandtschaft zweier Ebenen ist durch Angabe zweier entsprechenden Dreiecke völlig bestimmt.*

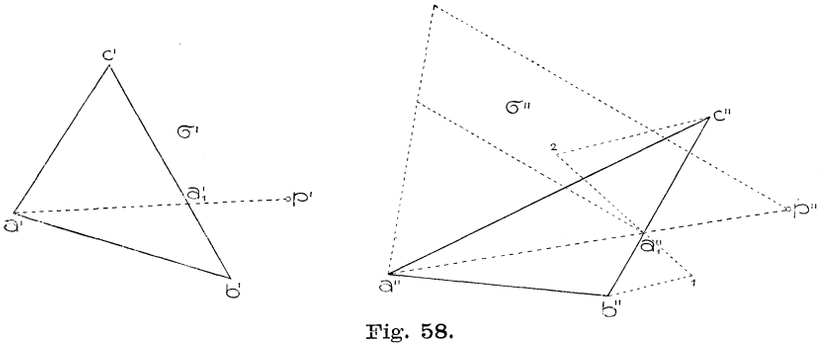


Fig. 58.

Sind nämlich $a'b'c'$ und $a''b''c''$ (Fig. 58) die gegebenen entsprechenden Dreiecke in den Ebenen σ' und σ'', so zeigt man, daß durch obige Forderungen zu jedem Punkt p' von σ' der entsprechende Punkt p'' von σ'' und umgekehrt eindeutig bestimmt und leicht konstruierbar ist. Wir verbinden zu diesem Zwecke p' mit einem der Eckpunkte des Dreiecks $a'b'c'$, etwa mit a' und setzen $[p'a' \cdot b'c'] = a_1'$. Diesem Punkte entspricht in σ'' ein Punkt a_1'' auf $[b''c'']$ derart, daß zufolge der Ähnlichkeit entsprechender Punktreihen $\overline{b''a_1''} : \overline{c''a_1''}$

Kollineation. Die ersten Untersuchungen über Kollineationen stellten *J. V. Poncelet* (vgl. das auf S. 38, Fußn. 1 angeführte Werk) und *A. F. Möbius* (vgl. S. 45, Fußn. 2) an; von letzterem stammt auch der Name. Unter den nichtkollinearen ein-eindeutigen Punktverwandtschaften sind die bekanntesten die *Transformation durch reziproke Radien* (auch *Inversion* genannt) und die von *Möbius* entdeckte *Kreisverwandtschaft* (vgl. Ges. Werke, Bd. 2, Leipzig 1886). Die allgemeinen ein-eindeutigen Punktverwandtschaften in der Ebene hat zuerst *L. Cremona* von 1863 an in zahlreichen Abhandlungen untersucht.

1) Ein Sonderfall von ihr wurde schon von *L. Euler* behandelt (1748), von dem auch der Name stammt. Der allgemeinen Affinität widmete *A. F. Möbius* das 3. Kapitel seines Baryzentrischen Kalküls (1827).

Hosted by Google

$= \overline{b'a_1'} : \overline{c'a_1'}$. Man erhält also a_1'', wenn man etwa durch b'' und c'' Parallele zieht, auf ihnen von diesen Punkten aus bzw. die Strecken $b'a_1'$ und $c'a_1'$ nach derselben Seite oder nach entgegengesetzten Seiten bis 1 und 2 abträgt, jenachdem a_1' außerhalb oder innerhalb $b'c'$ liegt, und [12] mit $[b''c'']$ zum Schnitt bringt. p'' liegt nun auf $[a''a_1'']$ derart, daß $\overline{a''p''} : \overline{a_1''p''} = \overline{a'p'} : \overline{a_1'p'}$ ist; seine Konstruktion ist der von a_1'' analog.

Zwei Dreiecke sind demnach stets affin verwandte Figuren. Erst bei zwei Gruppen von je vier Punkten stellt die Forderung, daß sie affin sein sollen, eine einschränkende Bedingung dar.

Sind die beiden gegebenen entsprechenden Dreiecke ähnlich (insbesondere kongruent), so erkennt man aus obiger Konstruktion, daß dann die beiden Systeme *ähnlich* (insbesondere *kongruent*) werden, indem das eine durch Vergrößerung oder Verkleinerung in bestimmtem Verhältnis in ein mit dem zweiten kongruentes System übergeht. Daraus folgt:

Satz 2: *Gibt es in zwei affinen ebenen Systemen ein Paar entsprechender Dreiecke, die ähnlich oder kongruent sind, so sind die Systeme selbst ähnlich bzw. kongruent.*

Man braucht zum Beweise nur diese Dreiecke als die die Affinität bestimmenden zu betrachten.

Da nach Nr. 4 in ähnlichen Punktreihen die unendlichfernen Punkte einander entsprechen, so werden in zwei affin verwandten Ebenen den unendlichfernen Punkten der einen Ebene unendlichferne Punkte in der anderen oder, anders ausgedrückt, parallelen Geraden der einen Ebene parallele Geraden der anderen entsprechen. Da ferner nach Nr. 4, Satz 1, projektive Reihen mit entsprechenden unendlichfernen Punkten ähnlich sind, so werden zwei kollineare Ebenen, in denen die unendlichfernen Punkte einander entsprechen (oder parallelen Geraden der einen Ebene parallele Geraden der anderen entsprechen), affin sein. Man kann also den Satz aussprechen:

Zwei Ebenen sind dann und nur dann affin verwandt, wenn ihre Punkte einander ein-eindeutig so zugeordnet sind, daß Geraden der einen Ebene Gerade der andern und unendlichfernen Punkten der einen Ebene unendlichferne Punkte der andern entsprechen.

Nachdem sämtliche unendlichfernen Punkte einer Ebene als in einer Geraden liegend angesehen werden dürfen (S. 8), kann man dafür auch kürzer sagen:

Satz 3: *Affinität ist eine Kollineation, in der die unendlichfernen Geraden der beiden Ebenen einander entsprechen.*

Aus der Definition der Affinität folgt sofort:

Hosted by Google

Ist eine Figur mit zwei andern affin verwandt, so sind auch letztere affin verwandt.

Ähnlichkeit und Kongruenz sind Sonderfälle der Affinität (Gleichheit entsprechender Winkel bzw. entsprechender Strecken). Sind also z. B. σ' und σ'' affin, σ'' und σ''' ähnlich, so sind σ' und σ''' affin.

38. Perspektive Lage affiner Figuren derselben Ebene. Zwei lineare Bilder (Nr. 25) einer in allgemeiner Lage befindlichen ebenen Figur sind stets affin verwandt. Denn nach Nr. 21 gehört zu jedem Punkte des einen Bildes (als Bild eines Figurenpunktes) ein Punkt des anderen Bildes, den Punkten einer Geraden des einen Bildes entsprechen die Punkte einer Geraden des anderen Bildes und diese entsprechenden Punktreihen sind ähnlich. Insbesondere gilt dies von zwei perspektiv liegenden Normalrissen einer ebenen Figur. Diese zueinander affinen Bilder einer ebenen Figur haben aber eine besondere gegenseitige Lage, indem die Verbindungslinien entsprechender Punkte (die Ordnungslinien) untereinander parallel sind und die Schnittpunkte entsprechender Geraden (nach Nr. 24) einer festen Geraden angehören; letztere stellt die Bilder der Schnittlinie der Figurenebene mit der Koinzidenzebene dar.

Man sagt nun allgemein: *zwei affine Figuren derselben Ebene befinden sich in perspektiver Lage, oder sind perspektiv-affin, wenn die Verbindungslinien entsprechender Punkte zu einer festen Richtung parallel sind und die Schnittpunkte entsprechender Geraden einer festen Geraden angehören.*

Die feste Richtung heißt *Richtung der Affinitätsstrahlen*, die feste Gerade *Affinitätsachse.*

Jede dieser beiden Forderungen ist übrigens eine Folge der andern. Aus der zweiten Forderung z. B., die sich auch in der Form ausdrücken läßt, daß in jedem Punkte einer Geraden A entsprechende Punkte der beiden affinen Systeme σ' und σ'' sich decken, folgt unmittelbar der Parallelismus der Verbindungslinien entsprechender Punkte. Denn jede solche Verbindungslinie entspricht sich selbst, da ihr Schnitt mit A sich selbst entspricht. Da ferner die Paare entsprechender Punkte auf einer solchen Geraden, etwa $[c'c'']$, ähnliche Punktreihen bilden, so entspricht ihr unendlichferner Punkt u' ebenfalls sich selbst. Der einem beliebigen Punkt x' (außerhalb $[c'c'']$) affin entsprechende Punkt x'' gehört aber dann der Geraden $[x'u']$ an, d. h. $[x'x''] \parallel [c'c'']$.

Zwei perspektiv-affine ebene Systeme sind durch Angabe der Affinitätsachse und zweier (nicht auf ihr liegenden) *entsprechenden Punkte bestimmt.* Denn ist A die Achse, p', p'' das gegebene Paar entsprechender Punkte und wählt man auf A zwei beliebige Punkte

Hosted by Google

b und c, so sind bcp' und bcp'' entsprechende Dreiecke der beiden affinen Systeme σ', σ'', weil jeder Punkt von A sich mit seinem entsprechenden deckt; die Affinität ist also nach Nr. 37, Satz 1 bestimmt. Zu irgend einem Punkt q', diesen zum System σ' gerechnet, findet man den entsprechenden Punkt q'' von σ'', wenn man (Fig. 59, a und b) die $[q'p']$ entsprechende Gerade $[q'p'Ap'']$ mit dem Affinitätsstrahle $[q' \parallel p'p'']$ durch q' zum Schnitt bringt. Wird q' als Punkt von σ'' betrachtet und demgemäß mit r'' bezeichnet, so ist der entsprechende Punkt $r'(=[r''p''Ap' \cdot r''\ p'p''])$ von q'' verschieden. Man hat also bei diesen Konstruktionen stets darauf zu achten, welchem der beiden

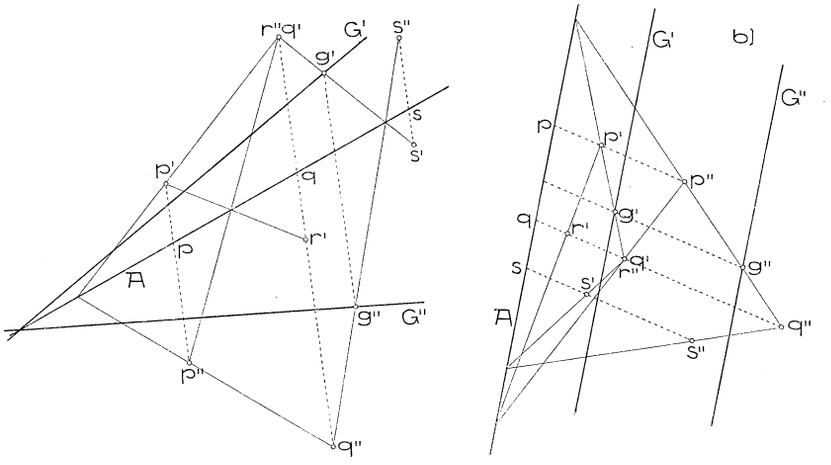


Fig. 59.

Systeme die verwendeten Punkte angehören. Zu einem weiteren Punkte s' kann der entsprechende s'' nun auch mittels des schon gefundenen Punktepaares $q'q''$ oder $r'r''$ gezeichnet werden. Um zu einer Geraden G'' die entsprechende zu erhalten, sucht man zu einem Punkte g'' von G'' den entsprechenden g' und verbindet ihn mit $[G''A]$. Ist $G'' \parallel A$ (vgl. Fig. 59 b), so wird auch $G' \parallel A$. In Fig. 59 b liegen entsprechende Punkte der affinen Figuren stets auf derselben Seite, in Fig. 59 a stets auf verschiedenen Seiten der Affinitätsachse.

Bezeichnen p, q, s die Schnittpunkte der Affinitätsstrahlen durch p', q', s' mit der Affinitätsachse, so ersieht man aus obigen Figuren, daß die Proportionen bestehen:

$$\overline{pp'} : \overline{pp''} = \overline{qq'} : \overline{qq''} = \overline{qr'} : \overline{qr''} = \overline{ss'} : \overline{ss''}.$$

Die in der Richtung der Affinitätsstrahlen gemessenen Abstände entsprechender Punkte von der Affinitätsachse haben daher ein konstantes Verhältnis. Die Richtigkeit der folgenden Umkehrung ist ebenfalls leicht einzusehen:

Hosted by Google

Satz 1: *Ändert man die parallel zu einer festen Richtung gemessenen Abstände der Punkte einer ebenen Figur von einer festen Geraden in einem konstanten Verhältnis, so erhält man eine perspektiv-affine Figur.*

Obige Vervollständigung perspektiv-affiner Figuren kommt in der darstellenden Geometrie häufig zur Anwendung, z. B. wenn man aus einem Normalriß einer ebenen Figur einen zugeordneten konstruieren soll. Sei etwa (Fig. 60) von einem Sechseck $ab\,..\,ef$ der Aufriß und von den Ecken a, b, c der Kreuzriß gegeben und man soll den Kreuzriß der übrigen Ecken oder auch anderer Punkte p, q, ... der Sechseckebene finden, so ermittle man zuerst nach Nr. 24 die Affinitätsachse $A'' = A'''$ ($1 = [a''b'' \cdot a'''b''']$, $2 = [b''c'' \cdot b'''c''']$, $A'' = [12]$) und verfahre dann wie oben, wobei die Richtung der Affinitätsstrahlen sich mit der der Ordnungslinien deckt.[1])

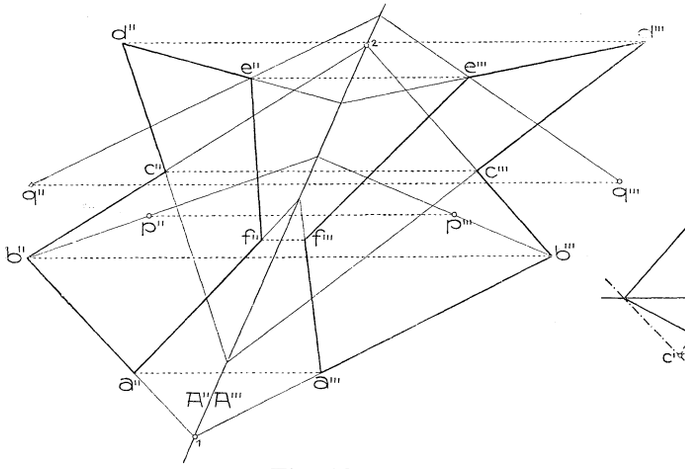


Fig. 60.

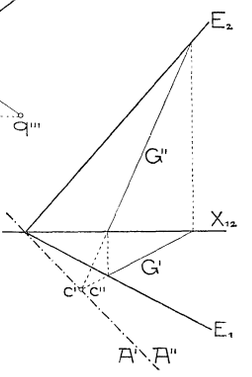


Fig. 61.

Die Benutzung der Affinitätsachse zur Konstruktion eines zweiten Normalrisses bleibt natürlich auch anwendbar, wenn die Figurenebene durch zwei Spuren gegeben ist. Seien z. B. E_1 und E_2 (Fig. 61) die Spuren der Ebene ε auf Π_1 und Π_2, so nehme man eine beliebige Gerade G in ε an und suche deren Schnitt $c (c' = c'' = [G'G''])$ mit der Koinzidenzebene Γ_{12}; dann ist $[E_1 E_2 c'] = A' = A''$ die Affinitätsachse.

1) Von der Affinitätsachse zweier Normalrisse eines ebenen Systems handelt wohl zuerst *Brasseur*, Mémoire sur une nouvelle méthode d'application de la géométrie descriptive à la recherche des propriétés de l'étendue, Mém. Ac. Belg. (1853). Weitere historische Notizen hierzu bei *W. Fiedler*, Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage, I. T., 4. Aufl., Leipzig 1904, S. 415.

Hosted by Google

Der Normalriß einer ebenen Figur und ihres Schlagschattens (für Parallelbeleuchtung) auf eine beliebige Ebene sind gleichfalls perspektiv-affin; das Bild der Schnittlinie zwischen Figurenebene und schattenempfangender Ebene ist die Affinitätsachse.

Einen Sonderfall der perspektiven Affinität bildet die schiefe und insbesondere die orthogonale Symmetrie bezüglich einer Achse.[1]) Für eine zur Symmetrieebene Σ_{12} parallele ebene Figur z. B. sind Auf- und Grundriß bezüglich ihrer Affinitätsachse orthogonal-symmetrisch; *die beiden Risse einer solchen Figur sind also stets kongruent.* Auch zwei durch Schiebung auseinander hervorgehende Figuren sind als perspektiv-affin zu betrachten; ihre Affinitätsachse liegt unendlichfern. *Auf- und Grundriß einer zu Γ_{12} parallelen ebenen Figur stehen in dieser Beziehung, sind also gleichfalls kongruent.*

39. Perspektive Vereinigung zweier beliebigen ebenen affinen Figuren und Konstruktion ihrer entsprechenden rechten Winkel. Man wird vermuten, daß zwei beliebige affine ebene Systeme sich stets in perspektive Lage bringen lassen, d. h. daß sich stets ein mit dem zweiten System kongruentes zeichnen läßt, das gegen das erste perspektiv liegt. Soll diese Vermutung richtig sein, so müssen in zwei affinen Systemen immer entsprechende gleichlange Strecken (und damit kongruente Punktreihen) existieren, durch deren Aufeinanderlegen eben die Affinitätsachse hervorgeht.

Vorerst läßt sich (und zwar auf unendlich viele Arten) ein mit dem zweiten System ähnliches zeichnen, das gegen das erste perspektiv liegt. Sind nämlich (Fig. 62) $a'a''$, $b'b''$ zwei Paare entsprechender Punkte der affinen Systeme σ', σ'', so lege man das zu σ'' ähnliche, im Verhältnis $\overline{a'b'} : \overline{a''b''}$ geänderte System $\bar{\sigma}$ (worin also die $a''b''$ entsprechende Strecke $\bar{a}\bar{b}$ mit $a'b'$ gleiche Länge hat) so auf σ', daß $\bar{a}$ auf a' und $\bar{b}$ auf b' fällt. Wegen der Kongruenz der Punktreihen $a'b'\ldots$ und $\bar{a}\bar{b}\ldots$ deckt sich jetzt jeder Punkt von $[a'b']$ mit seinem entsprechenden in $\bar{\sigma}$. Die beiden Systeme σ', $\bar{\sigma}$ liegen also perspektiv und haben $[a'b']$ zur Affinitätsachse (Nr. 38).

Ist jetzt (Fig. 62) $c'c''$ ein drittes Paar entsprechender Punkte von σ' und σ'' und $\bar{c}$ der zugehörige Punkt in $\bar{\sigma}$, so sind die Verbindungsstrecken irgend eines Punktes von $[a'b']$ mit c' und $\bar{c}$ entsprechende Strecken von σ' und $\bar{\sigma}$. Unter diesen Paaren entsprechender Strecken gibt es im allgemeinen zwei, deren Längen in einem gegebenen Verhältnis stehen. Denn der Ort aller Punkte x, deren Entfernungen von c' und $\bar{c}$ in einem konstanten Verhältnis stehen, ist ein Kreis, welcher die die Strecke $c'\bar{c}$ von innen und außen in dem

1) Bezüglich des anderen Sonderfalles, in dem die Affinitätsstrahlen zur Affinitätsachse parallel laufen, vgl. *W. Fiedler,* a. a. O. S. 113 unten.

Hosted by Google

gegebenen Verhältnis teilenden Punkte d, e zu Gegenpunkten hat. Die Schnittpunkte x_1', x_2' dieses Kreises mit $[a'b']$ geben, mit c' und $\bar{c}$ verbunden, die gesuchten Streckenpaare. Wählen wir insbesondere das obige Verhältnis $\overline{xc'} : \overline{x\bar{c}} = \overline{a''b''} : \overline{a'b'} = l'' : l'$ und konstruieren die Punkte x_1', x_2', so hat die der Strecke $x_1'c'$ in σ'' entsprechende Strecke $x_1''c''$ nach dem eingangs Erwähnten die Länge $\overline{x_1''c''} = \overline{x_1'\bar{c}} \cdot \frac{\overline{a''b''}}{\overline{a'b'}}$, welche nach der letzten Proportion gleich $\overline{x_1'c'}$ ist. Desgleichen haben

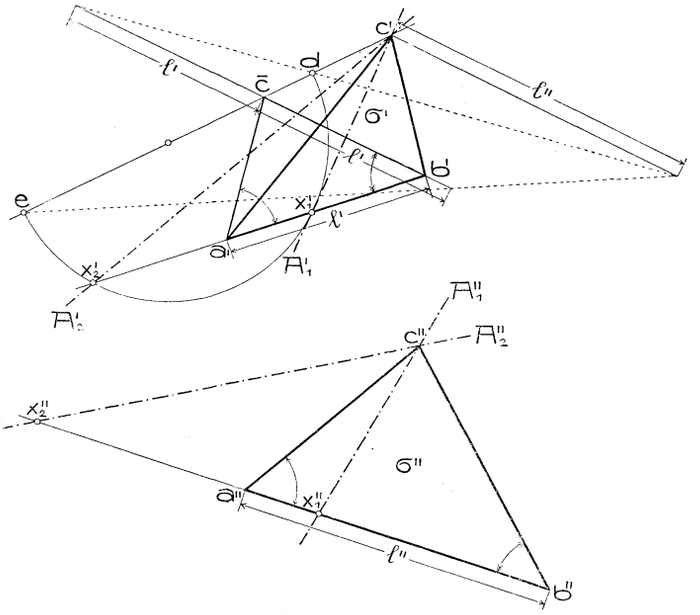


Fig. 62.

die entsprechenden Strecken $x_2'c'$ und $x_2''c''$ gleiche Längen. Legt man also σ'' so auf σ', daß sich $x_1''c''$ mit $x_1'c'$ oder $x_2''c''$ mit $x_2'c'$ deckt, so befinden sich die Systeme in perspektiver Lage. Es besteht demnach

Satz 1: *Man kann zwei affine Systeme im allgemeinen auf zwei Arten so in perspektive Lage bringen, daß ein ausgewählter Punkt (c') mit seinem entsprechenden (c'') zusammenfällt.*

Schneidet der Kreis über ed die Gerade $[a'b']$ in zwei zusammenfallenden oder in konjugiert imaginären Punkten, so ist die perspektive Vereinigung der Systeme nur auf eine Art bzw. auf reellem Wege gar nicht möglich.

Wir beweisen ferner den Satz:

In zwei perspektiv-affinen (nicht orthogonal-symmetrischen) Systemen

Hosted by Google

gibt es durch jeden Punkt des einen Systems einen einzigen rechten Winkel, dem im andern System wieder ein rechter Winkel entspricht.

Denn der einzige Kreis durch zwei entsprechende Punkte p', p'' (vgl. Fig. 63, a oder b), dessen Mitte m der Affinitätsachse A angehört (m = Schnitt von A mit der Symmetralen von p', p''), schneidet A in den Punkten r und s, sodaß die rechten Winkel $rp's$ und $rp''s$ einander entsprechen. Nur in einer orthogonalen Symmetrie entspricht jedem rechten Winkel durch p' auch ein rechter Winkel durch p''.

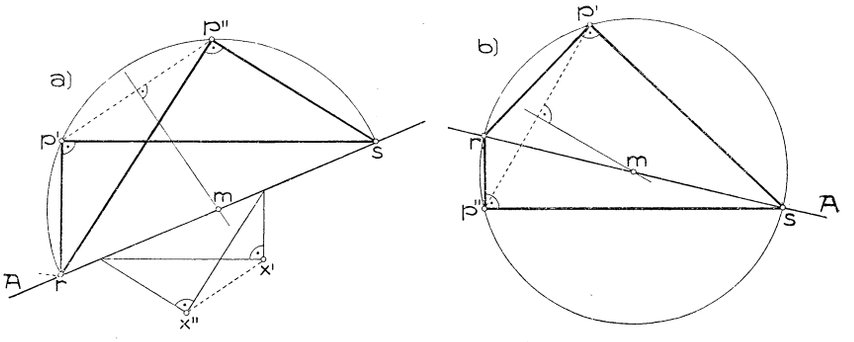


Fig. 63.

Da den durch einen beliebigen Punkt x' gelegten Geraden $[x' \| rp']$ und $[x' \; sp']$ von σ' die Geraden $[x'' \| rp'']$ und $[x'' \| sp'']$ von σ'' entsprechen und da je zwei affine Systeme nach ähnlicher Änderung des einen in perspektive Lage gebracht werden können, ferner in ähnlichen Systemen entsprechende Winkel gleich sind, so besteht unabhängig von der Möglichkeit der perspektiven Vereinigung zweier affinen Systeme der allgemeine

Satz 2: *Sind zwei ebene Systeme affin verwandt, so gibt es im allgemeinen ein Paar aufeinander senkrechter Richtungen in dem einen System, dem in dem andern wieder aufeinander senkrechte Richtungen entsprechen. Gibt es zwei solche Richtungspaare, so gibt es deren unendlich viele und die Systeme sind ähnlich oder kongruent.*

Man nennt diese Richtungen *„die entsprechenden rechten Winkel“*.

Weil zwei lineare Bilder einer ebenen Figur stets affin verwandt sind, so gibt es durch jeden Punkt dieser Figur zwei Strahlen, die sich in beiden Bildern als normale Geraden darstellen. Man konstruiert sie unter Benutzung der Schnittlinie der Figurenebene mit der Koinzidenzebene auf die eben gezeigte Weise.

Um für zwei durch entsprechende Dreiecke $a'b'c'$ und $a''b''c''$ bestimmte nicht perspektiv-affine Systeme σ' und σ'' die entsprechenden rechten Winkel zu erhalten, zeichne man ein mit σ'' ähnliches

Hosted by Google

System $\bar{\sigma}$, das gegen σ' perspektiv liegt, indem man etwa über der Seite $a'b'$ von $a'b'c'$ (Fig. 64) $a'b'\bar{c} \sim a''b''c''$ macht. c' und $\bar{c}$ sind dann entsprechende Punkte von σ' und $\bar{\sigma}$, deren Achse $A = [a'b']$ ist. Mittels des Kreises durch c' und $\bar{c}$ aus m auf A konstruiert man die entsprechenden rechten Winkel $rc's$ und $r\bar{c}s$ von σ' und $\bar{\sigma}$. Sucht man nun in den durch $a'a''$, $b'b''$ bestimmten ähnlichen Punktreihen

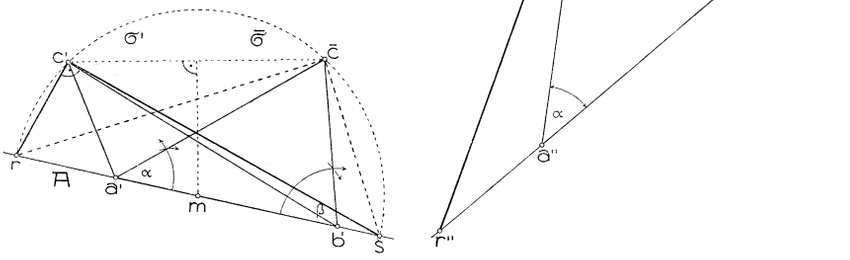


Fig. 64.

zu r und s die entsprechenden Punkte r'' und s'', so sind $rc's$ und $r''c''s''$ die entsprechenden rechten Winkel von σ' und σ''. (Am einfachsten gelangt man wohl zu Winkel $r''c''s''$, wenn man die Figur $\bar{c}ra'b's$ kongruent in σ'' überträgt, sodaß $\bar{c}$ auf c'', a' und b' auf $[c''a'']$ bzw. $[c''b'']$ zu liegen kommen.)

Von dieser Konstruktion werden wir in der Folge einige Anwendungen machen.

VIII. Kapitel.

Aufgaben über Maßverhältnisse.

40. Länge und Tafelneigungen einer durch zugeordnete Normalrisse gegebenen Strecke. $a'b'$ sei (Fig. 65) der Normalriß der Strecke ab auf die Ebene II. Wenn ab mit II, d. h. mit $[a'b']$ einen von Null verschiedenen Winkel α einschließt, so ist der Normalriß stets kürzer als die Strecke selbst (Kathete < Hypotenuse). Nur für $[ab] \parallel II$ ist $\overline{a'b'} = l' = \overline{ab} = l$.

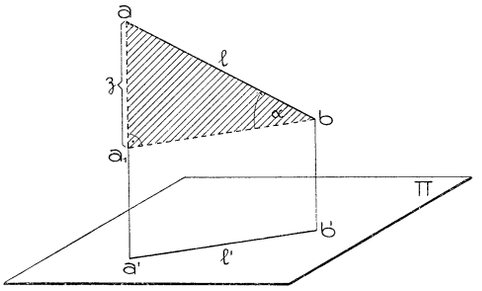


Fig. 65.

Hosted by Google

Aus Fig. 65 folgt unmittelbar

$$l' = l \cos \alpha.$$

$\frac{l'}{l} = \cos \alpha$ heißt das *Verkürzungsverhältnis* der Strecke ab.

Um die Länge einer durch zwei Normalrisse gegebenen Strecke ab zu erhalten, hat man nur nötig, das bei a_1 rechtwinkelige Dreieck $a_1 b a$ in seiner wirklichen Gestalt, d. h. *ein rechtwinkeliges Dreieck zu zeichnen, dessen eine Kathete der eine Normalriß* (l') *der Strecke und dessen andere Kathete die Differenz* (ι) *der zugehörigen Tafelabstände der Streckenendpunkte ist. Die Hypotenuse gibt die Länge* (l) *der Strecke.*

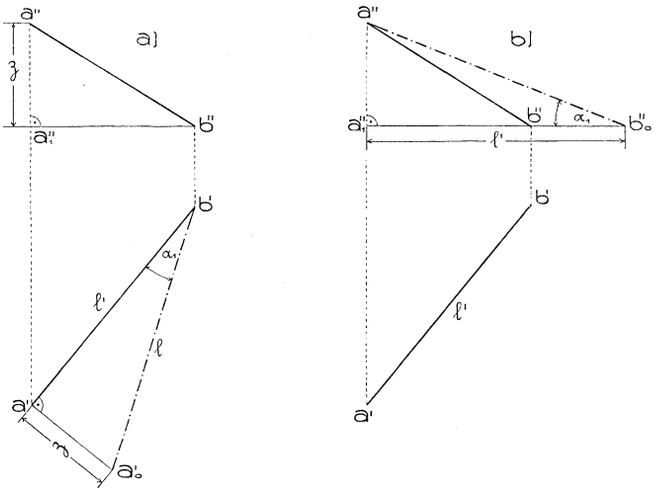


Fig. 66.

Fig. 66, a und b zeigen zwei einfache Ausführungen der Aufgabe für den Fall, als die Strecke durch Auf- und Grundriß gegeben ist. Diese Konstruktionen werden unmittelbar anschaulich, wenn man sich $a_1 b a$ entweder um $[a_1 b]$ parallel zu Π_1 (Fig. 66 a) oder um $[a_1 a]$ parallel zu Π_2 gedreht denkt (Fig. 66 b). Die zweite Konstruktion ist rascher ausführbar, weil das Zeichnen des rechten Winkels bei a' in Fig. 66 a wegfällt, soll daher gewöhnlich verwendet werden. Beide Konstruktionen liefern zugleich die erste Tafelneigung α_1 der Geraden $[ab]$.

Eben so gut kann man zur Ermittlung der Länge das rechtwinkelige Dreieck verwenden, dessen eine Kathete der Aufriß der Strecke und dessen andere Kathete der Unterschied der zweiten Tafelabstände der Streckenendpunkte (das η der Strecke) ist. Hierbei gelangt man auch zur zweiten Tafelneigung der Strecke. Die Konstruktion ist natürlich ebenso für Auf- und Kreuzriß (Fig. 67) oder all-

Hosted by Google

gemein für zwei zugeordnete Normalrisse in perspektiver Lage ausführbar. Fig. 67 zeigt zugleich das Abtragen einer gegebenen Strecke l_1 auf $[ab]$ von b aus, indem auf dem Kreuzriß $[b'''a^0]$ ihrer $\| \Pi_3$ gedrehten Lage $\overline{b'''c^0} = l_1$ gemacht und nun c^0 zurückgedreht wird.

Ferner ermittelt man auf dieselbe Art die (wahre) Gestalt ebener, zu einer Rißebene senkrechter Figuren. Die Ermittlung der Gestalt einer ebenen Figur in allgemeiner Lage wird mittels eines Seitenrisses auf diesen Sonderfall zurückgeführt.

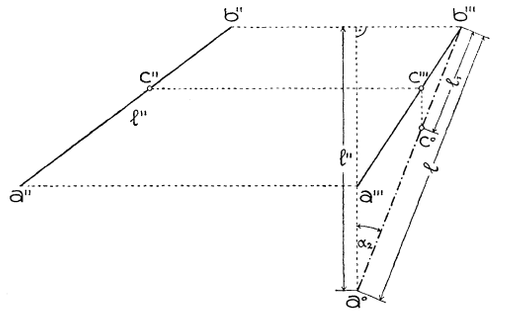


Fig. 67.

Als Anwendung wurde in Fig. 68 die Gestalt des Normalschnittes 12..5 eines fünfseitigen schiefliegenden Balkens mit der horizontalen Grundfläche $ab\,..\,e$ ermittelt, wie solche als *Gratsparren* an Dachstühlen auftreten. Im Seitenriß auf eine zu den Balkenkanten parallele erstprojizierende Ebene Π_3 erscheint der Normalschnitt als Strecke $1'''3'''$ senkrecht zur Kantenrichtung. Aus ihm leitet man auch unmittelbar seinen Grund- und Aufriß ab. Dreht man den Normalschnitt zu Π_3 parallel oder, was auf dasselbe hinauskommt, betrachtet man seine Ebene als neue Seitenrißebene Π_4, so gibt der vierte Riß 1^{IV}, 2^{IV}.. 5^{IV} die Gestalt des Normalschnittes an. Er bestimmt die Abmessungen jenes Balkens von rechteckigem Querschnitt, aus dem der Gratsparren herausgeschnitten werden kann.

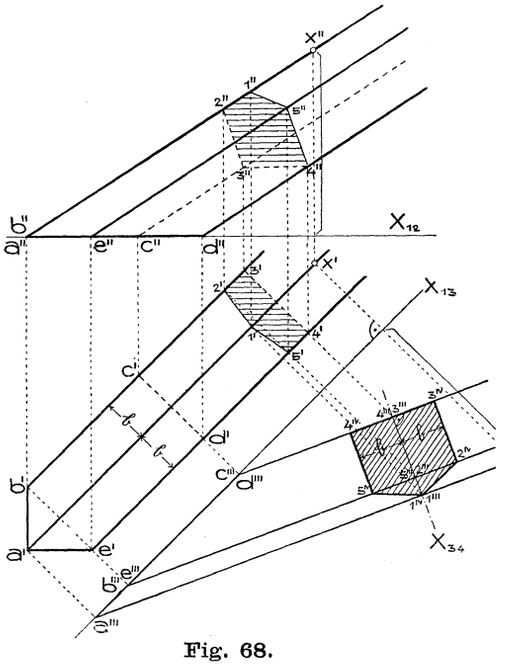


Fig. 68.

41. Durch einen Punkt p eine Gerade G mit den Tafelneigungen γ_1 und γ_2 zu legen. Die Winkel γ_1 und γ_2 dürfen will-

Hosted by Google

kürlich gewählt werden, nur muß $\gamma_1 + \gamma_2 \leqq 90^0$ sein. Denn aus Fig. 69 ersieht man:

$$\gamma_1 + \beta_2 = 90^0, \quad \beta_2 \geqq \gamma_2,$$

also

$$\gamma_1 + \gamma_2 \leqq 90^0.$$

Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn $\beta_2 = \gamma_2$ wird, d. h. G in einer doppelprojizierenden Ebene (Nr. 19) liegt.

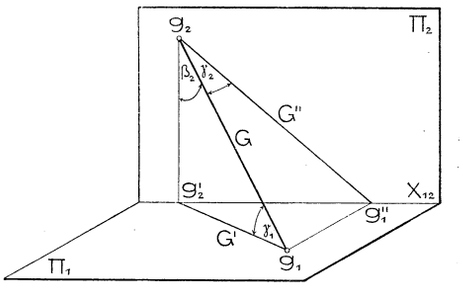


Fig. 69.

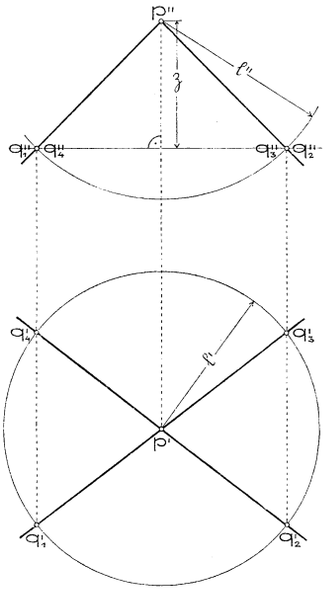
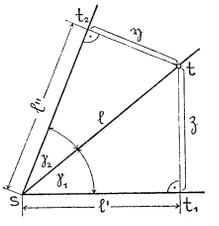


Fig. 70.

Um zu einer Lösung der gestellten Aufgabe zu gelangen, denke man sich die Gerade G gefunden und auf ihr von p aus eine beliebige Strecke l etwa nach unten hin bis q abgetragen. Die Längen l′ und l″ der beiden Risse von pq sowie das ϑ und ψ dieser Strecke



(Nr. 14) lassen sich aus den gegebenen Tafelneigungen γ_1, γ_2 leicht auffinden. Zeichnet man nämlich (Fig. 70) γ_1 und γ_2 gleich so, daß sie den Scheitel s und einen Schenkel gemeinsam haben, wählt auf letzterem t beliebig und projiziert diesen Punkt orthogonal auf die beiden anderen Schenkel nach t_1 und t_2, so ist, $st = l$ gesetzt, (nach Nr. 40) $st_1 = l'$, $st_2 = l''$, $t_1t = \vartheta$ und $t_2t = \psi$. Mittels dieser Strecken findet man die Risse des Punktes q wie folgt. Man trägt auf $[p''p']$ von p'' aus nach abwärts das Stück ϑ auf und zieht durch seinen Endpunkt eine Horizontale. Auf ihr liegt q'' derart, daß $\overline{q''p''} = l''$ ist. Der Kreis (p'', l'') schneidet daher auf jener Horizontalen zwei Lagen von q'' aus, die stets reell sein müssen. (Denn wegen $\gamma_2 < 90^0 - \gamma_1$ ist $l \cos\gamma_2 > l \cos(90^0 - \gamma_1)$ oder $l'' > \vartheta$.) Ihre Grundrisse gehören dem Kreis (p', l') oder auch jenen Horizontalen an, die von p' die

Hosted by Google

Entfernung η haben. Daraus folgt, daß es vier Lagen (q_1, q_2, q_3, q_4) für q, mithin auch vier den Bedingungen der Aufgabe genügende Geraden G gibt. In den Rissen decken sich je zwei der Geraden.

42. Über Normalrisse eines rechten Winkels. Zur Behandlung der weiteren Aufgaben über Maßverhältnisse brauchen wir den wichtigen Hilfssatz

Satz 1: *Der Normalriß eines rechten Winkels, mit einem zur Rißebene parallelen Schenkel, ist wieder ein rechter Winkel.*

A, B seien die Schenkel, s der Scheitel des rechten Winkels, Π_1 die Rißebene und A', B', s' die Normalrisse dieser Elemente (Fig. 71). Nach Voraussetzung ist $A \perp B$, $A \parallel A'$ und $[ss'] \perp \Pi_1$. Aus der letzten Tatsache folgt $[ss'] \perp A'$ oder, wegen $A \parallel A'$, $A \perp [ss']$. Da nun A zu B und $[ss']$ senkrecht steht, steht A zur Ebene $[B[ss']]$, also auch zu der in dieser Ebene liegenden Geraden B' senkrecht. Aus $A \perp B'$ folgt aber $A' \perp B'$.

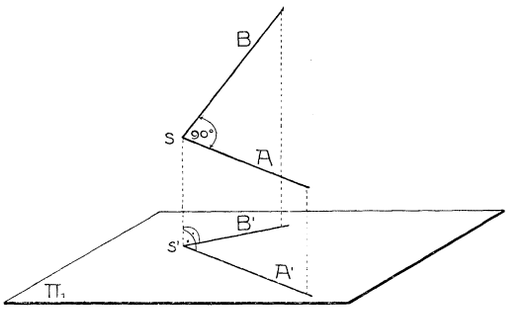


Fig. 71.

Von diesem Satze gilt auch die Umkehrung:

Satz 2: *Ist der Normalriß eines Winkels, mit einem zur Rißebene parallele Schenkel, ein rechter, so ist der Winkel selbst ein rechter.*

Denn (Fig. 71) aus $A' \perp B'$ und $A' \perp [ss']$ folgt $A' \perp [sB']$ oder, wegen $A \parallel A'$, $A \perp [sB']$. Weil nun B der Ebene $[sB']$ angehört, ist auch $A \perp B$.

43. Haupt- und Fallinien von Ebenen. Infolge des Weglassens der Rißachsen fällt auch die Benutzung der Spuren von Ebenen weg (Nr. 15). An ihre Stelle treten in den Konstruktionen die zu den Spuren oder Rißebenen parallelen Geraden der Ebenen, die man *Spurparallelen* oder *Hauptlinien*[1]) nennt. Die bzw. zu Π_1, Π_2, Π_3, ... parallelen Hauptlinien H_1, H_2, H_3, ... einer Ebene ε sollen *erste, zweite, dritte, ... Hauptlinie* heißen. Die zu ihnen bzw. senkrechten Geraden F_1, F_2, F_3, ... von ε nennt man ihre *Spurnormalen* oder *Fallinien* (und zwar *erste, zweite, dritte, ... Fallinie*), weil sie unter allen Geraden

1) Die Namen „Haupt-“ und „Fallinie“ finden sich bei *R. Sturm*, Elemente d. darst. Geom., Leipzig 1874, S. 7 u. 8.

Hosted by Google

der Ebene die größte Neigung oder den größten Fall gegen Π_1 bzw. Π_2, Π_3, ... besitzen.

Zufolge Nr. 42, Satz 1 ist $F_1' \perp H_1'$, $F_2'' \perp H_2''$, $F_3''' \perp H_3'''$, ..., d. h.:

Die zu einer Rißebene gehörigen Haupt- und Fallinien stellen sich in dem betreffenden Normalriß als rechtwinkelige Geraden dar.

Von einer etwa durch Auf- und Kreuzriß zweier sich schneidenden Geraden A, B (oder auf andere Weise) gegebenen Ebene lassen sich die Hauptlinien H_2 und H_3 sofort zeichnen (Fig. 72). Denn wegen $H_2 \| \Pi_2$ steht H_2''' zu den Ordnungslinien senkrecht. Nehmen wir eine solche Gerade beliebig an, so folgt daraus (nach Nr. 20) H_2''. Wegen $H_3 \| \Pi_3$ steht ferner H_3'' zu den Ordnungslinien senkrecht. Wählen wir eine solche Gerade, so folgt daraus H_3'''.

Die Fallinien der Ebene sind jetzt dadurch gegeben, daß $F_2'' \perp H_2''$ und $F_3''' \perp H_3'''$ steht.

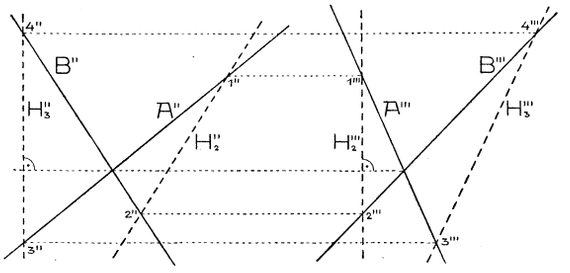


Fig. 72.

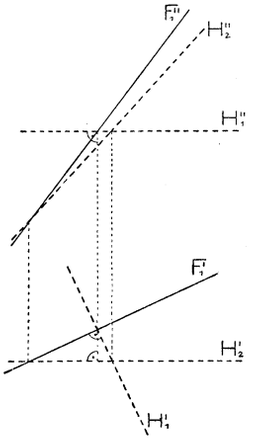


Fig. 73.

Statt durch Spuren oder Hauptlinien *kann eine Ebene durch eine einzige Fallinie bestimmt werden.* Denn ist z. B. Grund- und Aufriß einer ersten Fallinie F_1 gegeben (Fig. 73), so wird irgend eine Gerade $H_1' \perp F_1'$ der Grundriß einer ersten Hauptlinie und die Horizontale durch den Aufriß des Punktes $[H_1' F_1']$ deren Aufriß H_1'' sein. Durch die Geraden F_1, H_1 ist aber die Ebene bestimmt, von der man eine zweite Hauptlinie (H_2', H_2'') wie oben zeichnet.

44. Senkrechtstehen von Geraden auf Ebenen. Steht eine Gerade G auf einer Ebene ε senkrecht und ist H eine zur Rißebene Π gehörige Hauptlinie, so folgt aus Nr. 42, Satz 1 (wegen $G \perp H$ und $H \| \Pi$), daß die Normalrisse von G und H aufeinander senkrecht stehen. Dies gibt den

Satz 1: *Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so steht jeder Normalriß der Geraden auf dem Riß der zugehörigen Hauptlinien der Ebene senkrecht.*

Hosted by Google

Von diesem Satze gilt die folgende Umkehrung:

Satz 2: *Steht in zwei Normalrissen eine Gerade auf den zugehörigen Hauptlinien einer (nicht zur Rißachse parallelen) Ebene senkrecht, so steht die Gerade im Raume zur Ebene selbst senkrecht.*

Denn nach Nr. 42, Satz 2 steht G zu zwei nichtparallelen Geraden von ε, nämlich zu den zwei Hauptlinienrichtungen senkrecht, mithin zu ε selbst.

Unter Benutzung dieses Satzes zeichnet man das aus einem Punkte p auf eine Ebene ε fällbare Lot im Auf- und Grundriß, indem man die betreffenden Hauptlinien H_1 und H_2 von ε ermittelt und dann $[p' | H_1']$ und $[p'' | H_2'']$ zieht.

In Fig. 74 ist die umgekehrte Aufgabe: *Durch einen Punkt p eine Ebene ε senkrecht zu einer Geraden G zu legen,* mittels Auf- und Kreuzriß gelöst. Die zweite Hauptlinie H_2 von ε durch p steht im Aufriß zu G'', im Kreuzriß zu den Ordnungslinien, die dritte Hauptlinie H_3 durch p im Kreuzriß zu G''' und im Aufriß zu den Ordnungslinien senkrecht. Durch die sich schneidenden Geraden H_2 und H_3 ist aber ε bestimmt.

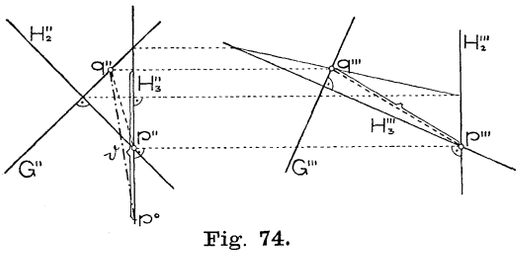


Fig. 74.

45. Abstand eines Punktes von einer Geraden oder einer Ebene. Die naheliegendste Lösung der Aufgabe, den Abstand $\mathfrak{d}$ des Punktes p von der Geraden G zu ermitteln (Fig. 74), besteht wohl darin, daß man nach Nr. 44 durch p die Normalebene ε zu G legt, deren Schnittpunkt q mit G aufsucht und nach Nr. 40 die Länge von qp $(= \overline{q''p^0})$ ermittelt.

Für eine Tafelparallele vereinfacht sich diese Lösung bedeutend, wie Fig. 75 für $G \parallel H_2$ zeigt. Der allgemeine Fall läßt sich mittels eines Seitenrisses auf eine Ebene durch G auf diesen Sonderfall zurückführen. Fig. 76 zeigt, wenn G und p im Auf- und Grundriß gegeben sind, die Ausführung unter Verwen-

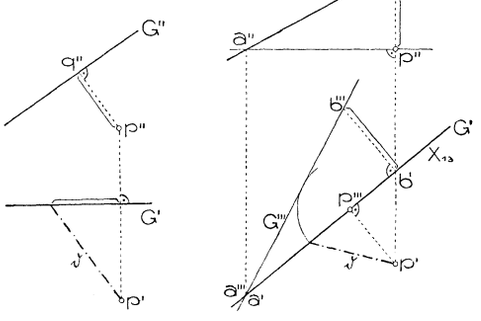


Fig. 75.

Fig. 76.

Hosted by Google

dung einer erstprojizierenden Seitenrißebene, wobei p''' in G' angenommen wurde. Diese Lösung ist etwas einfacher als die in Fig. 74.

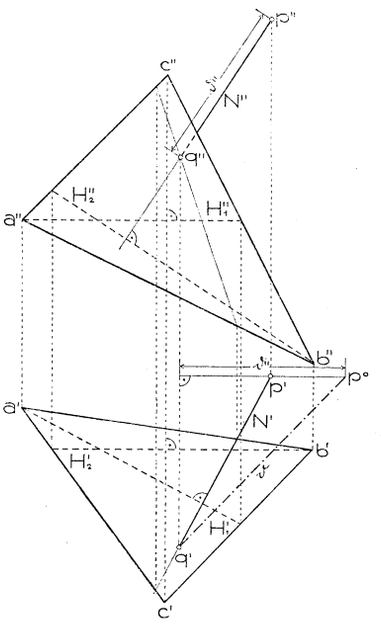


Fig. 77.

Die Lösung mittels Einführung zweier Seitenrisse wurde schon in Nr. 10 (Fig. 20) gezeigt.

Auch der Abstand eines Punktes p von einer Ebene ε kann direkt oder mittels eines Seitenrisses gefunden werden. Die erste Lösung besteht darin, daß man hintereinander $N = [p \mid \varepsilon]$, $q = [N\varepsilon]$, $\mathfrak{d} = \overline{qp}$ auf die oben erläuterten Arten zeichnet. Fig. 77 zeigt die Ausführung für den Fall, als ε durch das Dreieck abc im Auf- und Grundriß gegeben ist. Die durch a gelegte Hauptlinie H_1 erscheint im Aufriß, die durch b gelegte Hauptlinie H_2 im Grundriß senkrecht zu den Ordnungslinien, woraus H_1' und H_2'' folgen. Nun ist $N'' = [p'' \mid H_2'']$ und $N' = [p' \mid H_1']$. Mittels einer erstprojizierenden Ebene durch N findet man q'', q' und nach Nr. 40 $\mathfrak{d} = \overline{q'p^0}$.

Die zweite Lösung der Aufgabe besteht darin, daß man den Seitenriß von ε und p auf eine zu ε normale (projizierende) Ebene

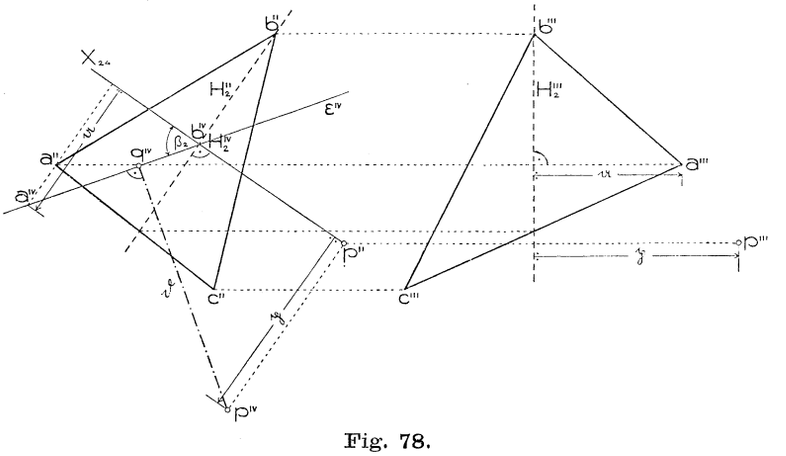


Fig. 78.

zeichnet. ε erscheint dann als Gerade und ihr Abstand vom Seitenriß des Punktes ist $\mathfrak{d} = \overline{p\varepsilon}$. Fig. 78 zeigt diese Ausführung für den Fall,

Hosted by Google

als man im Auf- und Kreuzriß konstruiert und die Ebene durch ein Dreieck abc gegeben ist. Um den Seitenriß (vierte Projektion) auf eine zu ε normale zweitprojizierende Ebene zu erhalten, zeichnen wir eine zweite Hauptlinie H_2 von ε, etwa durch b; dann sind die Ordnungslinien zwischen dem zweiten und vierten Riß H_2''. H_2^{IV} fällt nach b^{IV} und diesen Punkt wählen wir auf $[p''|H_2''] = X_{24}$. Die Ermittlung der Seitenrisse a^{IV} und p^{IV} zeigt die Figur. Da nun $[a^{IV}b^{IV}] = \varepsilon^{IV}$ ist, so gibt das Lot $\mathfrak{d} = \overline{p^{IV}\varepsilon^{IV}} = \overline{p^{IV}q^{IV}}$ den gesuchten Abstand. Aus dem Seitenriß q^{IV} des zu p gehörigen Lotfußpunktes q erhält man nach Bedarf in X_{24} den Aufriß und daraus auf bekannte Weise q'''.

46. Einen Punkt um eine zu einer Rißebene parallele Gerade so lange zu drehen, bis die Verbindungsebene beider zur Rißebene parallel ist. Diese einfache Hilfsaufgabe tritt so häufig auf, daß die

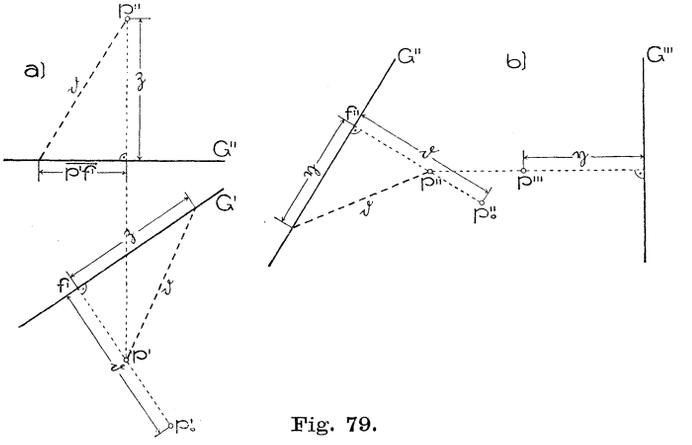


Fig. 79.

Erläuterung einer möglichst kurzen Lösung von Wert ist. Sei (Fig. 79 a) p der zu drehende Punkt und G die zu Π_1 parallele Drehachse, so stellt sich das aus p auf G gefällte Lot pf im Grundriß als Gerade $\perp G'$ dar. Da bei der Drehung $fp \perp G$ bleibt und nach ausgeführter Drehung diese Strecke sowohl als ihr Winkel mit G im Grundriß in wirklicher Größe erscheinen, so erhält man den Grundriß des gedrehten Punktes p_0, wenn man auf $[f'p']$ $\overline{f'p_0'} = \overline{fp} = \mathfrak{d}$ macht. $\mathfrak{d}$ ergibt sich aber nach Nr. 40 (vgl. Fig. 75) als Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, von dem $\overline{f''p'}$ die eine und das z der Strecke $fp\,(= \overline{G''p''})$ die andere Kathete ist. Dieses Dreieck läßt sich unter Benutzung der schon vorhandenen rechten Winkel $G'\widehat{[f'p']}$ oder $G''\widehat{[p'p'']}$ konstruieren. Die Hypotenuse wird man natürlich gar nicht ziehen sondern sie mit dem Zirkel abgreifen und nach $f'p_0'$ übertragen.

Hosted by Google

Fig. 79 b zeigt die „Paralleldrehung“ zu Π_2 unter Benutzung von Auf- und Kreuzriß.

47. Neigungswinkel zweier sich schneidenden Geraden[1]). Man dreht die Geraden um eine Hauptlinie H_i ihrer Ebene parallel zur Rißebene Π_i; dann erscheint ihr Neigungswinkel in dem Normalriß auf Π_i in wirklicher Größe. In Fig. 80 ist zur Ermittlung des Neigungswinkels φ der durch Auf- und Grundriß gegebenen Geraden A und B eine erste Hauptlinie H_1 als Drehachse benutzt. Da die Schnittpunkte a und b von A und B mit H_1 bei der Drehung fest bleiben, so hat man bloß den Schnittpunkt s von A und B nach Nr. 46 zu drehen. $\widehat{a's_0'b'}$ ist der gesuchte Winkel φ, der in unserer Figur kleiner als $\widehat{A'B'}$ ist.

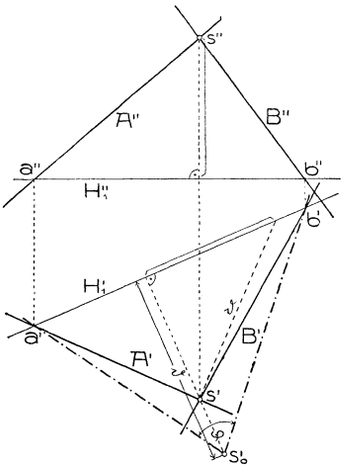


Fig. 80.

Sollte z. B. noch die Symmetrale von $\widehat{AB}$ eingezeichnet werden, so würde man die Symmetrale von $\widehat{a's_0'b'}$ mit H_1' zum Schnitt bringen und diesen Punkt nach H_1'' hinaufloten. Die Verbindungslinien dieser Punkte mit s' bzw. s'' wären Grund- und Aufriß der gesuchten Symmetralen.

Zur Ermittlung des Neigungswinkels zweier sich kreuzenden Geraden legt man durch einen beliebigen Punkt s die Parallelen und sucht auf die eben gezeigte Weise deren Winkel.

48. Sätze über Normalrisse von Winkeln.[2]) Zwischen dem Normalriß α' eines Winkels α auf eine Ebene Π und dem Winkel selbst besteht keine einfache Größenbeziehung. Hingegen lassen sich leicht einige später zur Verwendung kommende Sätze ableiten, nach denen man in besonderen Fällen beurteilen kann, ob $\alpha' \gtrless \alpha$ ist.

Satz 1: *Ein spitzer Winkel α, von dem ein Schenkel eine Hauptlinie seiner Ebene ist, hat als Normalriß einen Winkel α', der kleiner oder höchstens gleich α ist.*

Denn ist (Fig. 81) $\alpha = \widehat{HG}$ und $H \parallel \Pi$ und man zieht in der Winkelebene $F = [gh] \perp H$, so ist

1) Genauer sollte man nur von dem (hohlen) Winkel zweier Halbgeraden sprechen.

2) Nach *R. Sturm*, a. a. O. (S. 83, Fußn. 1) S. 8 u. 9.

Hosted by Google

$$\overline{s'h'} = \overline{sh}, \quad \widehat{s'h'g'} = \widehat{shg} = 90^0 \text{ (Nr. 42, Satz 1)}$$

und

$$\overline{h'g'} \leqq \overline{hg} \text{ (Nr. 40).}$$

Daraus folgt $\alpha' \leqq \alpha$. Das Gleichheitszeichen tritt dann und nur dann auf, wenn $h'g' = hg$, d. h. Ebene $[GH] \parallel \Pi$ ist.

Satz 2: *Ein spitzer Winkel β, von dem ein Schenkel eine Fallinie seiner Ebene ist, hat als Normalriß einen Winkel β', der größer oder mindestens gleich β ist.*

$\beta = \widehat{GF}$ in Fig. 81 erfüllt die geforderten Bedingungen. Aus $\alpha' \leqq \alpha$ folgt $\beta' \geqq \beta$, weil

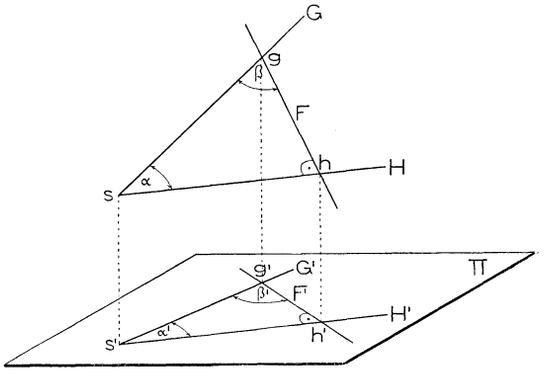


Fig. 81.

$$\alpha' + \beta' = \alpha + \beta = 90^0.$$

Betrachtet man die Normalrisse der Nebenwinkel von α und β, so erhält man zwei Sätze, die aus Satz 1 und 2 dadurch hervorgehen, daß man die Worte „spitz“ durch „stumpf“ ersetzt und gleichzeitig „kleiner“ und „größer“ vertauscht.

Satz 3: *Wird ein hohler Winkel durch die Hauptlinie, nicht aber durch die Fallinie des Scheitels geteilt, so ist sein Normalriß kleiner als er selbst.*

Denn seine Teile sind dann entweder beide spitze Winkel mit einer Hauptlinie als gemeinsamem Schenkel, die nach Satz 1 im Normalriß verkleinert erscheinen, oder der eine Teil ist ein spitzer Winkel, der im Normalriß verkleinert erscheint, der andere ein rechter Winkel, der sich nach Nr. 42, Satz 1 als rechter darstellt.

Satz 4: *Wird ein hohler Winkel durch die Fallinie, nicht aber durch die Hauptlinie des Scheitels geteilt, so ist sein Normalriß größer als er selbst.*

Der Beweis wird unter Benutzung des Satzes 2 analog wie für Satz 3 geführt.

Satz 5: *Ein rechter Winkel erscheint in einem Normalriß nur dann als rechter Winkel, wenn ein Schenkel eine Hauptlinie, der andere also eine Fallinie seiner Ebene ist.*

Hosted by Google

Denn bei jeder andern Lage wird der rechte Winkel entweder nur durch die Hauptlinie oder nur durch die Fallinie seines Scheitels in zwei spitze Winkel geteilt, deren Normalrisse im ersten Fall (nach Satz 1) kleiner, im zweiten Fall (nach Satz 2) größer als die Winkel im Raume sind.

Kennt man daher in einer Ebene zwei aufeinander senkrechte Geraden, die in einem Normalriß wieder aufeinander senkrecht stehen, so geben sie die Richtungen der (zu diesem Riß gehörigen) Haupt- und Fallinien der Ebene an.

49. Winkel zweier Ebenen; Tafelneigungen einer Ebene; Winkel einer Geraden mit einer Ebene. Unter dem Winkel oder Neigungswinkel zweier Halbebenen ε_1, ε_2 versteht man gewöhnlich den hohlen Winkel ihres Normalschnittes (Schnitt mit einer zu $[\varepsilon_1 \varepsilon_2]$ normalen Ebene). Zwei Vollebenen besitzen zwei Neigungswinkel. Der Seitenriß der gegebenen Halbebenen auf die Normalschnittebene ist der Winkel $\varphi = \widehat{\varepsilon_1^{\,v} \varepsilon_2^{\,v}}$.

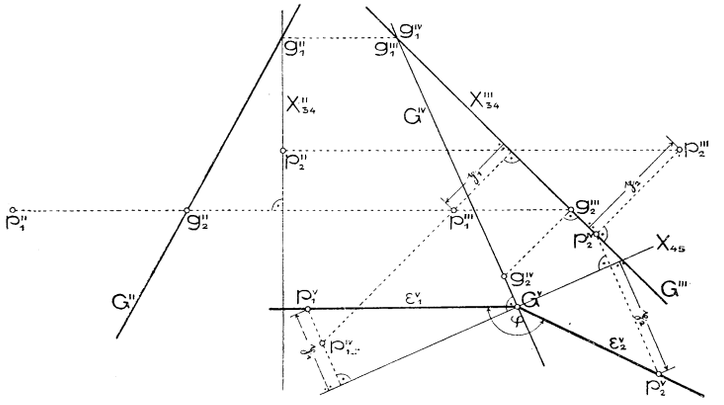


Fig. 82.

Handelt es sich z. B. um die Lösung der Aufgabe, *den Winkel φ zu ermitteln, den die durch die gegebene Gerade $G(G'', G''')$ und die gegebenen Punkte $p_1(p_1'', p_1''')$ und $p_2(p_2'', p_2''')$ legbaren Halbebenen miteinander einschließen*, so wird man den Seitenriß der gegebenen Elemente auf die Normalebene von G suchen. Den Bemerkungen in Nr. 10 gemäß wurde in Fig. 82 zuerst der Seitenriß auf die drittprojizierende Ebene Π_4 durch G gezeichnet und dabei p_2^{IV} in G''' oder, was dasselbe ist, X_{34}'' durch p_2'' gehend gewählt. p_1^{IV} liegt dann in $[p_1''' | G''']$ um $\overline{p_1'' X_{34}''}$ von G''' entfernt. G^{IV} ist durch die vierten Risse zweier Punkte g_1 und g_2 von G bestimmt, wobei g_1 in X_{34} und g_2 in der (bezüglich Π_2 und Π_3) doppelprojizierenden Ebene durch

p_1 gewählt wurde. Der Seitenriß von G auf die zu ihr normale Ebene Π_5 ist der Punkt G^V in $X_{45} \perp G^{IV}$; die Ermittlung der Punkte $p_1{}^V$ und $p_2{}^V$ zeigt Fig. 82. Nun ist $[G^V p_1{}^V] = \varepsilon_1{}^V$, $[G^V p_2{}^V] = \varepsilon_2{}^V$, also $\varphi = \widehat{\varepsilon_1{}^V \varepsilon_2{}^V}$.

Sollte noch die Symmetrieebene σ von $\widehat{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$ im Auf- und Kreuzriß dargestellt werden, so beachte man, daß σ^V die Symmetrale von $\widehat{\varepsilon_1{}^V \varepsilon_2{}^V}$ ist. Von irgend einem σ angehörigen Punkt q darf daher q^V auf σ^V und q^{IV} auf $[q^V | X_{45}]$ beliebig gewählt werden. Aus q^V und q^{IV} leitet man q''' und q'' ab, die nun mit G''' und G'' die Ebene σ bestimmen.

Nach der Definition des Winkels zweier Ebenen ist die Tafelneigung $\beta_i = \widehat{\varepsilon \Pi_i}$ einer Ebene ε gleich dem Winkel, den die Fallinie F_i von ε mit Π_i einschließt; seine Ermittlung kann also nach Nr. 40 geschehen. Übrigens ist β_i auch gleich dem Winkel, den der Seitenriß von ε auf eine zur Hauptlinie H_i senkrechte Ebene mit der zu H_i normalen Rißachse einschließt. Fig. 78 zeigt diese Ermittlung der Tafelneigung β_2 der Ebene $[abc]$.

Die Konstruktion des Neigungswinkels für zwei Ebenen ε_1, ε_2 läßt sich auch auf die entsprechende Konstruktion für zwei Geraden zurückführen. Denn fällt man aus einem Punkte p auf die Ebenen ε_1 und ε_2 die Lote N_1 und N_2, so stimmen deren nach Nr. 47 erhältlichen Winkel bekanntlich der Größe nach mit denen von ε_1 und ε_2 überein.

Insbesondere ist etwa die erste Tafelneigung β_1 einer Ebene ε gleich dem Winkel, den eine Normale N zu ε mit einer ersten Tafelnormalen einschließt, oder β_1 *ist das Komplement der ersten Tafelneigung von* N.

Mittels dieser Bemerkung läßt sich die Lösung der

Aufgabe: Durch einen gegebenen Punkt p *eine Ebene mit den gegebenen Tafelneigungen* β_1 *und* β_2 *zu legen,*

auf die Aufgabe in Nr. 41 zurückführen.[1]) Man zeichnet nämlich eine Gerade N mit den Tafelneigungen $90^0 - \beta_1$ und $90^0 - \beta_2$ und legt dann (nach Nr. 44) durch p die zu N normale Ebene. — Wegen $(90^0 - \beta_1) + (90^0 - \beta_2) \leqq 90^0$ (Nr. 41) müssen die gegebenen Winkel der Bedingung $\beta_1 + \beta_2 \geqq 90^0$ genügen.

Um den *Neigungswinkel einer Geraden* G *gegen eine Ebene* ε zu finden, fälle man aus irgend einem Punkte p von G das Lot N auf ε, ermittle (nach Nr. 47) $\widehat{GN}$ und nehme davon das Komplement.

1) Wegen einer direkten Lösung der Aufgabe vgl. etwa *Chr. Wiener,* Lehrb., I, Nr. 107.

Hosted by Google

50. Ermittlung der Gestalt einer durch zugeordnete Normalrisse gegebenen ebenen Figur. Man dreht die Figur um eine Hauptlinie ihrer Ebene zur betreffenden Rißebene parallel; der zugehörige Normalriß ist dann mit der Raumfigur kongruent. Die Paralleldrehung kann nach Nr. 46 punktweise durchgeführt werden. In vielen Fällen jedoch, besonders wenn die Figur eine größere Anzahl von Punkten enthält, ist die Benutzung des Seitenrisses auf eine zur Drehachse senkrechte Ebene vorteilhafter.

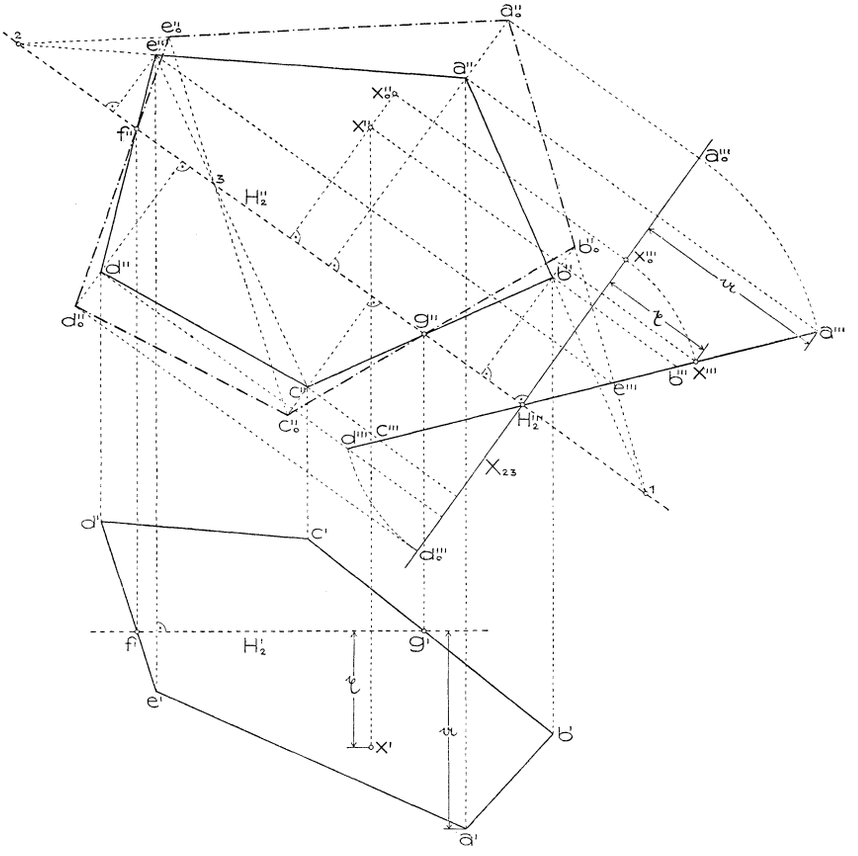


Fig. 83.

Fig. 83 zeigt die Ermittlung der Gestalt eines durch Auf- und Grundriß gegebenen Fünfecks $abcde$ mittels Paralleldrehung um die zweite Hauptlinie $H_2(H_2' \perp [e'e''])$ seiner Ebene. Punkt H_2''' wurde in H_2'' beliebig gewählt und durch ihn $X_{23} \perp H_2''$ gezogen. Der Seitenriß a''' des Eckpunktes a z. B. liegt dann auf $[a'' X_{23}]$ im Abstande $\mathfrak{a} = \overline{H_2'a'}$ von X_{23} und $[H_2'''a''']$ ist schon der Seiten-

Hosted by Google

riß der Fünfecksebene. (Kontrolle: Die analog wie a''' erhaltenen Seitenrisse der anderen Eckpunkte müssen in $[H_2'''a''']$ fallen.) Nach Nr. 46 liegen die Aufrisse der gedrehten Punkte a_0, b_0, ... mit den Aufrissen der ungedrehten Punkte in Senkrechten zu H_2''. Trägt man also z. B. $\overline{H_2'''a'''}$ auf $[a'' \mid H_2'']$ von H_2'' aus ab, so gelangt man zu a_0''. In der Figur wurden zur Sichtbarmachung dieses Übertragens die Seitenrisse der Punkte a_0 und d_0 eingezeichnet, was aber natürlich überflüssig ist.

Durch den umgekehrten Vorgang findet man zu irgend einem Punkte x_0 der gedrehten Figur jenen Punkt x, in den x_0 bei der Rückdrehung übergeht. Man hat also nur $[x_0'' \mid H_2'']$ zu ziehen, $\overline{H_2''x_0''}$ auf dem Seitenriß der Ebene von H_2''' aus nach der entsprechenden Richtung bis x''' aufzutragen, so ist $x'' = [x''' \mid X_{23} \cdot x_0'' \mid H_2'']$.

Die Aufrisse der gegebenen und der gedrehten Figur sind nach Nr. 37 affin verwandt. Sie befinden sich aber auch in perspektiver Lage (Nr. 38), weil je zwei entsprechende Punkte einer Geraden $\perp H_2''$ angehören und je zwei entsprechende Geraden sich auf H_2'' schneiden (die Punkte von H_2 bleiben bei der Drehung fest). Sobald man daher einen Punkt der gedrehten Figur kennt, lassen sich alle übrigen auf Grund der affinen Beziehung (nach Nr. 38, Fig. 59) ohne Benutzung des Seitenrisses finden. Angenommen, etwa a_0'' wäre auf obige Art gefunden worden. (Man beginnt der größeren Genauigkeit halber mit einem von der Drehachse entfernteren Punkt.) Dann sind seine Verbindungslinien mit $1 = [a''b'' \cdot H_2'']$ und $2 = [a''e'' \cdot H_2'']$ die gedrehten Lagen der Geraden $[ab]$ und $[ae]$ im Aufriß und deren Schnittpunkte mit den Affinitätsstrahlen durch b'' und e'' die gedrehten Punkte b_0'' und e_0''. Ist ferner $f'' = [e''d'' \cdot H_2'']$ und $g'' = [b''c'' \cdot H_2'']$, so zieht man $[e_0''f'']$ und $[b_0''g'']$ und schneidet sie mit den Affinitätsstrahlen durch d'' und c''; die Schnittpunkte sind d_0'' und c_0''. Selbstverständlich lassen sich gelegentlich auch die Diagonalen des Fünfecks zur Vervollständigung der affinen Figuren benutzen, wie es für den Punkt c_0'' angedeutet ist. Auch die Konstruktion von x'' aus x_0'' kann mittels der Affinität geschehen.

Diese beiden Operationen *„Paralleldrehen* und *Zurückdrehen ebener Figuren“* gehören zu den wichtigsten der darstellenden Geometrie. *Denn sobald man in einer nicht zu einer Rißebene parallelen Ebene irgend eine Konstruktion vornehmen will, bei der Strecken oder Winkel auftreten, muß man diese Ebene zuerst parallel drehen und nach Ausführung der Konstruktion wieder zurückdrehen.*

Handelt es sich z. B. um die Lösung der

Aufgabe: Den Mittelpunkt m des einem gegebenen Dreieck abc ($a''b''c''$, $a'''b'''c'''$) umschriebenen Kreises zu zeichnen (Fig. 84),

so drehe man zuerst das Dreieck, etwa um die Hauptlinie H_2 durch a

Hosted by Google

($[a'''d''']\perp[b''b''']$), parallel zu H_2. Der Punkt b_0'' wird zu diesem Zwecke nach Nr. 46 ohne Benutzung eines Seitenrisses (wie es die Figur andeutet) ermittelt, $a_0'' = a''$ und c_0'' ergeben sich aus der affinen Verwandtschaft zwischen $a''b''c''$ und $a_0''b_0''c_0''$. Nun zeichne man den Mittelpunkt m_0'' des $a_0''b_0''c_0''$ umschriebenen Kreises (als Schnitt zweier Seitensymmetralen) und suche schließlich den m_0'' entsprechenden Punkt m'' in der ursprünglichen Figur etwa mittels der einen Seitensymmetralen $[m_0''e_0'']$, die H_2'' in f'' trifft. Auf $[ef]''' = [e'''f''']$ liegt schließlich m'''.

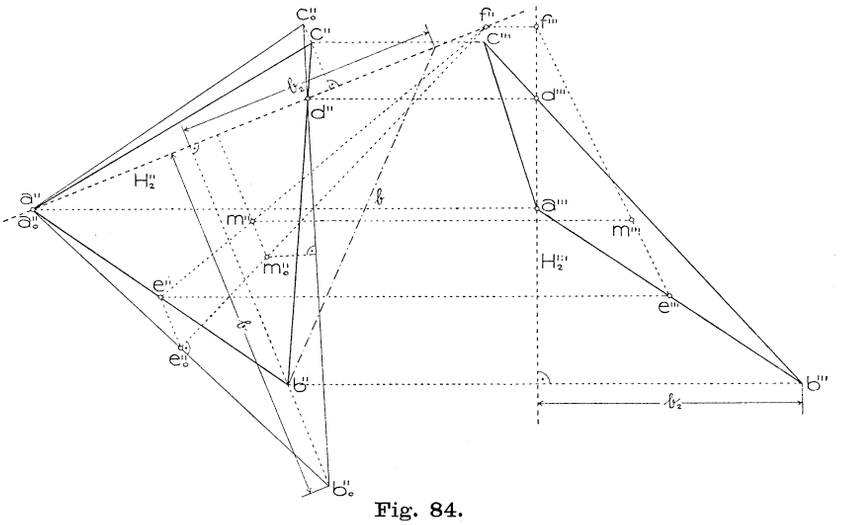


Fig. 84.

In der folgenden Übungsaufgabe kommen außer der Paralleldrehung noch einige andere der vorher behandelten Grundaufgaben zur Anwendung.

51. **Übungsaufgabe:** *Gegeben sei eine Ebene ε durch zwei untereinander und zu H_2 parallele Geraden $A(A', A'')$, $B(B', B'')$ und ein Punkt m (m', m''). Man zeichne den Aufriß eines Würfels, dessen Mittelpunkt m ist und dessen eine Seitenfläche derart in ε liegt, daß ein Eckpunkt A angehört.*

Der Gedankengang für die Lösung der Aufgabe ist folgender. Man fälle aus m das Lot auf ε; sein Fußpunkt n ist die Mitte der in ε liegenden Fläche und $\overline{mn}$ die halbe Kantenlänge des Würfels. In der parallel H_2 gedrehten Lage von ε läßt sich mit n_0 als Mitte und $\overline{mn}\cdot\sqrt{2}$ als halbe Diagonale das Quadrat zeichnen, von dem ein Eckpunkt a in A liegt, und durch Zurückdrehen sein Aufriß finden. Die zu ε senkrechten Würfelkanten stehen im Aufriß $\perp A''$ und haben die Länge $2\cdot\overline{m''n''}$.

Hosted by Google

Die Ausführung geschieht wohl (Fig. 85) am einfachsten mittels des Seitenrisses auf eine zu A senkrechte Ebene Π_3, in dem sich A und B als Punkte A''' und B''' darstellen. Wählen wir (Nr. 15) A''' in $X_{23} = [m'' \; A'']$, so ist

$$\overline{X_{23}B'''} = \overline{A'B'} = \mathfrak{b} \qquad \text{und} \qquad \overline{m''m'''} = \overline{A'm'} = \mathfrak{m}.$$

Der Fußpunkt des aus m''' auf $\varepsilon''' = [A'''B''']$ gefällten Lotes ist n''', während n'' der mit X_{23} sich deckenden Geraden $[m \mid \varepsilon]''$ angehört. Die Paralleldrehung von ε geschehe um A. Wird $\overline{A'''n_0''} = \overline{A'''n'''}$ gemacht, so ist n_0'' der Aufriß des gedrehten Punktes n. Die halbe Diagonale des Quadrates in ε ergibt sich als Hypotenuse $\mathfrak{r}$ eines rechtwinkelig-gleichschenkeligen Dreiecks mit den Katheten $\overline{m'''n'''}$. Der Kreis $(n_0'', \mathfrak{r})$ schneidet A'' in zwei Punkten, von denen jeder, als a'' betrachtet, eine Lösung der Aufgabe bestimmt. In Fig. 85 ist bloß die dem unteren Schnittpunkt a'' entsprechende Lösung gezeichnet. Der Gegenpunkt c_0'' von a'' auf dem Kreise sowie die Endpunkte des zu $a''c_0''$ senkrechten Durchmessers $b_0''d_0''$ geben die übrigen Eckpunkte des Quadrates. Dessen Seiten braucht man gar nicht zu zeichnen sondern dreht bloß die beiden Diagonalen mit Benutzung des Punktes n'' und des Punktes $1'' = [A'' \cdot b_0''d_0'']$ zurück. Dadurch gelangt man zum Aufriß $a''b''c''d''$ der in ε liegenden Würfel-

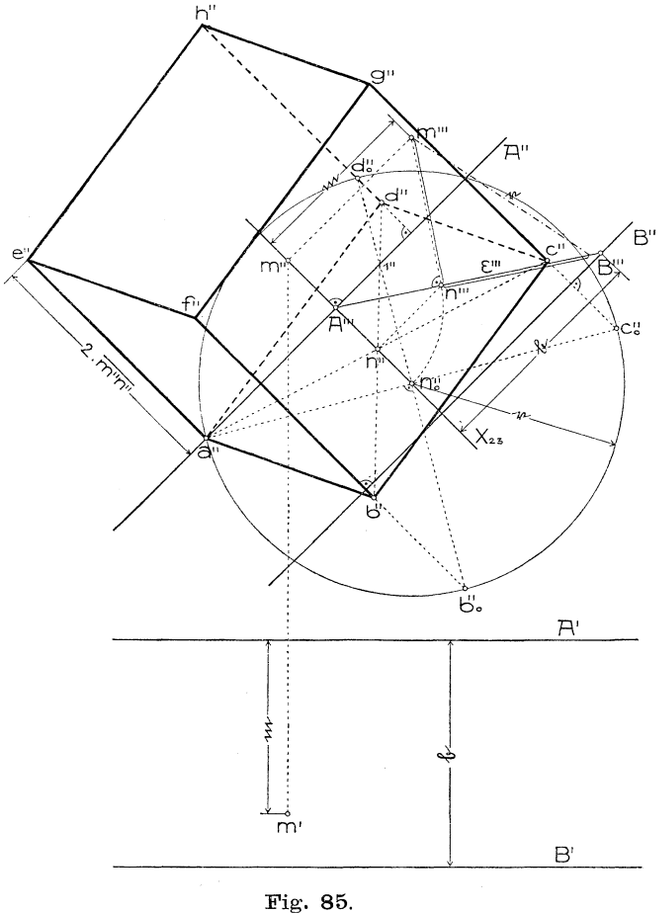


Fig. 85.

Hosted by Google

fläche. Trägt man noch von den Punkten a'', b'', c'', d'' aus $\perp A''$ die Strecke $2 \cdot \overline{m''n''}$ ab, so erhält man die Aufrisse e'', f'', g'', h'' der vier übrigen Würfelecken. Ihre Grundrisse wären aus Auf- und Seitenriß leicht erhältlich.

52. Aufgabe: *Von einem Dreieck abc, das einem gegebenen Dreieck $a_1 b_1 c_1$ ähnlich sein soll, ist der Grundriß $a'b'c'$ und der Aufriß a'' eines Eckpunktes gegeben, der Aufriß $a''b''c''$ zu ermitteln (Fig. 86).*

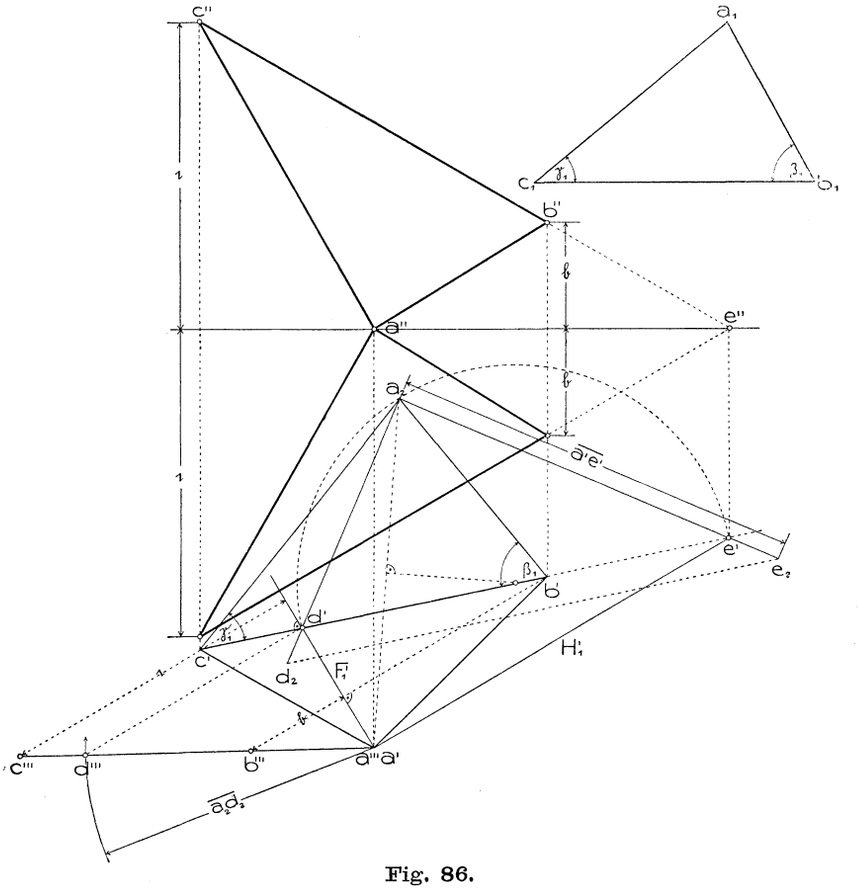


Fig. 86.

Die gegebenen Dreiecke $a'b'c'$ und $a_1 b_1 c_1$ entsprechen einander in den ebenen Systemen σ' und σ_1, von denen σ' den Grundriß von $\sigma = [abc]$ und σ_1 das mit σ ähnliche System bezeichnet. Nach Nr. 37 sind σ' und σ_1 affin verwandt und es ist diese Verwandtschaft durch die Dreiecke $a'b'c'$ und $a_1 b_1 c_1$ bestimmt. Suchen wir die ent-

Hosted by Google

sprechenden rechten Winkel von σ' und σ_1, so entspricht ihnen auch in σ ein rechter Winkel. Die Schenkel des rechten Winkels in σ' geben nach Nr. 48, Satz 5 den Grundriß der ersten Haupt- und Fallinienrichtungen von σ an. Man ermittelt sie nach Nr. 39, indem man $b'c'a_2 \sim b_1c_1a_1$ zeichnet, durch a' und a_2 jenen Kreis legt, dessen Mitte $[b'c']$ angehört, und seine auf $[b'c']$ befindlichen Punkte d' und e' mit a' verbindet. Zur Entscheidung, welche der beiden Verbindungslinien Grundriß einer ersten Hauptlinie von σ ist, benutzen wir den Satz 1 in Nr. 48. $\widehat{a'd'e'}$ und $\widehat{a'e'd'}$ sind die Grundrisse von Winkeln, die $\widehat{a_2d'e'}$ und $\widehat{a_2e'd'}$ gleichen. Weil in unserer Figur (86) $\widehat{a'e'd'} < \widehat{a_2e'd}$, muß $[a'e'] = H_1'$ Grundriß der Hauptlinie, daher $[a'd'] = F_1'$ Grundriß der Fallinie durch a sein.

$\overline{ae}$, als einer ersten Hauptlinie angehörend, ist $= \overline{a'e'}$. Macht man daher auf der Seite $[a_2e']$ des mit ade ähnlichen Dreiecks $a_2d'e'$ $\overline{a_2e_2} = \overline{a'e'}$ und zieht $[e_2\ e'd']$ bis zum Schnitt d_2 mit $[a_2d']$, so ist $a_2e_2d_2 \cong aed$, daher $\overline{a_2d_2} = \overline{ad}$. Damit läßt sich der Seitenriß des Dreiecks abc auf eine Ebene $H_3 \perp H_1$ und daraus schließlich sein Aufriß finden. H_1' gibt die Ordnungslinienrichtung zwischen Grund- und Seitenriß an; $a''' = H_1'''$ wählen wir in a'. Da ad im Seitenriß in wirklicher Länge erscheint, so schneide man die Ordnungslinie $[d' \| H_1']$ durch d' mit dem Kreise um a''', dessen Halbmesser $\overline{ad} = \overline{a_2d_2}$ ist. Die beiden Schnittpunkte liegen symmetrisch zu $[a'd'] = F_1'$. Jeder von ihnen kann als d''' und seine Verbindungslinie mit a''' als Seitenriß der Dreiecksebene angesehen werden. Es gibt mithin zwei Dreiecke abc, die bezüglich $[a \| H_1]$ symmetrisch liegen. Wir zeichnen im Seitenriß bloß eine Gerade $[a'''d''']$, deren Schnitte mit $[b' \| H_1']$ und $[c' \| H_1']$ schon die Punkte b''' und c''' geben. $\overline{F_1'b'''} = \mathfrak{b}$ und $\overline{F_1'c'''} = \mathfrak{c}$ sind dann die Unterschiede der ersten Tafelabstände der Punkte b und c gegenüber a. Zieht man daher durch a'' eine Horizontale und trägt von dieser aus auf den Vertikalen durch b' und c' die Strecken $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ nach oben und unten auf, so erhält man die Aufrisse der Eckpunkte b und c der beiden den Forderungen der Aufgabe genügenden Dreiecke. Zum Zeichnen des Aufrisses läßt sich übrigens auch der in der Horizontalen durch a'' liegende Punkt e'' verwerten.

Die Lösung der Aufgabe bliebe natürlich vollkommen analog, wenn von dem mit $a_1b_1c_1$ ähnlichen Dreieck statt des Grundrisses der Auf- oder Kreuzriß gegeben wäre.

Diese Aufgabe läßt sich in anderer Form auch folgendermaßen aussprechen:

Ein zu einer Rißebene senkrecht stehendes dreiseitiges Prisma ist durch eine Ebene nach einem Dreieck zu schneiden, das einem gegebenen Dreieck ähnlich ist.

Hosted by Google

Mittels Einführung von Seitenrissen läßt sich auf diese Aufgabe die allgemeinere zurückführen:

Ein beliebig im Raume liegendes dreiseitiges Prisma ist durch eine Ebene nach einem Dreieck zu schneiden, das einem gegebenen Dreieck ähnlich ist.

Aus dem obigen Konstruktionsergebnis folgt der

Satz 1: *Es gibt im allgemeinen zwei zur Normalebene eines dreiseitigen Prismas symmetrische Stellungen von Ebenen, die das Prisma nach Dreiecken schneiden, die mit einem vorgegebenen ähnlich sind. (Eine Zuordnung von Dreiecksecken und Prismenkanten vorausgesetzt.)*

53. Konstruktion eines Dreikants aus seinen Seiten. *Aufgabe: Gegeben sind zwei sich in s schneidende Geraden A, B und zwei Winkel α, β. Man zeichne eine durch s gehende Gerade C, die mit A den Winkel β und mit B den Winkel α bildet.*

Denken wir uns C gefunden, so bilden die drei Strahlen A, B, C samt den durch sie bestimmten Ebenen ein *Dreikant* oder eine *dreikantige* (auch *dreiseitige*) *körperliche Ecke* (Fig. 87). Den gemeinsamen Punkt s nennt man den *Scheitel*, die Geraden A, B, C die *Kanten*, die zwischen ihnen liegenden Winkel $\alpha = \widehat{BC}$, $\beta = \widehat{CA}$, $\gamma = \widehat{AB}$ die *Kantenwinkel* oder *Seiten* und die Ebenen $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ die *Flächen* des Dreikants. An jeder Kante bilden die beiden Flächen oder Seiten einen Winkel, den man *Flächenwinkel* oder kurz *Winkel des Dreikants* nennt. Diese Winkel sollen mit $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ bezeichnet werden. Schneidet man das Dreikant durch eine Kugel vom Mittelpunkt s, so erhält man als Schnittfigur ein *sphärisches Dreieck* mit den Seiten α, β, γ und den Winkeln $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.

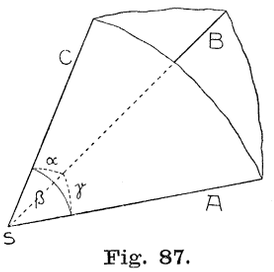


Fig. 87.

Wir lösen die gestellte Aufgabe (Fig. 88) zuerst für den Fall, als A und B zu einer Rißebene, z. B. zu Π_1 parallel sind oder, was auf das Gleiche hinauskommt, in Π_1 liegen.

Denken wir uns das schon konstruierte Dreikant längs C aufgeschlitzt und die beiden Seiten β und α um A bzw. B bis zum Zusammenfallen mit Ebene $[AB] = \Pi_1$ gedreht, so gelangt C nach C^0 bzw. C_1^0, sodaß $\widehat{AC^0} = \beta$ und $\widehat{BC_1^0} = \alpha$ ist. Die Geraden C^0 und C_1^0 können also mittels der gegebenen Winkel β und α von vornherein gezeichnet werden. Auf diesen Geraden wählen wir die Punkte c^0 und c_1^0 in gleicher Entfernung von s und drehen nun β und α wieder zurück. Dabei bewegen sich c^0 und c_1^0 in den zu A und B senkrechten Ebenen, deren Grundrisse $[c^0 \mid A]$ und $[c_1^0 \mid B]$ sich in c' schneiden. Die auf derselben Seite von Π_1 liegenden Schnittpunkte der Drehungs-

Hosted by Google

kreise von c^0 und $c_1{}^0$ mit der Lotrechten durch c' fallen in einem Punkte c zusammen, da sie beide von s die Entfernung $\overline{sc^0} = \overline{sc_1{}^0}$ haben. Die Höhe z des Punktes c über Π_1 erhält man aus der Umklappung der einen oder andern Drehungsebene samt dem darin befindlichen Drehungskreise mit dem bezüglichen Zentrum d oder e. Durch den ersten Tafelabstand z von c ist c'' und damit Grund und Aufriß der gesuchten Geraden C gegeben ($C' = [sc']$, $C'' = [s''c'']$).

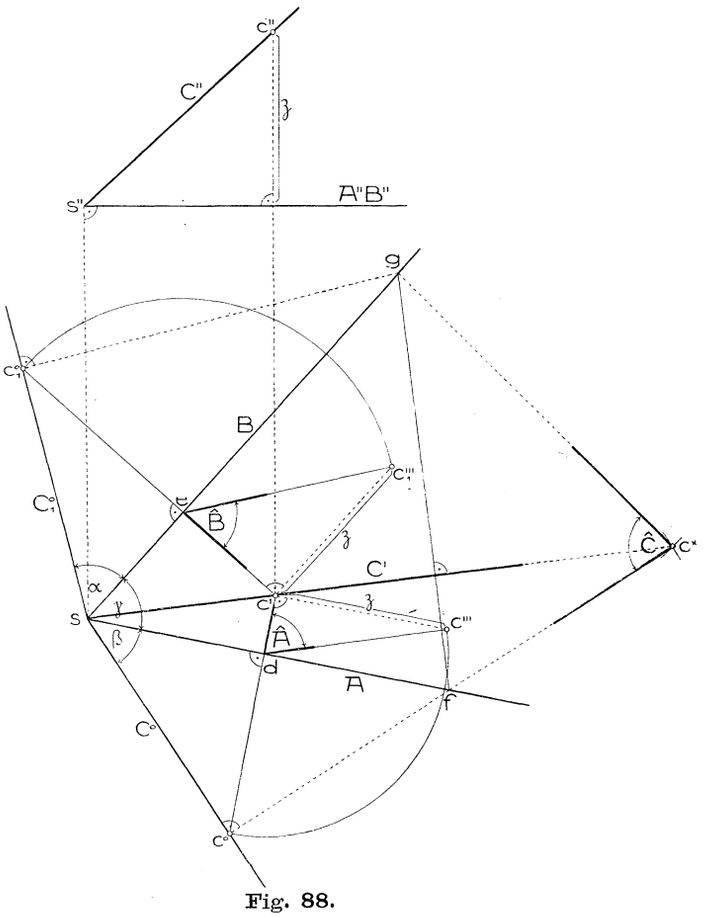


Fig. 88.

Man erkennt sofort, daß die Drehungskreise von c^0 und $c_1{}^0$ die Lotrechte durch c' nur dann reell schneiden, wenn $\widehat{c'sd} < \beta$ und $\widehat{c'se} < \alpha$ ist. Hat man γ als den größten (oder einen der größten) der drei Winkel gewählt, so fällt c' innerhalb γ und aus $\widehat{c'sd} + \widehat{c'se} = \gamma$ folgt $\gamma < \alpha + \beta$. Für $\gamma = \alpha + \beta$ fällt C in die Ebene $[AB]$. Ferner muß $\alpha + \beta + \gamma < 360^0$ sein.

Nach Erfüllung der beiden Bedingungen $\alpha + \beta + \gamma < 360^0$ und $\alpha + \beta > \gamma$ gibt es stets zwei zur Ebene $[AB]$ symmetrische Geraden C. Für $\alpha = \beta$ halbiert C' den Winkel γ.

Faßt man diese Aufgabe als *Konstruktion eines Dreikants aus seinen Kantenwinkeln* auf, so schließt sich als weitere Aufgabe die Ermittlung der Flächenwinkel an. $\widehat{A}$ und $\widehat{B}$ lassen sich aus den umgeklappten Drehungsebenen der Punkte c^0 und $c_1{}^0$ unmittelbar entnehmen (vgl. Fig. 88). — $\widehat{C}$ ist gleich dem Winkel des etwa durch c gelegten Normalschnittes der Ebenen $[AC]$ und $[BC]$. Da die

Hosted by Google

beiden Schenkel des Normalschnittes auf C senkrecht stehen, so erscheinen sie in den Umlegungen der Seiten β und α als die Geraden $[c^0 \mid C^0]$ und $[c_1{}^0 \mid C_1{}^0]$, deren Schnittpunkte f und g mit A bzw. B schon der Spur der Normalschnittebene auf Π_1 angehören. Da ferner $\overline{fc^0} = \overline{fc}$ und $\overline{gc_1{}^0} = \overline{gc}$ ist, so erhält man den Scheitel $c^\times$ des um $[fg]$ umgeklappten Normalschnittes, wenn man den Kreis um f durch c^0 mit dem Kreise um g durch $c_1{}^0$ oder mit $C' = [c' \mid fg]$ zum Schnitt bringt. $\widehat{gc^\times f}$ ist der dritte Flächenwinkel $\widehat{C}$.

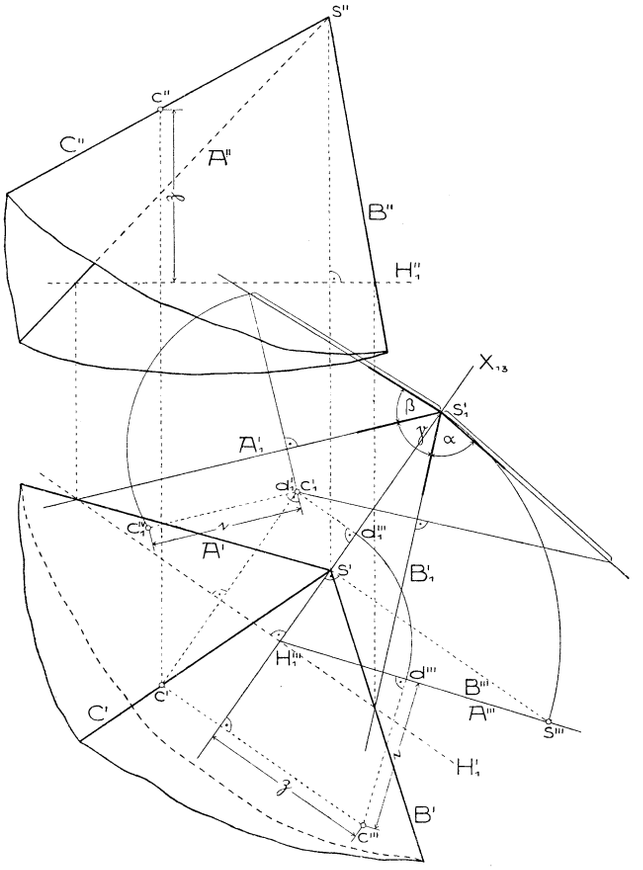


Fig. 89.

Damit ist nach der eingangs gemachten Bemerkung auch die Aufgabe: *Die Winkel eines sphärischen Dreiecks aus seinen Seiten zu finden*, auf zeichnerischem Wege gelöst.

Die allgemeinere Aufgabe, wenn A und B beliebig im Raume liegen, wird auf die eben behandelte zurückgeführt, indem man (Fig. 89) die Ebene $[AB]$ etwa um eine erste Hauptlinie H_1 mittels des Seitenrisses auf $\Pi_3 = [s \mid H_1]$ zu Π_1 parallel dreht. Gelangen dabei s nach s_1, A und B nach A_1 und B_1, so wird auf die oben erläuterte Weise die Gerade C_1 ermittelt, die mit A_1 den Winkel β $(= 45^0)$ und mit B_1 den Winkel α $(= 60^0)$ einschließt, d. h. man konstruiert von einem ihrer Punkte den Grundriß c_1' und seinen Abstand $\overline{c_1 d_1} = \mathfrak{x}$ von der Ebene $[A_1 B_1]$. Hierauf dreht man $[A_1 B_1]$ samt den damit verbunden gedachten Punkten d_1 und c_1 in die frühere Stellung zurück. Diese Punkte mögen dabei in d und c übergehen. d_1, als in Ebene

$[A_1 B_1]$ liegend, hat seinen Seitenriß d_1''' in $X_{13} = [s' \mid H_1']$; trägt man also $\overline{H_1''' d_1'''}$ von H_1''' aus auf $[H_1''' s'''] = A''' = B'''$ ab, so erhält man d''' und in dem senkrecht zu A''' gemessenen Abstande $\mathfrak{c}$ davon den Punkt c'''. Weil d' (Nr. 46) $[d_1' \mid H_1']$ angehört und der Grundriß der zur Ebene $[AB]$ normalen Geraden $[cd]$ in dieselbe Gerade fällt, muß sich in ihr, und zwar in $[c''' \; X_{13}]$, auch c' befinden. Zugleich gibt $\overline{X_{13} c'''} = \mathfrak{z}$ den Abstand des Punktes c von der Horizontalebene durch H_1 an. Durch Abtragen dieser Strecke von H_1'' aus auf der Ordnungslinie durch c' gelangt man zu c''. Jetzt ist $C' = [s'c']$ und $C'' = [s''c'']$.

Auf diese Konstruktion führt auch die Lösung der Aufgabe: *Eine Gerade zu finden, die zwei gegebene windschiefe Geraden unter gegebenen Winkeln schneidet.*

54. Weitere Aufgaben über das Dreikant. Ein Dreikant ist durch irgend drei der sechs Stücke: α, β, γ, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ bestimmt, d. h. es lassen sich aus dreien die übrigen konstruieren. Daraus entspringen sechs verschiedene Aufgaben, jenachdem nämlich gegeben sind:

a) die drei Seiten,
b) zwei Seiten und der zwischenliegende Winkel,
c) zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen,
d) die drei Winkel,
e) zwei Winkel und die zwischenliegende Seite,
f) zwei Winkel und die Gegenseite des einen.

Da die Aufgabe a) in Nr. 53 gelöst worden ist, wollen wir uns vorerst mit Aufgabe b) beschäftigen. Es sei also z. B. *ein Dreikant aus β, γ und $\widehat{A}$ zu konstruieren.*

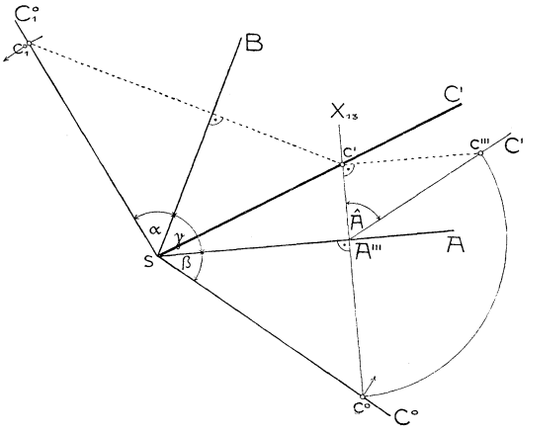


Fig. 90.

Zu diesem Zwecke zeichnen wir (Fig. 90) $\gamma = \widehat{AB}$ und $\beta = \widehat{AC^0}$ in Π_1 nebeneinanderliegend und drehen dann β um A solange, bis seine Ebene gegen Π_1 unter dem Winkel $\widehat{A}$ geneigt ist. Der in C^0 willkürlich gewählte Punkt c^0 bewegt sich dabei in einem Kreise, dessen zu A senkrechte Ebene ihren Grundriß in $[c^0 \mid A]$ hat. Im

Hosted by Google

Seitenriß auf diese Ebene stellt sich die Ebene von β als Gerade C''' dar, die gegen $[c^0\ A] = X_{13} = \Pi_1'''$ unter dem gegebenen Winkel $\widehat{A}$ geneigt ist, und der Drehungskreis von c^0 als Kreis um A''' durch $c^0 = c^{0'''}$. Sein Schnittpunkt c''' mit C''' ist der Seitenriß der gedrehten Lage c von c^0. Daraus ergibt sich c' in X_{13} und der Tafelabstand $z = \overline{c'c'''}$ des Punktes c, mittels dessen nun der (in Fig. 90 weggelassene) Aufriß des Dreikants konstruiert werden könnte. Durch Umklappung der Ebene $[BC]$ nach Π_1 gelangt c in den Schnittpunkt c_1^0 von $[c'\ B]$ mit dem Kreis $(s, \overline{sc^0})$, also C nach $C_1^0 = [sc_1^0]$ und man hat $\widehat{BC_1^0} = \alpha$. Die Konstruktion von $\widehat{B}$ und $\widehat{C}$ kann nun wie in Fig. 88 erfolgen.

Ähnlich geschieht die Lösung der Aufgabe c), also z. B. *ein Dreikant aus β, γ und $\widehat{B}$ zu konstruieren.*

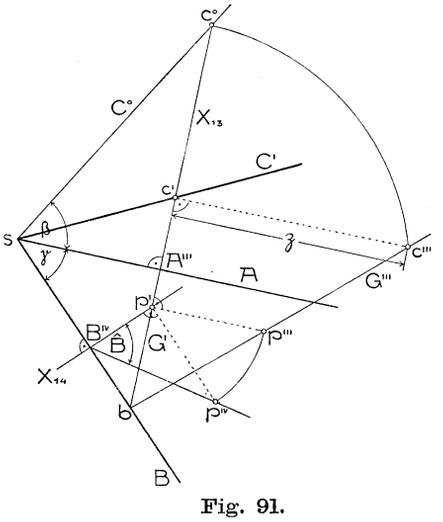


Fig. 91.

Wir zeichnen $\gamma = \widehat{AB}$ und $\beta = \widehat{AC^0}$ (Fig. 91) in Π_1 nebeneinander, wählen auf C^0 willkürlich c^0 und drehen β um A solange, bis c^0 in die durch B unter dem gegebenen Winkel $\widehat{B}$ gelegte Ebene α (zwei Möglichkeiten) hineinfällt. Bezeichnet Π_3 die Ebene des Drehungskreises von c^0, so haben wir demnach einen der Schnittpunkte dieses Kreises mit der Geraden $[\Pi_3 \alpha] = G$ aufzusuchen. Ein Punkt von G ist $b = [c^0\ A \cdot B]$. Nehmen wir ferner in

$$X_{13} = [\Pi_3 \Pi_1] = [c^0\ A] = G'$$

irgend einen Punkt p' an, so kann er als Grundriß eines Punktes p von G betrachtet werden. Um seinen ersten Tafelabstand zu erhalten, legen wir durch ihn eine Ebene $\Pi_4 \perp B$, die Π_1 in $X_{14} = [p'\,|\,B]$ und Ebene α in einer gegen X_{14} unter dem gegebenen Winkel $\widehat{B}$ geneigten Geraden schneidet. In der Umklappung von Π_4 erscheint dieser Winkel in wahrer Größe und in seinem zweiten Schenkel liegt die Umklappung p^{IV} von p; zugleich ist $\overline{p'p^{IV}}$ der gesuchte Tafelabstand. Klappen wir nun auch Π_3 um, so kommt p nach p''' ($[p'p'''] \perp X_{13}$, $\overline{p'p'''} = \overline{p'p^{IV}}$), G nach $[bp'''] = G'''$ und der Drehungskreis des Punktes c^0 in den Kreis um den Punkt $A''' = [A\,X_{13}]$ durch c^0. Einer der zwei Schnittpunkte dieses Kreises mit G''' (der allein in diesem Falle zu einem Dreikant mit dem Winkel $\widehat{B}$, nicht $180^0 - \widehat{B}$, führt) ist in Fig. 91

Hosted by Google

mit c''' bezeichnet. Der Fußpunkt des aus ihm auf X_{13} gefällten Lotes ist der Grundriß c' des gesuchten Punktes c, $\zeta = \overline{c'c'''}$ dessen erster Tafelabstand und $[sc] = C$ die dritte Kante der verlangten körperlichen Ecke. Die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten sind aus der entsprechenden Aufgabe für das sphärische Dreieck bekannt.

Die Aufgaben d), e), f) lassen sich mittels der folgenden Bemerkung auf die Aufgaben a), b), c) zurückführen. Fällt man aus einem im Innern des Dreikants ABC gelegenen Punkte die Lote auf dessen Ebenen, so erhält man das *Polardreikant* $A_1B_1C_1$ zum ersteren. Jedem Flächenwinkel von ABC ist dadurch ein Kantenwinkel von $A_1B_1C_1$ und umgekehrt zugeordnet ($\widehat{A}$ und $\widehat{B_1C_1}$, $\widehat{BC}$ und $\widehat{A_1}$ usw.). Man erkennt zugleich, *daß die zugeordneten Kanten- und Flächenwinkel der polaren Dreikante einander zu 180° ergänzen.*

Soll nun z. B., der Aufgabe d) entsprechend, ein Dreikant aus den drei Winkeln $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ konstruiert werden, so zeichne man (nach Nr. 53) das Dreikant mit den drei Seiten $180^0 - \widehat{A}$, $180^0 - \widehat{B}$, $180^0 - \widehat{C}$; sein Polardreikant ist dann das geforderte. Ähnlich verfährt man in den Fällen e) und f).

Die Aufgaben d), e), f) lassen natürlich auch direkte Lösungen zu.[1]) Wir wollen aber der Kürze halber nur für die häufiger auftretende Aufgabe e) eine solche Lösung betrachten, also z. B. *ein Dreikant aus α, $\widehat{B}$ und $\widehat{C}$ konstruieren.* Wir nehmen zu diesem Zwecke $\alpha = \widehat{BC}$ in Π_1 beliebig an und zeichnen die Winkel $\widehat{B}$ und $\widehat{C}$ (Fig. 92) so, daß ihre Scheitel b und c auf B bzw. C liegen, während je ein Schenkel zu diesen Geraden senkrecht steht. Diese Winkel sind dann die nach Π_1 umgeklappten zu B und C gehörigen Normalschnitte. Um nun außer $s = [BC]$ einen Punkt der dritten Kante A zu erhalten, zeichnen wir im Grundriß jene ersten Hauptlinien B_1, C_1 der Ebenen β und γ, die den ersten Tafelabstand ζ besitzen. Zu diesem Zwecke nehmen wir in den umgeklappten Schenkeln der beiden Normalschnitte die Punkte $b_1{}^0$ und $c_1{}^0$ so an, daß sie von den anderen Schenkeln die Abstände ζ haben, und ziehen

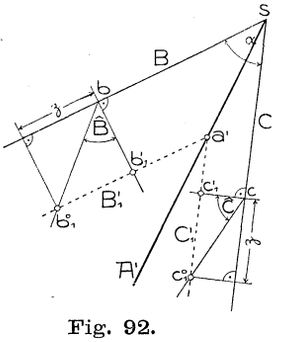


Fig. 92.

$$B_1' = [b_1{}^0 \| B], \quad C_1' = [c_1{}^0 \| C].$$

Der Punkt a mit dem Grundriß $a' = [B_1'C_1']$ und dem Tafelabstande ζ gehört dann A an; sein Aufriß folgt daraus. Durch die nun leicht

1) Vgl. *Chr. Wiener,* Lehrb., I, Nr. 132, 133; *E. Salfner,* Z. Math. Phys. 46 (1901), S. 307—310.

Hosted by Google

ausführbaren Umklappungen der Ebenen $[BA]$ und $[CA]$ findet man β und γ und weiter $\widehat{A}$.

Für $\widehat{B} = \widehat{C}$ wird A' die Symmetrale von α. Man hat also den

Satz 1: *Besitzen zwei Ebenen gleiche Horizontalneigung, so halbiert ihre Schnittlinie im Grundriß den Winkel ihrer in derselben Horizontalebene liegenden Hauptlinien.*

Mit den obigen Aufgaben sind zugleich die Hauptfälle der Auflösung sphärischer Dreiecke auf konstruktivem Wege erledigt.

55. Ausführung von Konstruktionen in begrenzter Zeichenebene. Bei der Lösung von Aufgaben wurde bisher stillschweigend die Zeichenfläche als unbegrenzt vorausgesetzt oder angenommen, daß sämtliche in den Konstruktionen auftretenden Punkte und Geraden innerhalb des Zeichenblattes zu liegen kommen. Selbst wenn letzteres aber für die ursprünglich gegebenen Elemente gilt, so führen doch die Konstruktionen häufig zu Punkten, die außerhalb des Zeichenblattes liegen oder, wie wir kurz sagen wollen, *unzugänglich* sind. Zur Sicherstellung der praktischen Durchführbarkeit der bisherigen oder in der Folge noch zu erörternden Konstruktionen gehörte noch der Nachweis, daß man mit unzugänglichen Punkten und Geraden ebenfalls zu konstruieren vermöge. Um aber nicht zu weit in die Theorie der planimetrischen Konstruktionen zu geraten, sollen aus den zahlreichen möglichen Fällen nur einige der häufigst vorkommenden herausgegriffen werden.

Wir setzen dabei voraus, daß *ein unzugänglicher Punkt als Schnitt zweier zugänglichen Geraden* bestimmt sei.

Aufgabe 1: *Der zugängliche Punkt p ist mit dem unzugänglichen Punkt $x = [AB]$ zu verbinden.*

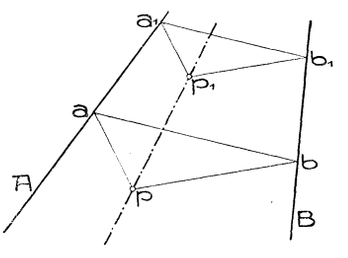


Fig. 93.

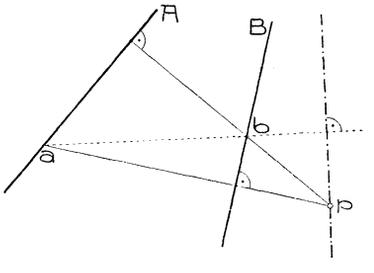


Fig. 94.

Man zeichne (Fig. 93) ein Dreieck $p\,a\,b$ mit den Ecken a und b auf A und B, dann Dreieck $a_1\,b_1\,p_1$ mit parallelen Seiten so, daß a_1 und b_1 gleichfalls auf A und B liegen. Die beiden Dreiecke sind dann per-

Hosted by Google

spektiv-ähnlich mit x als Ähnlichkeitszentrum. Mithin geht die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte p und p_1 durch x oder $[p\,p_1]$ ist die gesuchte Gerade.

Eine andere Lösung derselben Aufgabe[1]) beruht auf dem Satz, daß die drei Höhen eines Dreiecks durch denselben Punkt gehen. Fällt man nämlich (Fig. 94) aus p die Normalen auf A und B und sucht deren Schnitte b und a mit B und A ($b=[p\,|\,A\cdot B]$, $a=[p\,|\,B\cdot A]$), so ist x der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $a\,b\,p$. Die dritte Höhe $[p\;ab]$ ist die gesuchte Gerade $[px]$.

Die letzte Methode empfiehlt sich auch zur Lösung der

Aufgabe 2: *Durch den unzugänglichen Punkt $x=[AB]$ eine Parallele zur Geraden P zu zeichnen (Fig. 95).*

Schneidet eine Normale zu P die Geraden A und B in den zugänglichen Punkten a und b, so suche man den Höhenschnittpunkt h des Dreiecks $a\,b\,x$ ($h=[a\,|\,B\cdot b\;A]$). $[h\parallel P]$ ist dann die gesuchte Gerade.

Durch zwei unzugängliche Punkte ist im allgemeinen eine *unzugängliche Gerade* bestimmt.

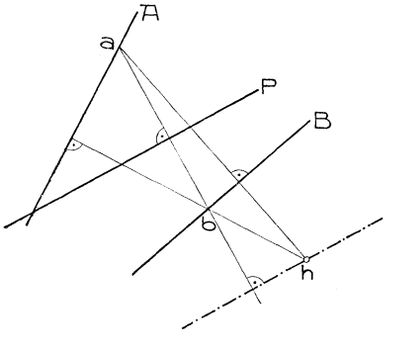


Fig. 95.

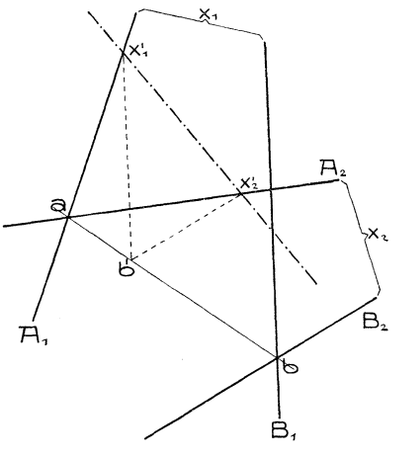


Fig. 96.

Aufgabe 3: *Man suche die Richtung einer durch zwei unzugängliche Punkte $x_1=[A_1B_1]$, $x_2=[A_2B_2]$ bestimmten unzugänglichen Geraden X (Fig. 96).*

Von den weiteren vier Schnittpunkten der Geraden A_1, B_1, A_2, B_2 können wir zwei gegenüberliegende, etwa $a=[A_1A_2]$ und $b=[B_1B_2]$, als zugänglich voraussetzen, da man sonst die beiden Geradenpaare (nach Aufg. 1) durch andere die Punkte x_1 und x_2 bestimmende

1) Nach *R. Schüssler*, Orthogonale Axonometrie, Leipzig u. Berlin 1905, S. 20 (Fig. 14).

Hosted by Google

ersetzen würde. Wir zeichnen nun zum Dreieck $b\,x_1\,x_2$ ein für das Ähnlichkeitszentrum a perspektiv-ähnliches, indem wir durch irgend einen Punkt b' von $[ab]$ Parallele zu B_1 und B_2 bis zu den Schnitten x_1' und x_2' mit A_1 bzw. A_2 ziehen. Daraus folgt, daß $[x_1'x_2'] \parallel X$ ist also die gesuchte Richtung angibt.

Aufgabe 4: *Man bestimme den Schnittpunkt x einer zugänglichen Geraden G mit der durch zwei unzugängliche Punkte $x_1 = [A_1 B_1]$, $x_2 = [A_2 B_2]$ gegebenen Geraden X (Fig. 97).*

Zur Bestimmung von x genügt die Ermittlung einer zweiten zugänglichen Geraden durch x.

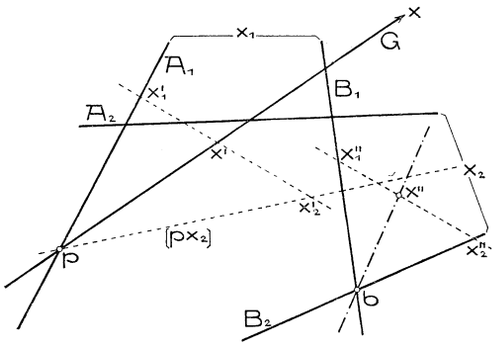


Fig. 97.

G schneide eine der übrigen Geraden, etwa A_1, in dem zugänglichen Punkt p. Dann zeichnen wir nach Aufg. 1 die Gerade $[p\,x_2]$, ermitteln nach Aufg. 3 die Richtung von X und schneiden die Geraden A_1, $[p\,x_2]$ und G durch eine Parallele zu X in den Punkten x_1', x_2' und x'. Sei ferner ein zugänglicher Schnittpunkt der Geraden A_1, B_1, A_2, B_2, etwa $b = [B_1 B_2]$ ausgewählt, so werden die Geraden $B_1 B_2$ und $[bx]$ von einer Parallelen zu X (die mit der früheren identisch sein darf) in Punkten x_1'', x_2'', x'' so geschnitten, daß

$$\overline{x_1''\,x''} : \overline{x_2''\,x''} = \overline{x_1'\,x'} : \overline{x_2'\,x'}.$$

Konstruiert man darnach x'', so ist $[bx'']$ die gesuchte Gerade durch x.

Schneiden sich G und $[bx'']$ innerhalb der Zeichenfläche, so ist X zugänglich und läßt sich mittels der gefundenen Richtung durch x zeichnen.

Aufgabe 5: *Man bestimme den Schnittpunkt zweier unzugänglichen Geraden $X = [x_1 x_2]$ und $Y = [y_1 y_2]$ (Fig. 98).*

Die Bestimmung geschieht durch Konstruktion zweier zugänglichen Geraden nach dem Punkte $z = [XY]$. Wir zeichnen zur Ermittlung einer solchen Geraden die zu X und Y parallelen Geraden X', Y' durch irgend einen zugänglichen Punkt z' (nach Aufg. 3), ferner noch zwei parallele Geraden Z, Z', von denen letztere X' und Y' bezüglich in den zugänglichen Punkten y' und x' schneiden möge.

Die unzugänglichen Schnittpunkte von Z mit X und Y nennen wir y bzw. x. Da die entsprechenden Seiten der Dreiecke xyz und $x'y'z'$ parallel sind, müssen die Geraden $[xx']$, $[yy']$, $[zz']$ durch

Hosted by Google

einen Punkt s gehen. Zeichnen wir also nach Aufg. 4 u. 1 $[xx']$ und $[yy']$, so ist $s = [xx' \cdot yy']$ und $[sz']$ eine zugängliche Gerade durch z. Eine zweite erhält man nach Aufg. 4, indem man z als Schnitt von X oder Y mit $[sz']$ auffaßt.

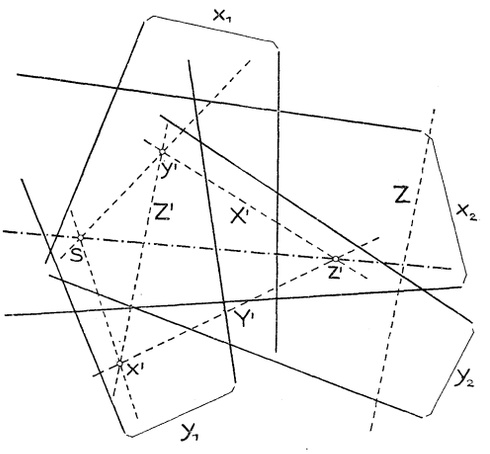


Fig. 98.

Hiermit sind die auf das Verbinden und Schneiden unzugänglicher Punkte und Geraden bezüglichen Aufgaben prinzipiell gelöst, wenn sich auch diese Lösungen nicht immer einfach gestalten.

Bei der Lösung von *Maßaufgaben*, in denen unzugängliche Elemente auftreten, empfiehlt sich sehr häufig die Anwendung der ganz allgemeinen Methode des Zeichnens einer ähnlich verkleinerten Figur. Es soll diese Methode bloß an einer Aufgabe erläutert werden, nämlich:

Aufgabe 6: *Die Schnittpunkte einer zugänglichen Geraden G mit einem Kreise zu ermitteln (oder wenigstens zu bestimmen), der durch den unzugänglichen Punkt $x_1 = [A_1 B_1]$ geht und den unzugänglichen Mittelpunkt $m = [MN]$ hat (Fig. 99).*

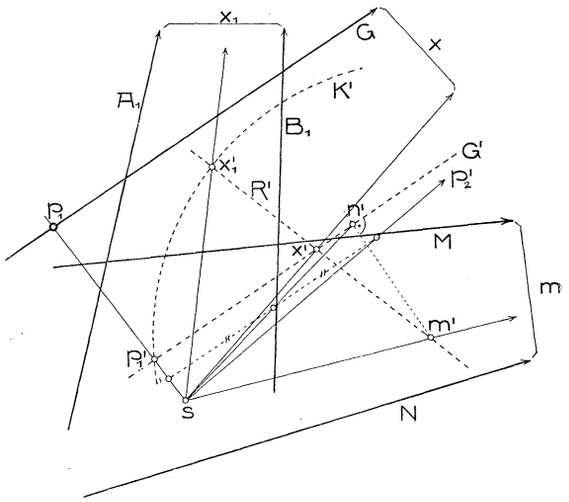


Fig. 99.

Wir zeichnen nach Aufg. 1 aus einem beliebig gewählten zugänglichen Punkt s die Geraden $[sm]$, $[sx_1]$ und $[sx]$, wo $x = [G \cdot mx_1]$ ist, ferner nach Aufg. 3 eine beliebige zu $[mx_1] = R$ Parallele R', die $[sm]$, $[sx_1]$, $[sx]$ in den zugänglichen Punkten m', x_1', x' schneidet. Betrachten wir R' als die entsprechende Gerade zu R in zwei perspektivähnlichen Systemen mit dem Ähnlichkeitszentrum s, so entsprechen den Punkten x_1, m, x die Punkte

x_1', m', x' von R', mithin der Geraden G die Gerade $G' = [x' \mid G]$ und dem Kreise K um m durch x_1 der Kreis K' um m' durch x_1'. K' schneidet G' in zwei Punkten p_1', p_2', von denen in unserer Figur nur ersterer zugänglich sein soll. Die ihnen im andern System entsprechenden Punkte $p_1 = [G \cdot sp_1']$ und $p_2 = [G \cdot sp_2']$ sind die gesuchten Schnittpunkte. Um $[sp_2']$ zu erhalten, zeichnen wir die Mitte n' von $p_1'p_2'$ ($n' = [m' \mid G' \cdot G']$), ziehen $[sn']$ und, näher an s, eine Parallele zu G'. Da auf letzterer $[sp_1']$, $[sn']$ und $[sp_2']$ gleichweit voneinander entfernte Punkte ausschneiden, so ist durch die beiden ersten Punkte auch der dritte (bei genügender Nähe der Parallelen zu G' an s sicherlich zugängliche) Punkt gegeben, mithin auch $[sp_2']$.

56. Übungsaufgaben. Auf Grund der in diesem Kapitel behandelten Grundaufgaben lassen sich nach einfachen elementargeometrischen Überlegungen die nachfolgenden zusammengesetzteren Aufgaben lösen, deren zeichnerische Durcharbeitung empfohlen sei.

1. Vier Punkte a, b, c, d sind als Ecken eines windschiefen Vierecks gegeben. Man schneide seine Seiten mit einer Ebene derart, daß die vier Schnittpunkte die Eckpunkte eines Parallelogramms von vorgegebenem Umfang bilden.

2. Gegeben sind drei windschiefe Geraden A, B, C. Man suche die Achse eines Drehzylinders, der durch A geht und die Geraden B und C berührt. (Seitenriß auf eine zu A senkrechte Ebene benutzen!)

3. Gegeben zwei Punkte a und b und eine Gerade G. Man zeichne über ab als Diagonale ein Rechteck, von dem ein dritter Eckpunkt in G liegt.

4. Gegeben eine beliebig im Raume liegende körperliche Ecke und auf zwei ihrer Kanten je ein Punkt. Durch diese beiden Punkte sind jene Ebenen zu legen, die aus dem Dreikant ein Dreieck von gegebenem Inhalte ausschneiden. Die Gestalt eines solchen Dreiecks ist zu ermitteln.

5. Einer Kugel mit dem Zentrum o und dem Halbmesser 7 cm ist ein Würfel so einzuschreiben, daß eine Fläche parallel zu einer durch ihre Spuren gegebenen Ebene und eine dieser Fläche angehörende Kante parallel mit jener Geraden ist, die den Winkel der beiden Spuren halbiert. Ferner ist für eine beliebige Lichtrichtung der Schatten des Würfels auf die Projektionsebenen zu ermitteln.

6. Gegeben eine Ebene ε und drei Punkte a, b, c. Man suche in ε jene Punkte, deren Verbindungslinien mit a, b und c gleiche Neigung gegen ε besitzen.

7. Gegeben zwei Ebenen α und β und eine Gerade G. Durch G ist eine Ebene derart zu legen, daß ihre Schnittlinien mit α und β aufeinander senkrecht stehen.

8. Durch den Punkt p ist eine Ebene zu legen, deren Abstände

Hosted by Google

von drei gegebenen Punkten a, b, c sich wie $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}:\mathfrak{c}$ verhalten (insbesondere wie $1:1:1$).

9. Es ist ein Würfel von gegebener Seitenlänge so zu zeichnen, daß drei von einer Ecke ausgehende Kanten durch drei vorgegebene Punkte gehen.

10. Man ermittle die kürzeste zur Grundrißebene (oder einer beliebigen Ebene) parallele Transversale zweier windschiefen Geraden A und B.

11. Ein gegebenes dreiseitiges Prisma ist durch eine Ebene nach einem gleichseitigen Dreieck zu schneiden (oder so zu schneiden, daß das Schnittdreieck einem gegebenen Dreieck ähnlich ist).

12. Von einem Würfel (oder Oktaeder) ist der Mittelpunkt m gegeben; eine Kante soll in der gegebenen Geraden G liegen. Man zeichne diesen Körper unter Benutzung von Seitenrissen.

13. Ein reguläres Fünfeck ist gleichzeitig Auf- und Grundriß eines im Raume liegenden Fünfecks. Man ermittle dessen Gestalt.

14. Es ist der Mittelpunkt einer Kugel zu suchen, die durch drei gegebene Punkte geht und eine gegebene Ebene berührt.

15. Von einem regulären Oktaeder (oder Rhombendodekaeder) sind der Mittelpunkt im Auf- und Grundriß, eine Achse und die Richtungen der beiden andern Achsen jedoch bloß im Grundriß gegeben. Man zeichne den Körper.

16. Zwei windschiefe Geraden sind gegeben. Man zeichne ein gleichschenkeliges Dreieck von gegebener Höhe und gegebenem Flächeninhalte, dessen Basis in der einen und dessen Spitze in der anderen Geraden liegt.

17. Ein Punkt p ist um eine Gerade A solange zu drehen, bis sein Auf- und Grundriß zusammenfallen (oder bis er in eine Ebene α fällt).

18. Man zeichne jenes reguläre Tetraeder, von dem zwei Gegenkanten in zwei gegebenen zueinander senkrechten windschiefen Geraden liegen.

19. Durch einen Punkt p sind jene Geraden zu legen, die von zwei gegebenen windschiefen Geraden A und B gegebene kürzeste Entfernungen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ besitzen.

20. Gegeben ein Punkt a und eine Gerade G. Man ermittle die Gestalt desjenigen in der Ebene $[Ga]$ liegenden Parallelogrammes, das in beiden Projektionen als Rechteck erscheint und von dem ein Eckpunkt in a, ein anderer in G liegt.

21. Gegeben ist der Aufriß einer Fläche eines regulären Tetraeders und eine Ebene, in der die Gegenecke liegen soll. Man zeichne dieses Tetraeder im Auf- und Kreuzriß.

22. Ein gegebenes Parallelepiped ist nach einem Quadrat zu schneiden.

Hosted by Google

23. An zwei gegebene Kugeln sollen von einem Punkte p aus die gemeinsamen Tangenten gelegt werden (Dreikantaufgabe).

24. Durch eine Gerade G ist eine Ebene zu legen, die mit einer zweiten Geraden L einen Winkel einschließt, dessen Sinus 0,4 ist.

25. Gegeben eine Ebene ε und eine Strecke ab; man zeichne jenen Würfel (jenes Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder), dessen Mittelpunkt in ε liegt und der (das) ab zur Kante hat.

26. Man suche jene Gerade G, die drei gegebene Geraden A, B, C in Punkten a, b, c derart schneidet, daß die Proportion $\overline{ab} : \overline{bc} = 1 : 2$ besteht (oder daß $\overline{ab} = \overline{bc}$ ist).

27. Man zeichne jenen Würfel (jenes Oktaeder oder Ikosaeder), von dem die gegebenen Punkte a und b Gegenecken sind und von dem ein Eckpunkt von der Grundrißebene die gegebene Entfernung z haben soll.

28. Eine Ebene (Dachfläche) sei durch zwei zu Π_1 parallele Geraden G und H bestimmt. Ein rechteckiger Balken von gegebenen Abmessungen liegt derart auf Ebene $[GH]$, daß seine Längskanten mit G einen Winkel von 30^0 (oder 45^0) einschließen. Man zeichne diesen Balken.

29. Gegeben sind zwei gleichlange Strecken ab und cd, von denen die erste parallel zu Π_1, die zweite parallel zu Π_2 liegt. Man ermittle jene Achse, um welche die Strecke ab gedreht werden muß, damit sie mit cd zur Deckung komme. Wie groß ist der Drehungswinkel?

30. Das gegebene Dreieck abc ist um eine gegebene Gerade G solange zu drehen, bis es mit Π_2 einen Winkel von 60^0 einschließt (oder auf Π_2 senkrecht steht).

31. Es ist ein reguläres Tetraeder zu zeichnen, das die Strecke ab zur Kante hat und dessen Gegenkante zu einer gegebenen Ebene ε parallel ist.

32. Es ist ein Rhomboeder darzustellen, das die gegebene Strecke ab zur Hauptachse hat und von dem eine der von a ausgehenden Kanten mit Π_1 und Π_2 den Winkel α einschließt.

33. Man suche einen Punkt, der von drei parallelen Geraden A, B, C und einer beliebigen vierten Geraden D gleich weit absteht.

34. Gegeben sind vier Gerade A, B, C, D; man verschiebe A parallel zu sich selbst derart, daß sie von den drei anderen Geraden gleiche kürzeste Abstände erhält.

Hosted by Google

Zweiter Abschnitt.

Kurven und Flächen. Lösung sie betreffender Aufgaben in zugeordneten Normalrissen.

I. Kapitel.

Allgemeines über Kurven.

57. Ebene und räumliche Kurven. Transzendente und algebraische ebene Kurven; Ordnungszahl der letzteren. Eine krumme Linie oder *Kurve* kann als die Bahn eines sich bewegenden Punktes angesehen werden. Liegen alle Punkte der Kurve in einer Ebene, so heißt sie *eben* oder *einfach gekrümmt* (z. B. Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel), andernfalls *uneben*, *räumlich*, *doppelt gekrümmt*, *gewunden* oder eine *Raumkurve* (z. B. Schraubenlinie, Schnittkurve zweier beliebigen Drehkegel). Gewöhnlich nimmt man an, die Kurve sei eine *gesetzmäßige*, d. h. die Lage eines jeden ihrer Punkte sei durch dasselbe Gesetz bestimmt oder nach derselben Konstruktionsvorschrift gefunden. Nur durch ein solches Gesetz ist es möglich, beliebig viele Punkte der Kurve und damit sie selbst genau zu verzeichnen (Beispiel: Parabel als Gesamtheit aller Punkte, die von einer festen Geraden und einem festen Punkte dieselbe Entfernung haben). Wenn dagegen eine Kurve willkürlich gezeichnet vorliegt, so läßt sich nur ein mathematisches Gesetz formulieren, das die Punkte dieser Kurve angenähert befolgen.

Eine Kurve soll in einem Punkte p *stetig*[1]), genauer *punktweise stetig*, heißen, wenn in jeder beliebig kleinen Entfernung von p noch ein ihm vorhergehender und ein ihm nachfolgender Kurvenpunkt existiert. *Punktweise unstetig* ist daher eine Kurve nur an einem freien Ende. Besteht eine Kurve aus getrennten Teilen, ihren *Ästen* oder *Zweigen*, so ist sie dennoch überall punktweise stetig, sobald die Äste im Endlichen oder Unendlichen geschlossen sind. Letzteres tritt z. B. bei der Geraden, der Parabel und der Hyperbel ein.

Wir betrachten vorerst *ebene Kurven*. Wird in einer Ebene etwa ein rechtwinkeliges Koordinatensystem gewählt, so ist jede zwischen den Koordinaten x, y bestehende Gleichung

1) *Chr. Wiener*, Lehrb., I, Nr. 190.

Hosted by Google

$$f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$$

ein Gesetz, durch das die Punkte einer Kurve bestimmt werden[1]). Ist diese Gleichung *algebraisch*, d. h. $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ eine ganze rationale Funktion von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ mit reellen Koeffizienten oder in eine solche umformbar, so nennt man die Kurve eine *algebraische* u. zw. *von der n^{ten} Ordnung*, wenn die höchste Dimension eines Gliedes (Exponentensumme von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$) in $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ n ist. Nichtalgebraische Kurven heißen *transzendent* (z. B. $\mathfrak{y} = e^{\mathfrak{x}}$). Algebraische Kurven sind nie punktweise unstetig.

Genügen komplexe Werte von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ der Kurvengleichung, so sagt man, sie bestimmen einen *imaginären* oder *komplexen Kurvenpunkt*. Die zu $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ konjugiert komplexen Werte genügen dann gleichfalls der Kurvengleichung (wenn diese, wie oben angenommen, reell ist) und bestimmen den *konjugiert imaginären Punkt*. Zieht man diese (geometrisch nicht existierenden aber gewisse geometrische Eigenschaften bestimmenden) imaginären Punkte mit in Betracht, so besteht der

Satz 1: *Eine ebene algebraische Kurve n^{ter} Ordnung wird von jeder Geraden ihrer Ebene in n Punkten geschnitten.*

Hierbei ist aber jeder Punkt, in dem zufolge der besonderen Lage der Geraden r sonst getrennte Schnittpunkte zusammenrücken, r-fach zu zählen.

Der Beweis für dieses Gesetz ergibt sich rechnerisch sehr leicht. Es sei $\mathfrak{y} = a\mathfrak{x} + b$ die Gleichung der Geraden. Setzt man diesen Ausdruck für $\mathfrak{y}$ in die Kurvengleichung $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$ ein, so erhält man eine Gleichung n^{ten} Grades für die Abszissen der Schnittpunkte der Geraden mit der Kurve. Eine solche Gleichung hat aber bekanntlich n reelle oder imaginäre, getrennte oder zusammenfallende Wurzeln.

Insbesondere besitzt eine Kurve n^{ter} Ordnung stets n unendlichferne Punkte (Schnittpunkte mit der unendlichfernen Geraden).

Die imaginären Schnittpunkte einer reellen Geraden mit einer reellen algebraischen Kurve[2]) treten immer paarweise konjugiert auf. Eine Kurve ungerader (z. B. dritter) Ordnung wird daher von einer reellen Geraden in mindestens einem reellen Punkt geschnitten.

Von Satz 1 gilt auch, wie die Funktionentheorie lehrt, die Umkehrung:

Satz 2: *Eine Kurve, die von jeder Geraden ihrer Ebene in*

1) Man kann dafür auch sagen: Ein Punkt bewege sich nach irgend einem Gesetz auf einer Geraden, während diese sich nach irgend einem anderen Gesetz senkrecht zu ihrer Richtung verschiebt.

2) Allgemeiner einer Kurve, deren Gleichung $f(x, y) = 0$ nur reelle Koeffizienten besitzt.

Hosted by Google

n reellen oder imaginären, auch teilweise zusammenfallenden Punkten geschnitten wird, ist eine algebraische Kurve n^{ter} Ordnung[1]).

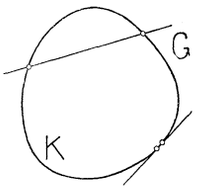


Fig. 100.

Bei der Anwendung dieses Satzes beachte man jedoch, daß zur Beurteilung der Schnittpunktezahl einer Geraden mit einer Kurve deren Entstehungsgesetz bekannt sein muß. Dem bloßen Augenscheine nach müßte man z. B. jede überall konvexe, geschlossene Kurve K (Fig. 100) als Kurve 2. Ordnung erklären, da sie von jeder Geraden, die sie überhaupt schneidet, in zwei Punkten geschnitten wird. Von einer bloß durch Zeichnung gegebenen Kurve läßt sich aber nicht einmal sagen, ob sie algebraisch oder transzendent ist.

Die einzige Kurve erster Ordnung ist die Gerade. Kurven höherer als erster Ordnung können in Teilkurven niederer Ordnungen zerfallen (*zerfallende Kurven n^{ter} Ordnung*). Z. B. ist die Gesamtheit von n Geraden der Ebene als Kurve n^{ter} Ordnung aufzufassen, weil sie von jeder geraden Linie dieser Ebene in n (reellen) Punkten geschnitten wird.

Bezüglich der Kurven zweiter Ordnung nehmen wir aus der analytischen Geometrie den Satz herüber:

Satz 3: *Die einzigen nichtzerfallenden Kurven zweiter Ordnung sind Ellipse (Kreis), Hyperbel und Parabel.*

Man faßt sie auch unter dem Namen *Kegelschnitte* zusammen.

Jede Kurve zweiter Ordnung besitzt zwei unendlichferne Punkte, die entweder konjugiert imaginär, reell getrennt oder zusammenfallend sein können. Da, wie aus den Elementen bekannt, die Ellipse keinen reellen unendlichfernen Punkt, die Hyperbel deren zwei, nämlich die der Asymptoten, und die Parabel nur einen, nämlich den der Achse, besitzt, so kann man mit Berücksichtigung des Satzes 3 sagen:

Satz 4: *Eine Kurve zweiter Ordnung ist eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, jenachdem sie die unendlichferne Gerade ihrer Ebene in konjugiert imaginären, reell getrennten oder zusammenfallenden Punkten schneidet.*

Diese Unterscheidung der drei Arten von Kurven zweiter Ordnung nach ihren unendlichfernen Punkten ist von Maßverhältnissen unabhängig und wird wegen ihrer leichten Handhabung im folgenden beständig zur Anwendung kommen.

Paare reeller Geraden sind als zerfallende Kurven zweiter Ordnung aufzufassen. Jenachdem solche Paare aus sich schneidenden oder parallelen (auch zusammenfallenden) Geraden bestehen, sind sie als ausgeartete Hyperbeln oder Parabeln zu betrachten. Zwei durch einen

1) Sobald sie überhaupt zu den sogenannten analytischen Kurven gehört.

Hosted by Google

reellen endlichfernen Punkt gehende konjugiert imaginäre Geraden sind als Ausartung einer Ellipse aufzufassen.

Eine Kurve zweiter Ordnung und eine Gerade bilden zusammen eine zerfallende Kurve dritter Ordnung, zwei Kurven zweiter Ordnung eine zerfallende Kurve vierter Ordnung.

Die Kenntnis der Ordnung einer Kurve ist bei deren Verzeichnung von Wert. Denn weiß man z. B., daß eine zu zeichnende Kurve von der dritten Ordnung sein soll, so darf jedenfalls keiner ihrer Teile nebenstehende (Fig. 101) Form haben, da es sonst gerade Linien gäbe, die die Kurve in vier Punkten schnitten.

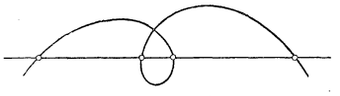


Fig. 101.

In der Gleichung einer Kurve n^{ter} Ordnung treten höchstens $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Koeffizienten auf, von denen einer durch Division entfernt werden kann, sodaß $\frac{n(n+3)}{2}$ wesentliche Koeffizienten übrig bleiben. Die Bedingung dafür, daß die Kurve durch einen vorgegebenen Punkt gehe, drückt sich linear in den Koeffizienten aus. *Mithin ist eine ebene Kurve n^{ter} Ordnung im allgemeinen durch $\frac{n(n+3)}{2}$ ihrer Punkte eindeutig bestimmt.* Insbesondere ist eine Kurve zweiter Ordnung durch fünf, eine Kurve dritter Ordnung durch neun ihrer Punkte bestimmt.

58. Tangente und Asymptote einer ebenen Kurve. Doppelpunkte und Doppeltangenten. Verbindet man irgend einen Punkt p einer ebenen Kurve K (Fig. 102) mit einem zweiten Punkte q, so nennt man $[pq]$ eine *Sekante* (pq eine *Sehne*) von K. Rückt q auf K (also über $q_1, q_2, \ldots$) dem Punkte p unbegrenzt nahe, so dreht sich die Sekante um p und erreicht für die gebräuchlichen Kurven eine *Grenzlage T*, die man die *Tangente* von K in p nennt. Fällt q mit p zusammen, so wird ihre Verbindungslinie unbestimmt, könnte nämlich jede Gerade durch p sein. Man betrachtet aber, wenn q sich auf der Kurve p unbegrenzt nähert, die Tangente als die Verbindungslinie der beiden zusammenfallenden Punkte oder, wie man auch sagt, als *Verbindungslinie zweier unendlich naher* oder *zweier benachbarter Kurvenpunkte.*

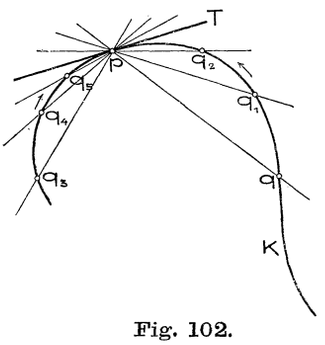


Fig. 102.

Nähert sich ein Punkt q dem Punkte p auf der Kurve von der andern Seite (in Fig. 102 von q_3 über q_4, q_5) unbegrenzt, so kann

Hosted by Google

die Sekante dieselbe Grenzlage wie vorher oder eine andere erreichen. Im ersten Falle heißt die Kurve in diesem Punkte *stetig in bezug auf die Tangente*[1]) (Fig. 102), im zweiten Falle *unstetig in bezug auf die Tangente* (Fig. 103a). *Algebraische Kurven sind bezüglich der Tangente immer stetig.* Wohl kann eine solche Kurve in einem Punkte p zwei oder mehrere Tangenten besitzen; dann geht sie aber zweimal oder mehrmals stetig durch den Punkt hindurch, hat also für jeden dieser Kurvenzweige eine einzige Tangente. Jenachdem zwei, drei, ... n Zweige der Kurve durch einen Punkt p gehen, heißt er *Doppelpunkt* (Fig. 103b), *dreifacher* (Fig. 103c), ... *n-facher Punkt.*

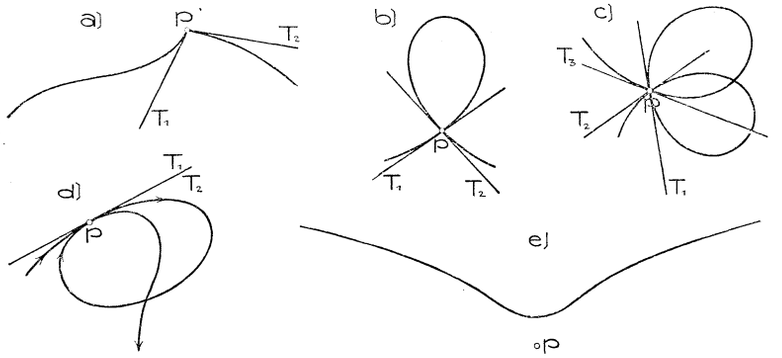


Fig. 103 a — e.

Jede Gerade allgemeiner Lage durch einen n-fachen Punkt schneidet die Kurve hier n mal, nämlich jeden der n Zweige einmal; jede Tangente an einen der Zweige enthält aber außerdem noch den dem n-fachen Punkt auf dem betreffenden Zweig benachbarten Punkt, schneidet also die Kurve $(n+1)$ mal. Eine nichtzerfallende Kurve n^{ter} Ordnung kann daher höchstens einen $(n-1)$-fachen Punkt besitzen. Doppelpunkte treten erst bei den Kurven dritter Ordnung auf; eine Kurve zweiter Ordnung mit einem Doppelpunkt zerfällt in zwei gerade Linien. In einem n-fachen Punkte können von den n Tangenten auch zwei oder mehrere zusammenfallen. Aus einem Doppelpunkt entsteht dann eine *Spitze* (vgl. Nr. 59c)). Der in (Fig. 103d) dargestellte *Selbstberührungspunkt* entsteht durch Zusammenrücken zweier aufeinanderfolgenden Doppelpunkte. Es gibt auch Doppel- oder mehrfache Punkte mit ausschließlich (paarweise konjugierten) imaginären Tangenten. Man nennt sie *isolierte Punkte* oder *Einsiedlerpunkte*[2]) (Fig. 103e), weil sie mit den übrigen Kurvenpunkten nicht reell zusammenhängen.

1) *Chr. Wiener,* Lehrb., I, Nr. 196.

2) Zuweilen wird auch etwa ein dreifacher Punkt mit einer reellen und zwei konjugiert imaginären Tangenten isoliert genannt.

Hosted by Google

Für späteren Gebrauch sei ausdrücklich das Ergebnis hervorgehoben:

Die Tangenten in einem Doppelpunkt einer Kurve sind entweder reell getrennt, zusammenfallend oder konjugiert imaginär.

Die Doppel- und Mehrfachpunkte gehören zu den *singulären Kurvenpunkten* und spielen bei der Einteilung der algebraischen Kurven einer bestimmten Ordnung in Arten eine wichtige Rolle.[1])

Für einen unendlichfernen Kurvenpunkt p gelten dieselben Bemerkungen. So z. B. läßt sich seine Tangente auf vollkommen analoge Weise definieren. Die Sekanten durch p sind untereinander parallel, haben nämlich die p bestimmende Richtung. Bewegt sich nun (Fig. 104) irgend ein Punkt q auf der Kurve gegen p hin, so bewegt sich $[qp]$ parallel zur ursprünglichen Richtung weiter; nähert sich diese Gerade einer im Endlichen befindlichen Grenzlage T, so nennt man T eine *Asymptote. Eine Asymptote einer Kurve ist daher eine im Endlichen befindliche Tangente eines unendlichfernen Punktes.*[2]) Die Gerade $[qp]$ kann jedoch auch die unendlichferne Gerade der Ebene zur Grenzlage haben; dann ist diese Gerade Tangente der Kurve und kann als Vereinigung zweier oder auch mehrerer Asymptoten betrachtet werden. Eine Kurve n^{ter} Ordnung besitzt im allgemeinen n Asymptoten, die jedoch alle oder teilweise imaginär sein können. Für eine Kurve ungerader Ordnung ist mindestens eine reell. Von den Kurven zweiter Ordnung hat nur die Hyperbel reelle (im Endlichen liegende) Asymptoten. *Die Parabel berührt die unendlichferne Gerade*, ihre Asymptoten fallen also mit dieser Geraden zusammen.

Ein unendlichferner Punkt kann auch Doppel- oder Mehrfachpunkt sein.

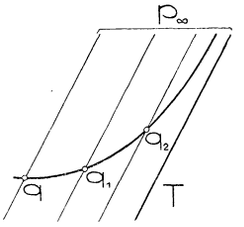


Fig. 104.

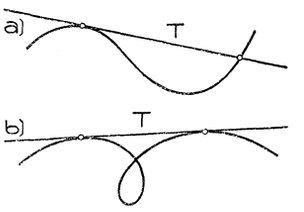


Fig. 105 a, b.

1) Eine nichtzerfallende Kurve n^{ter} Ordnung hat höchstens $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppelpunkte.

2) Wird allgemeiner eine Asymptote als eine Gerade definiert, die einem ins Unendliche sich erstreckenden Kurvenzweige so zugeordnet ist, daß der Abstand eines den Kurvenzweig durchlaufenden Punktes von dieser Geraden im Unendlichen den Grenzwert Null erreicht, so muß die Asymptote nicht gleichzeitig Tangente der Kurve im unendlichfernen Punkte sein. Vgl. etwa *E. Czuber*, Vorl. über Differential- u. Integralrechnung, Bd. 1, Leipzig 1898 (2. Aufl. 1906), Nr. 138.

Hosted by Google

Eine Gerade, die eine Kurve n^{ter} Ordnung berührt, schneidet sie noch in $n-2$ Punkten, da der Berührungspunkt für 2 (benachbarte) Schnittpunkte zählt. Bei Kurven höherer als zweiter Ordnung schneidet also jede Tangente die Kurve noch in weiteren Punkten (Fig. 105 a). Berührt insbesondere eine Tangente T die Kurve noch in einem zweiten Punkte, so heißt sie eine *Doppeltangente* (Fig. 105 b). Doppeltangenten treten erst bei Kurven vierter oder höherer Ordnung auf. Berührt eine Gerade die Kurve in n Punkten, so heißt sie eine *n-fache Tangente*. Auch die unendlichferne Gerade kann Doppel- oder Mehrfachtangente sein.

59. Verhalten einer ebenen Kurve in der Umgebung eines ihrer Punkte. Selbst in einem einfachen, in Bezug auf die Tangente stetigen Punkt p kann die Kurve noch verschiedenes, ihre Gestalt daselbst

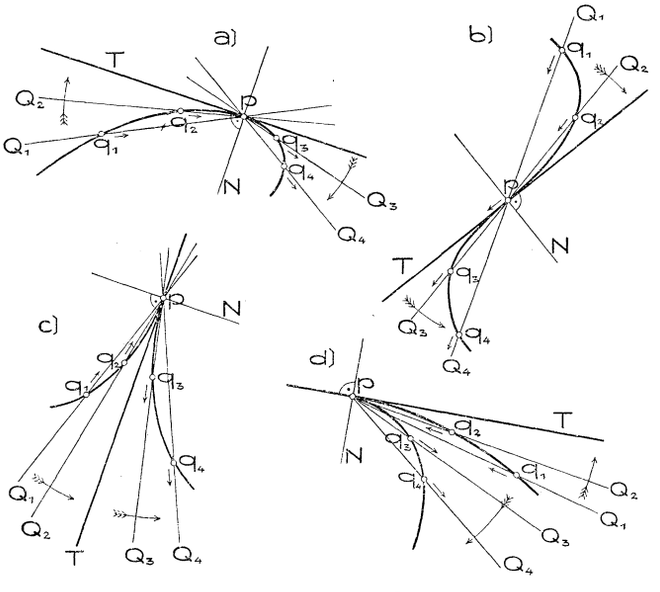


Fig. 106 a—d.

wesentlich beeinflussendes Verhalten zeigen. Zu dessen Untersuchung denken wir uns den p umgebenden Kurventeil dadurch entstanden, daß sich eine Gerade Q um p dreht, während sich gleichzeitig ein Punkt q auf der Geraden bewegt (vgl. Fig. 106, a—d); gelangt Q in die Tangente T des Punktes p, so muß q nach p gelangen. Bei der Drehung von Q sowohl als bei der Bewegung von q lassen sich nun zwei verschiedene Fälle unterscheiden, jenachdem nämlich die Gerade in T und der Punkt in p ihren Bewegungssinn beibehalten oder

Hosted by Google

umkehren. Durch Kombination entstehen daraus die folgenden vier Fälle[1]).

a) *Die Gerade und der Punkt ändern ihren Bewegungssinn nicht.*

Der Punkt ist ein *gewöhnlicher Punkt* oder, weil in seiner Nähe die Kurve auf derselben Seite der Tangente bleibt, ein *Einseitpunkt*[2]) (Fig. 106 a).

Die Kurve heißt in p auf der Seite der Tangente *erhaben* oder *konvex*, auf der andern Seite *hohl* oder *konkav*. Um in einem gewöhnlichen Punkte p einer nur gezeichnet vorliegenden Kurve möglichst genau die Tangente zu ziehen, nähert man sich mit der Kante des Lineals (Dreiecks) dem Punkte von der hohlen Seite und zwar derart, daß die zu verschiedenen Seiten von p liegenden zwei nächsten Schnittpunkte ungefähr gleiche Entfernung von p haben.

b) *Die Gerade ändert den Bewegungssinn, der Punkt nicht.*

In Fig. 106 b z. B. dreht sich die Gerade von Q_1 bis T rechtsum, hierauf linksum. T heißt dann eine *Wendetangente*[3]) *(Inflexionstangente)* und p demnach *Wendepunkt (Inflexionspunkt)*. Eine Wendetangente berührt und schneidet zugleich die Kurve (letztere ändert also ihre hohle Seite); sie enthält drei benachbarte Kurvenpunkte.

c) *Der Punkt ändert den Bewegungssinn, die Gerade nicht.*

In Fig. 106 c dreht sich Q von Q_1 über Q_2, T nach Q_3, Q_4 in demselben Sinn, während q sich auf der Geraden zuerst gegen p hin, dann in entgegengesetztem Sinn von p weg bewegt.

Ein solcher Punkt heißt *Rückkehrpunkt erster Art* oder *Spitze*.

Es sei hervorgehoben, daß es in p nur eine Tangente an die Kurve gibt. In einer Ecke (Fig. 103 a) mit zwei verschiedenen Tangenten wäre die Kurve in bezug auf die Tangente unstetig, ein Fall, der, wie schon oben erwähnt, bei algebraischen Kurven nicht auftritt.

Jede Gerade durch p hat (wie für einen Doppelpunkt) mit der Kurve zwei zusammenfallende Punkte gemeinsam, T drei solche Punkte.

d) *Die Gerade und der Punkt ändern den Bewegungssinn.*

In Fig. 106 d dreht sich die Gerade von Q_1 bis T linksum, von T bis Q_4 rechtsum; der Punkt bewegt sich auf der Geraden zuerst gegen p hin, dann im entgegengesetzten Sinn, also auf demselben Halbstrahl, von p weg. Ein solcher Punkt heißt *Rückkehrpunkt zweiter*

1) Zuerst von *J. Plücker*, Theorie d. algebraischen Kurven, Bonn 1839, S. 202 f., und *G. K. Chr. v. Staudt*, Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, Nr. 198 in etwas anderer Form dargelegt. Vgl. ferner *Chr. Wiener*, Lehrb., I, Nr. 242.

2) *R. Mehmke*, Z. Math. Phys. 49 (1903), S. 63.

3) Am geeignetsten wäre der Ausdruck *Rückkehrtangente* in Übereinstimmung mit Rückkehrpunkt (vgl. c)).

Hosted by Google

Art, Schnabelpunkt, Schnabelspitze oder kurz *Schnabel.* Er vereinigt die Eigenschaften der Spitze und des Wendepunktes.

Sagen wir, der Punkt- bzw. Tangentencharakter einer Kurve an der Stelle (p, T) sei $+$ oder $-$, jenachdem bei der obigen Erzeugungsweise der Kurve q in p bzw. Q in T ihren Bewegungssinn beibehalten oder ändern, so können die vier eben besprochenen Fälle durch die folgenden Vorzeichenkombinationen gekennzeichnet werden:

	a)	b)	c)	d)
p	$+$	$+$	$-$	$-$
T	$+$	$-$	$+$	$-$

Man kann sich diese Fälle dadurch anschaulich machen, daß man durch die Tangente und Normale in p die Ebene in vier Quadranten geteilt denkt und von den zwei Teilen, in die p das Kurvenstück teilt, den einen stets in demselben Quadranten läßt, den andern hingegen der Reihe nach in jedem der vier Quadranten annimmt (vgl. Fig. 106, a—d).

Dieses verschiedene Verhalten zeigt eine Kurve auch in einem unendlichfernen Punkte, wobei noch die Tangente entweder eine (eigentliche) Asymptote oder die unendlichferne Gerade sein kann.

Wendepunkte, Spitzen und Schnabelpunkte werden gleichfalls zu den *singulären* Punkten einer Kurve gerechnet.

60. Ebene Kurven als Umhüllungsgebilde ihrer Tangenten. Klassenzahl algebraischer Kurven. Plückersche Formeln. Eine ebene Kurve läßt sich auch als Umhüllungsgebilde ihrer sämtlichen Tangenten, also als Strahlort statt als Punktort auffassen. Bewegt sich eine Gerade gesetzmäßig in einer Ebene, so erzeugt sie demnach eine Kurve, die wir im Gegensatze zur *Punktkurve* (d. h. Kurve als Punktort) *Strahlkurve* (Kurve als Strahlort) nennen wollen. Dem Zeichner tritt eine solche Erzeugungsweise einer krummen Linie oft entgegen.

Wählen wir in der Ebene ein rechtwinkeliges Koordinatensystem und bezeichnen die negativ genommenen reziproken Achsenabschnitte einer Geraden G mit $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$, so nennt man diese Zahlen die rechtwinkeligen (oder *Plücker*schen) Koordinaten von G. Eine jede Gleichung zwischen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ gibt ein Gesetz an, durch das die Tangenten einer Kurve bestimmt werden. Läßt sich die Gleichung auf die Form $f(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}) = 0$ bringen, wo die linke Seite eine ganze rationale Funktion m^{ten} Grades von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ bezeichnet, so heißt die dadurch definierte Strahlkurve eine *algebraische Kurve m^{ter} Klasse.* Wie früher von imaginären Punkten spricht man jetzt von imaginären

Hosted by Google

oder komplexen Tangenten einer Kurve, bestimmt durch komplexe Wertepaare $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$. Zieht man solche mit in Betracht, so besteht der

Satz 1: *Aus jedem Punkt in der Ebene einer algebraischen Kurve m^{ter} Klasse lassen sich m Tangenten an diese legen.*

Hierbei ist aber jede Tangente, in die, zufolge der besonderen Lage des Punktes, r sonst getrennte Tangenten zusammenrücken, r-fach zu zählen.

Der Beweis für diesen Satz ergibt sich analog wie der für Satz 1 in Nr. 57, wenn man die Tatsache benutzt, daß die Koordinaten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ aller Geraden durch einen Punkt einer linearen Gleichung $\mathfrak{v} = a\mathfrak{u} + b$ genügen.

Von Satz 1 gilt auch die Umkehrung:

Satz 2: *Eine Kurve, an die sich aus jedem Punkt ihrer Ebene m (reelle oder imaginäre, auch teilweise zusammenfallende) Tangenten legen lassen, ist eine algebraische Kurve m^{ter} Klasse.*[1])

Zur Beurteilung der Klasse einer Kurve muß, wie bei der Beurteilung der Ordnung (vgl. Nr. 57) ihr Entstehungsgesetz bekannt sein.

Die *Kurve erster Klasse* ist die Gesamtheit aller Strahlen durch einen (endlich- oder unendlichfernen) Punkt, also das *Strahlbüschel.* Die nichtzerfallenden Kurven 2. Klasse sind, wie z. B. die Rechnung zeigt, mit den nichtzerfallenden Kurven 2. Ordnung identisch. Hingegen ist eine zerfallende Kurve 2. Klasse, d. i. ein *Punktepaar* oder ein *doppelt zu zählender Punkt* (jeder Punkt als Träger eines Strahlbüschels aufgefaßt), von einer zerfallenden Kurve 2. Ordnung gänzlich verschieden. Ein Kegelschnitt und ein Punkt bilden eine zerfallende Kurve 3. Klasse.

Schon in Nr. 22 wurde des *Dualitätsgesetzes* in der Ebene gedacht, demzufolge aus jedem auf Lagenverhältnisse bezüglichen Satz ein zweiter (sein *dualer*) hervorgeht, wenn man die Begriffe Punkt und Gerade, Verbinden und Schneiden durcheinander ersetzt. Der Punktkurve entspricht dual die Strahlkurve; den Tangenten einer Punktkurve, als Verbindungslinien benachbarter Punkte, entsprechen dual die Punkte einer Strahlkurve, als Schnitte benachbarter Strahlen. Jeder solche Punkt wäre natürlich analog wie in Nr. 58 als Grenzlage des Schnittpunktes eines festen Strahles P mit einem sich ihm unbegrenzt nähernden beweglichen Strahle Q der Kurve zu definieren.

Der Stetigkeit einer Punktkurve in bezug auf die Tangente entspricht dual die Stetigkeit einer Strahlkurve in bezug auf den Berührungspunkt; einem Doppelpunkt der Punktkurve entspricht eine Doppeltangente der Strahlkurve, einem isolierten Punkte der einen,

1) Sobald sie überhaupt analytisch ist.

Hosted by Google

eine *isolierte Tangente (Einsiedlertangente)* der andern, d. h. eine reelle Tangente mit einem oder mehreren Paaren konjugiert imaginärer Berührungspunkte. Endlich sind Ordnung einer Punktkurve und Klasse einer Strahlkurve duale Begriffe.

Die Untersuchung einer Strahlkurve in der Umgebung eines Strahles P geschieht vollkommen dual wie in Nr. 59. Wir denken uns den P umgebenden Kurventeil dadurch entstanden, daß sich ein Punkt q auf P bewegt, während gleichzeitig eine Gerade Q sich um q dreht (Fig. 107); gelangt q nach dem Berührungspunkt t von P, so muß Q nach P gelangen. Bei der Bewegung von q sowohl als bei der Drehung von Q lassen sich nun zwei verschiedene Fälle unterscheiden, jenachdem nämlich q in t und Q in P den Bewegungssinn beibehalten oder umkehren. Den Fällen $a - d$ in Nr. 59 entsprechen hier dual: a) Eine gewöhnliche Tangente (und ein gewöhnlicher Punkt), b) ein Rückkehrpunkt t (Fig. 107. — Aus t lassen sich drei zusammenfallende Tangenten an die Kurve legen), c) eine Wendetangente (zugleich Wendepunkt), d) ein Schnabel. Man gelangt durch diese Untersuchung also zu keinen neuen Singularitäten.

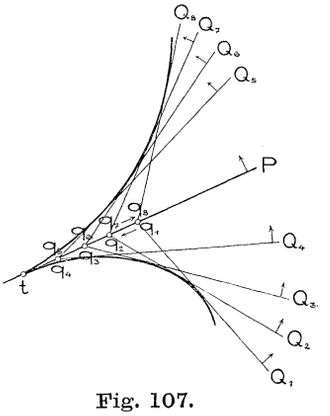


Fig. 107.

Die Kurven n^{ter} Ordnung sind von denen der n^{ten} Klasse gänzlich verschieden; nur die nichtzerfallenden Kurven 2. Ordnung sind zugleich Kurven 2. Klasse und umgekehrt. Sonst hat eine Kurve n^{ter} Ordnung mit d Doppelpunkten und r Spitzen die Klasse

$$m = n(n-1) - 2d - 3r$$

und eine Kurve m^{ter} Klasse mit t Doppeltangenten und i Wendetangenten hat die Ordnung

$$n = m(m-1) - 2t - 3i.$$

Ferner bestehen zwischen den 6 Zahlen n, d, r, m, t, i noch die Beziehungen

$$i = 3n(n-2) - 6d - 8r,$$
$$r = 3m(m-2) - 6t - 8i.$$

Von diesen vier Gleichungen, die man die *Plückerschen Formeln*[1]) nennt, sind aber nur drei voneinander unabhängig; sie gestatten, aus

1) *J. Plücker*, System der anal. Geometrie, Berlin 1835, S. 243f., 264, 292. Ausführliche Literatur darüber findet man in der Encyklopädie d. math. Wissenschaften, Bd. III 2 (Art. III C 4), Allg. Theorie d. höheren algebr. Kurven, von *L. Berzolari*, Nr. 8.

Hosted by Google

drei der Zahlen die übrigen zu berechnen. Dabei wird jedoch vorausgesetzt, daß die Kurve keine höheren Singularitäten als die erwähnten besitze.

61. Gemeinsame Punkte oder Tangenten zweier algebraischen Kurven derselben Ebene. Haben zwei Kurven K_1 und K_2 einen Punkt p gemeinsam, so können sie in ihm dieselbe Tangente oder verschiedene Tangenten T_1 und T_2 besitzen. Im ersten Fall sagt man, K_1 *und* K_2 *berühren oder tangieren sich in* p (sie haben zwei benachbarte Punkte gemeinsam), im zweiten Fall, sie *schneiden sich in* p und nennt $\widehat{T_1 T_2}$ ihren *Schnittwinkel.* Insbesondere schneiden sich für $\widehat{T_1 T_2} = 90^0$ die Kurven *rechtwinkelig, normal* oder *orthogonal.* In jedem Punkt p einer Kurve K gibt es insbesondere eine sie rechtwinkelig schneidende Gerade, die man die *Kurvennormale* oder kurz *Normale*[1]) in p nennt.

Von besonderer Wichtigkeit ist der durch Rechnung zu beweisende fundamentale

Satz 1[2])***:*** *Zwei algebraische Kurven* p^{ter} *und* q^{ter} *Ordnung in derselben Ebene (ohne gemeinsame Teilkurve) haben* $p \cdot q$ *Punkte gemeinsam.*

Dabei sind natürlich die imaginären Schnittpunkte mitgerechnet, Berührungspunkte doppelt gezählt usw. — Satz 1 in Nr. 57 ist ein Sonderfall dieses Satzes ($p = 1$, $q = n$). Es schneiden sich demnach zwei Kurven 2. Ordnung in vier, eine Kurve 2. Ordnung mit einer Kurve 3. Ordnung in sechs Punkten.

Der zu Satz 1 duale lautet:

Satz 2: *Zwei algebraische Kurven* p^{ter} *und* q^{ter} *Klasse in derselben Ebene (ohne gemeinsame Teilkurve) haben* $p \cdot q$ *Tangenten gemeinsam.*

Von ihm ist Satz 1 in Nr. 60 ein Sonderfall ($p = 1$, $q = m$).

Zuweilen macht man auch Anwendung von dem folgenden

Satz 3: *Haben zwei algebraische Kurven* p^{ter} *und* q^{ter} *Ordnung in derselben Ebene mehr als* pq *Punkte gemeinsam, so haben sie (unendlich viele Punkte, d. h.) einen ganzen Kurvenzweig gemeinsam.*

Seine duale Form soll nicht besonders ausgesprochen werden.

---

1) Die Normale in p wird gewöhnlich als Lot auf die Tangente dieses Punktes gezeichnet. Unabhängig von der Tangente läßt sich das Zeichnen mittels eines sogenannten *Spiegellineals* ausführen, wie es die Firma *P. Spindler* in Stuttgart herstellt. Vgl. darüber *K. Mack*, Z. Math. Phys. 52 (1905), S. 435.

2) *Bézoutsches Theorem* genannt. Vgl. wegen der Literatur darüber Encyklopädie d. math. Wissensch., Art. III C 4, *Berzolari,* Nr. 2, Fußn. 23.

Hosted by Google

Besitzt eine Kurve 4. Ordnung K vier Doppelpunkte, von denen nicht drei auf einer Geraden liegen, so hat eine durch diese Punkte und irgend einen fünften Punkt von K gelegte Kurve zweiter Ordnung K_1 (Nr. 57, letzter Abschnitt) mit K neun $(4 \times 2 + 1)$ Punkte gemeinsam. K_1 muß mithin (nach Satz 3) in K als Teilkurve enthalten sein. Wiederholt man diese Schlußweise für einen zweiten von K_1 verschiedenen Kegelschnitt K_2, so erhält man den

Satz 4: *Eine ebene Kurve 4. Ordnung mit vier Doppelpunkten, von denen nicht drei auf einer Geraden liegen, zerfällt in zwei Kurven 2. Ordnung.*

Für $p = 1$, $q = n$ folgt aus Satz 3:

Satz 5: *Hat eine Gerade mit einer ebenen Kurve n^{ter} Ordnung mehr als n Punkte gemeinsam, so enthält die Kurve die Gerade als Teil, zerfällt also.*

Ähnlich wie oben für die Kurve 4. Ordnung erschließt man hieraus den

Satz 6: *Besitzt eine Kurve n^{ter} Ordnung einen n-fachen Punkt, so zerfällt sie in n gerade Linien durch diesen Punkt.*

Satz 7: *Insbesondere zerfällt eine Kurve 2. Ordnung mit einem Doppelpunkt in zwei Gerade.*

62. Evolute und Evolvente. Die Gesamtheit der Normalen (Nr. 61) einer Kurve K umhüllen eine neue Kurve E (Nr. 60), die man die *Evolute* von K nennt. Für einen Kreis ist die Evolute sein Mittelpunkt (als Kurve 1. Klasse betrachtet).

Rollt eine Gerade T (ohne Gleiten) auf einer beliebig vorgegebenen Kurve E, so beschreibt irgend ein Punkt p von T eine Kurve K, von der E die Evolute ist. Das Rollen von T ist nämlich so zu verstehen, daß der Übergang aus einer Lage T_1 in die benachbarte T_2 (Fig. 108) eine Drehung um den gemeinsamen Punkt n_1, d. h. (Nr. 60) um den Berührungspunkt von T_1 mit E ist. Da demnach die beiden benachbarten Lagen p_1, p_2 von p einem Kreise vom Mittelpunkt n_1 angehören, so steht $[p_1 p_2]$ in p_1 auf T_1 senkrecht. Weil aber $[p_1 p_2]$ zugleich Tangente von K, mithin T_1 Normale von K ist, so ist die willkürlich gegebene Kurve E die Evolute von K. Man nennt K eine *Evolvente* von E. Wegen der willkürlichen Wahl von p auf T gehören zu einer Kurve einfach unendlich viele Evolventen. Sei K' eine zweite, vom Punkte p' auf T beschriebene Evolvente, so ist $\overline{p_i p_i'} = \overline{p_k p_k'}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots;\ k = 1, 2, 3, \ldots)$. *Irgend zwei Evolventen einer Kurve haben demnach gemeinschaftliche Normalen und schneiden auf diesen gleichlange Strecken ab.* Zwei Kurven mit diesen Eigenschaften heißen *Parallelkurven* oder *äquidistante Kurven.*

Hosted by Google

Beschreibt man über p_1p_1', p_2p_2', ... p_ip_i', ... als Durchmessern Kreise, so umhüllen sie die äquidistanten Kurven K und K', die als Zweige einer einzigen Kurve aufzufassen sind. Denn bewegt sich umgekehrt ein Kreis von unveränderlichem Halbmesser in seiner Ebene, so umhüllt er eine aus zwei Teilen bestehende Kurve, die Parallelkurve zu der vom Mittelpunkte beschriebenen Kurve.

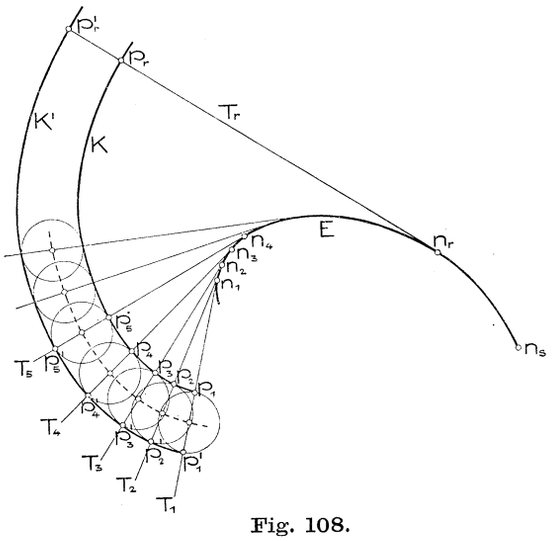


Fig. 108.

Die Evolvente K kann man sich auch dadurch entstanden denken, daß (Fig. 108) ein undehnsamer um E gelegter und in einem Punkte n_s von E befestigter Faden $(n_s n_r \ldots n_3 n_2 n_1 p_1)$ in gespanntem Zustande abgewickelt wird. Der Fadenendpunkt p $(p_1, p_2, \ldots p_r)$ beschreibt dann K. Hieraus folgt zugleich

$$\overline{n_r p_r} - \overline{n_1 p_1} = \overset{\frown}{n_1 n_r},$$

wobei vorausgesetzt wird, daß das Stück zwischen p_1 und p_r nur durch Abwicklung entstanden ist. Wenn jedoch E zwischen n_1 und n_r eine Spitze besäße, so müßte der Faden bis zu ihr abgewickelt, dann aber aufgewickelt werden und nur für jeden dieser Teile gälte obiges Gesetz.

Aus ihm folgt zugleich eine Methode zur angenäherten Konstruktion beliebig vieler Punkte der Evolvente einer gezeichnet vorliegenden Kurve. Man hat nämlich nur die Länge des Kurvenbogens zwischen dem Ausgangspunkte n_1 und einem beliebigen andern n_r so genau als möglich zu ermitteln (gewöhnlich durch wiederholtes Abtragen eines kleinen, als geradlinig zu betrachtenden Bogenstückes) und nun auf T_r

$$\overline{n_r p_r} = \overline{n_1 p_1} + \overset{\frown}{n_1 n_r}$$

zu machen.

Mit großer Genauigkeit lassen sich Punkte einer *Kreisevolvente* konstruieren, weil für den Kreisumfang u Näherungskonstruktionen existieren, deren Fehler unter den unvermeidlichen Zeichenfehlern liegen. Eine der einfachsten dieser Konstruktionen hat *A. A. Kochansky*[1])

1) Acta Erud. Lips. von 1685, S. 394—398.

Hosted by Google

angegeben (Fig. 109). Die Tangente in einem beliebigen Punkte a des Kreises E vom Mittelpunkt m und Halbmesser $\mathfrak{r}$ wird mit dem gegen $[ma]$ unter 30^0 geneigten Halbstrahl aus m (mittels des Zirkels oder des 30^0-Dreiecks konstruierbar) in b geschnitten, dann von b aus über a die Strecke $\overline{bc} = 3\,\mathfrak{r}$ aufgetragen. Bezeichnet d den Gegenpunkt von a auf E, so ist, wie eine einfache Rechnung lehrt, $\overline{dc} = \mathfrak{r} \cdot 3{,}14\,15\,33\ldots$, weicht also von $\frac{\mathfrak{u}}{2}$ nur um etwa $0{,}00006 \cdot \mathfrak{r}$ ab. Teilt man nun die Kreisperipherie in eine beliebige Anzahl, etwa 12 (wie in Fig. 109), gleicher Teile und trägt auf den Tangenten der Teilpunkte 1, 2, 3, ... bzw. die Strecken

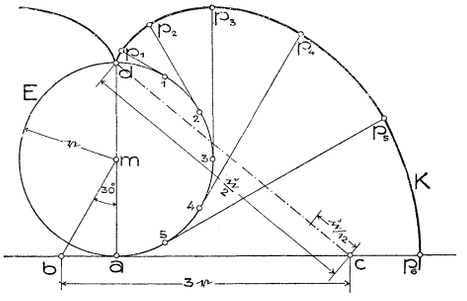


Fig. 109.

$$\overline{1p_1} = \frac{\mathfrak{u}}{12}, \qquad \overline{2p_2} = 2 \cdot \frac{\mathfrak{u}}{12}, \qquad \overline{3p_3} = 3 \cdot \frac{\mathfrak{u}}{12}, \ldots$$

auf, so gehören p_1, p_2, p_3, ... der Kreisevolvente K an.

Denken wir uns diese Kurve durch Rollen der Tangente auf dem Kreise und zwar in entgegengesetzter Richtung wie bei obiger Konstruktion erzeugt, so stößt der beschreibende Punkt p in d auf E senkrecht auf und verläßt E wieder in derselben Richtung. Die Kreisevolvente besitzt demnach in d eine Spitze. Man sieht, daß Gleiches für jede Evolvente gilt, *daß also die Schnittpunkte einer Evolvente mit der Evolute Spitzen der ersteren sind.*

63. Krümmungskreis ebener Kurven. In einem Kurvenpunkte p lassen sich unendlich viele berührende Kreise (Nr. 61) legen; jeder Punkt der Normalen ist Mittelpunkt eines solchen Kreises. Insbesondere läßt sich ein in p berührender und durch einen zweiten Kurvenpunkt q gehender Kreis zeichnen. Rückt jetzt q auf der Kurve unbegrenzt nahe gegen p hin, so geht dieser Kreis für die gebräuchlichen Kurven in einen bestimmten Grenzkreis über, den man den *Krümmungs-*, *Schmiegungs-* oder *Oskulationskreis* der Kurve im Punkte p nennt. Sein Mittelpunkt heißt *Krümmungsmittelpunkt*, sein Halbmesser *Krümmungsradius* der Kurve im Punkte p. Der Krümmungskreis enthält drei benachbarte Kurvenpunkte, berührt und schneidet also die Kurve in demselben Punkt. Aus letzterer Bemerkung folgt eine, freilich nur rohe Näherungskonstruktion des Krümmungskreises. Man suche unter den die Kurve in p berührenden Kreisen (deren Mittelpunkte auf der hohlen Kurvenseite liegen) durch Probieren denjenigen, der die Kurve

Hosted by Google

in p zugleich schneidet, der also die Grenze zwischen den die Umgebung von p einschließenden und ausschließenden Kreisen bildet.

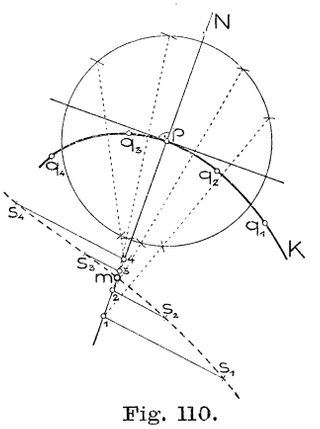


Fig. 110.

Eine genauere *Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes* m für eine graphisch gegebene ebene Kurve beruht auf der Verwendung einer sogenannten *Fehlerkurve.*[1]) Nimmt man (Fig. 110) auf der Kurve K in der Nähe des Punktes p zu dessen beiden Seiten einige Punkte q_1, q_2, q_3, q_4, ... an und sucht die Mittelpunkte 1, 2, 2, 3, 4, ... der in p berührenden und bezüglich durch $q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots$ gehenden Kreise, so werden diese Punkte im allgemeinen zu verschiedenen Seiten des gesuchten Punktes m liegen, der dem mit p zusammenfallenden Punkte q entspricht. Wir zeichnen nun eine Fehlerkurve, indem wir durch die Punkte 1, 2, 3, 4, ... Parallele ziehen, darauf die Strecken

$$1s_1 = pq_1, \quad 2s_2 = pq_2, \quad 3s_3 = pq_3, \quad 4s_4 = pq_4, \quad \ldots,$$

um die die Punkte q_i von p abweichen (Größen der Fehler), nach der einen oder andern Seite auftragen und die Punkte s_i verbinden. Für $q = p$ ist der Fehler Null; der zugehörige Punkt der Fehlerkurve liegt daher in der Normalen N. Der Schnittpunkt von N mit der Fehlerkurve ist also der gesuchte Mittelpunkt m des Krümmungskreises.

Am einfachsten geschieht jedoch die Auffindung des Krümmungskreises mittels einer *Äquitangentialkurve* der gegebenen, jetzt mit P bezeichneten Kurve (Fig. 111). Denkt man sich nämlich P in einem bestimmten Sinn durchlaufen und auf ihren Tangenten in diesem Sinne von den Berührungspunkten aus dasselbe Stück t abgetragen, so liegen die Endpunkte auf einer Kurve Q, die man eine Äquitangentialkurve von P nennt.[2]) Bezeichnet nun q den dem Punkte p von P entsprechenden Punkt in Q, *so ist der Mittelpunkt m des zu p gehörigen Krümmungskreises K der Schnitt der Normalen in p und q.*[3]) Hierzu braucht man natürlich nur ein Stück von Q in der Umgebung von q zu kennen.

1) Diese Konstruktion findet sich bei *C. L. Bergery*, Géométrie des courbes appliquée à l'industrie, Metz 1826, p. 142.

2) *G. Loria,* Spezielle algebr. u. transzendente ebene Kurven, Leipzig 1902, S. 567.

3) Diese Konstruktion stammt von *Nicolaïdes*, Nouv. Ann. Math. (2) 5 (1866), S. 383. Vgl. ferner: *L. Burmester,* Lehrbuch der Kinematik, 1. B., Leipzig 1888, S. 63 unten, *G. Loria*, a. a. O., und insbesondere *R. Mehmke,* Z.

Hosted by Google

Der Beweis für diese Konstruktion ergibt sich aus der Bemerkung, daß jede Äquitangentialkurve eines Kreises ein konzentrischer Kreis ist. Sind nämlich p_1 und p_2 auf p folgende benachbarte Punkte von P, so ist der Kreis durch p, p_1, p_2 der Krümmungskreis K. Die Geraden $[pp_1]$ und $[p_1p_2]$ sind dann benachbarte Tangenten sowohl von P als von K und die zu ihnen gehörigen Punkte q und q_1 von Q also benachbarte Punkte einer Äquitangentialkurve von K. Da demnach $[qq_1]$, d. h. die Tangente an Q in q, Tangente eines mit K konzentrischen Kreises ist, so geht $[q \mid qq_1]$ durch m.

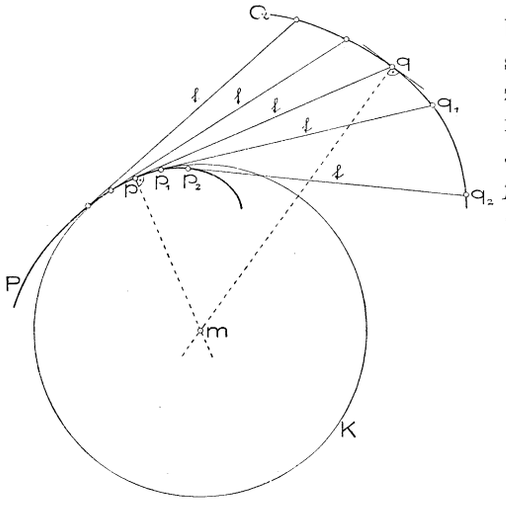


Fig. 111.

Aus der Definition des Krümmungskreises folgt, daß sein Mittelpunkt der Schnitt zweier benachbarten Kurvennormalen ist. *Der Ort sämtlicher Krümmungsmittelpunkte einer Kurve ist daher deren Evolute.*

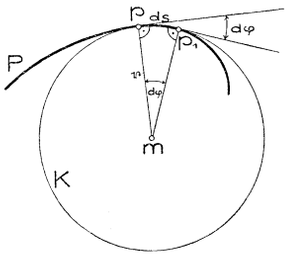


Fig. 112.

Bezeichnet $\mathfrak{r}$ den Krümmungsradius im Punkte p, so heißt $\frac{1}{\mathfrak{r}}$ das *Krümmungsmaß*, die *Krümmung* oder *Flexion* der Kurve in p. Seien (Fig. 112) p, p_1 zwei benachbarte Punkte der Kurve P, $d\varphi$ der Winkel ihrer Tangenten (im Bogenmaß), also auch ihrer Normalen, so gehört das Kurvenelement $ds = \overline{pp}_1$ auch dem Krümmungskreis K in p an. Daraus folgt aber

$$ds = \mathfrak{r}\, d\varphi,$$

$$\frac{1}{\mathfrak{r}} = \frac{d\varphi}{ds}$$

oder in Worten:

Das Krümmungsmaß einer ebenen Kurve ist auch das Verhältnis des Winkels zweier benachbarten Tangenten zur Entfernung ihrer Berührungspunkte.

Math. Phys. 49 (1903), S. 464—465, wo sich analoge Konstruktionen für die Krümmungsachse und die Mitte der Schmiegkugel einer Raumkurve finden.

Hosted by Google

Es sei hier ein für allemal bemerkt, daß solche Sätze, in denen es sich um benachbarte Punkte oder Tangenten usw. handelt, stets als abgekürzte Redeweisen aufzufassen sind, da ja überall der Grenzbegriff auftreten sollte. Man müßte also den letzten Satz strenger so aussprechen:

„Bezeichnet φ den Winkel, den die Tangente in p mit der Tangente in einem andern Kurvenpunkte p_1 einschließt, und s die Entfernung dieser Punkte, so ist der Grenzwert, den $\frac{\varphi}{s}$ beim Hineinrücken von p_1 in p erreicht, gleich dem Krümmungsmaß der Kurve im Punkte p."

In einem Wendepunkt geht der Krümmungskreis in die Tangente über; die Krümmung ist also hier, wegen $\mathfrak{r} = \infty$, null. In einer Spitze ist der Krümmungskreis ein Punkt (Nullkreis), die Krümmung also, wegen $\mathfrak{r} = 0$, unendlich groß.

Haben zwei Kurven in einem gemeinsamen Punkt denselben Krümmungskreis, so sagt man, sie *oskulieren* sich oder haben drei benachbarte Punkte gemeinsam.

64. Darstellung ebener Kurven. Legt man durch die Punkte einer ebenen Kurve K die projizierenden Strahlen, so bilden sie, wenn das Projektionszentrum o im Endlichen liegt, im allgemeinen einen Kegel (projizierenden Kegel), wenn o unendlichfern liegt, einen Zylinder (projizierenden Zylinder), dessen Schnitt mit der Bildebene Π die Projektion K' von K ist. Nur wenn o der Kurvenebene ε angehört, wird aus dem projizierenden Kegel oder Zylinder ein Strahlbüschel und aus K' eine gerade Linie.[1]) Bei Ausschluß dieses Falles bilden sich benachbarte Punkte von K als benachbarte Punkte von K' oder Tangenten (insbesondere auch Asymptoten) von K als Tangenten (oder Asymptoten) von K' ab. Jeder der in Nr. 58 und 59 erwähnten singulären Punkte — Doppelpunkt, Wendepunkt, Spitze, Schnabel — hat als Bild einen Punkt derselben Art, wie aus deren Definition sofort folgt. Jeder imaginäre Punkt von K bildet sich als imaginärer Punkt von K' und umgekehrt ab. Daraus folgt der

1) Die Bilder der reellen Punkte von K überdecken in diesem Falle häufig bloß einzelne Teile von K' und zwar mehrfach. In jedem außerhalb dieser Teile liegenden reellen Punkte von K' decken sich die Bilder der paarweise konjugiert imaginären Schnittpunkte des projizierenden Strahls mit K. Die im allgemeinen Falle geltende Tatsache, daß die punktweise Stetigkeit einer Kurve durch Zentralprojektion nicht zerstört wird, bleibt auch jetzt bestehen. Denn wenn auch ein Kurvenast sich als Strecke projiziert, also als eine Kurve mit freien Enden, so hat man sich diese Strecke doch mehrfach überdeckt zu denken, so daß ein einem Endpunkte benachbarter Punkt einmal als diesem vorhergehend, das anderemal als diesem nachfolgend aufzufassen ist.

Hosted by Google

Satz 1: *Von ebenen algebraischen Kurven wird durch (Zentral- oder Parallel-) Projektion weder ihre Ordnung noch ihre Klasse geändert.*

Denn die Schnittpunkte irgend einer Geraden G' der Bildebene Π mit K' sind die Bilder der Schnittpunkte der entsprechenden Geraden G in ε mit K; es schneidet also G' die Kurve K' in ebensovielen Punkten wie G die Kurve K, d. h. K und K' haben gleiche Ordnung (Nr. 57). Ferner sind die aus einem Punkte p' in Π an K' gelegten Tangenten

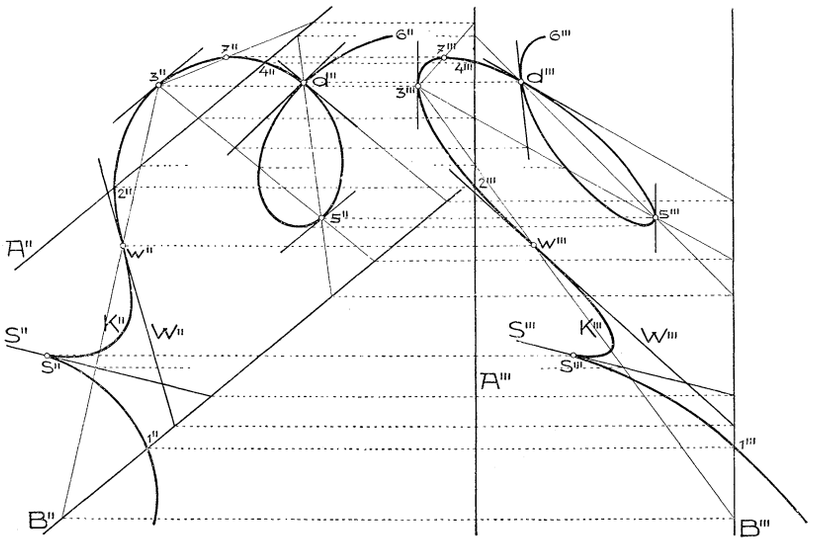


Fig. 113.

die Bilder der aus dem entsprechenden Punkte p in ε an K gelegten Tangenten; es lassen sich also aus p' an K' ebensoviele Tangenten legen wie aus p an K, d. h. K und K' haben gleiche Klasse (Nr. 60).

Da sich bei einer Parallelprojektion die unendlichferne Gerade einer Ebene wieder als unendlichferne Gerade abbildet, so projizieren sich die unendlichfernen Punkte einer ebenen Kurve als die unendlichfernen Punkte ihres Bildes. *Beide Kurven haben also gleich viele reelle unendlichferne Punkte. Den Asymptoten der einen entsprechen die Asymptoten der andern.*

Zwei zugeordnete Normalrisse einer ebenen Kurve sind perspektiv-affin (Nr. 38). In Fig. 113 ist ohne Benutzung der Affinitätsachse der Kreuzriß einer Kurve K (mit Doppelpunkt d, Wendepunkt w und Spitze s) aus deren Aufriß gefunden, wenn die Kurvenebene durch zwei Hauptlinien A und B gegeben ist. Durch Paralleldrehen der Ebene $[AB]$ zu Π_2, etwa um A, erhielte man die Gestalt von K als

Hosted by Google

eine zu K'' perspektiv-affine Kurve K^0 mit A'' als Affinitätsachse (Nr. 50).

65. Einteilung der Raumkurven. Ordnungszahl algebraischer Raumkurven. Wählt man im Raume ein rechtwinkeliges Koordinatensystem, so bestehen zwischen den rechtwinkeligen Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ sämtlicher Punkte einer gesetzmäßig erzeugten Raumkurve zwei Gleichungen

$$f_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = 0, \quad f_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = 0,$$

die eben wieder Gesetze angeben, durch welche die Punkte der Kurve bestimmt werden. Im Falle f_1 und f_2 ganze rationale Funktionen von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ sind oder die Gleichungen durch algebraische Umformungen auf eine solche Gestalt gebracht werden können, heißt die Kurve *algebraisch*, andernfalls *transzendent*. Werden analog wie in Nr. 57 imaginäre Punkte mitberücksichtigt, so gelten die Sätze:

Satz 1: *Eine algebraische Raumkurve wird von jeder Ebene in gleichviel Punkten geschnitten. Diese konstante Anzahl heißt die Ordnung der Raumkurve.*

Satz 2: *Eine (analytische) Raumkurve, die von jeder Ebene in n Punkten geschnitten wird, ist eine algebraische Kurve n^{ter} Ordnung oder ein Teil einer solchen höherer Ordnung.*[1])

Hierbei wären natürlich ähnliche Bemerkungen beizufügen wie zu den Sätzen 1 und 2 in Nr. 57.

Eine ebene Kurve n^{ter} Ordnung ist, als Raumkurve betrachtet, gleichfalls von der n^{ten} Ordnung.

Dem Satz 5 in Nr. 61 analog ist

Satz 3: *Hat eine Ebene mit einer Raumkurve n^{ter} Ordnung mehr als n Punkte gemeinsam, so enthält die Ebene einen Teil der Raumkurve oder die ganze Kurve.*

Die einzige Raumkurve erster Ordnung ist die Gerade. Jede Kurve zweiter Ordnung muß eben sein oder besteht aus zwei windschiefen Geraden. Denn legt man durch drei Punkte einer solchen Kurve eine Ebene, so enthält sie nach Satz 3 entweder die ganze Kurve oder eine Teilkurve, d. h. eine Gerade; in letzterem Falle ist der übrig bleibende Teil als Kurve erster Ordnung wieder eine Gerade. Die einfachsten eigentlichen und nichtzerfallenden Raumkurven sind die dritter Ordnung (vgl. Nr. 101).

1) Zwei windschiefe Gerade sind darnach als Raumkurve zweiter Ordnung aufzufassen, obgleich man diese Geraden allein nicht durch zwei algebraische Gleichungen darzustellen vermag.

Hosted by Google

66. Tangente, Schmiegebene, Hauptnormale usw. einer Raumkurve. Verhalten einer Raumkurve in der Umgebung eines ihrer Punkte. Die *Tangente* T in einem Punkte p einer Raumkurve K wird wie für ebene Kurven definierte (Nr. 58) und man sagt auch hier, sie sei die Verbindungslinie zweier benachbarten Kurvenpunkte. Wir nehmen K als stetig in bezug auf die Tangente an.

Jede der ∞^1 durch T legbaren Ebenen heißt eine *Berührungs-, Tangenten-* oder *Tangentialebene* der Raumkurve im Punkte p.

Legt man durch T und einen Kurvenpunkt q eine Ebene und läßt nun q sich dem Punkte p auf der Kurve nähern und schließlich mit ihm zusammenfallen, so dreht sich die Ebene um T und nähert sich bei den gebräuchlichen Kurven schließlich einer Grenzlage σ, die man die *Schmiegungsebene* oder kürzer *Schmiegebene* der Kurve in p nennt. Man betrachtet gewöhnlich nur Kurven, die *in bezug auf die Schmiegebene stetig* sind, bei denen man also zu derselben Grenzebene gelangt, ob man sich dem Punkte p von der einen oder andern Seite nähert. Die Schmiegebene enthält drei benachbarte Kurvenpunkte oder zwei benachbarte Tangenten. Für eine ebene Kurve ist die Kurvenebene die Schmiegebene sämtlicher Punkte.

Die zur Schmiegebene σ normale Ebene durch T wird die *rektifizierende Ebene* τ des Punktes p genannt (Fig. 114).

Jede zu T normale Gerade durch p heißt eine *Normale* der Raumkurve in p. Diese ∞^1 Normalen erfüllen die *Normalebene* ν. Unter den Normalen sind zwei ausgezeichnet, die *Hauptnormale* $[\nu\sigma]$, die der Schmiegebene und die *Binormale* $[\nu\tau]$, die der rektifizierenden Ebene angehört (Fig. 114).

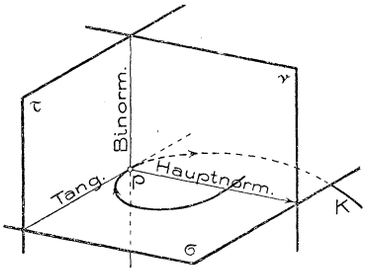


Fig. 114.

Die Untersuchung einer Raumkurve in der Umgebung eines ihrer Punkte geschieht ähnlich wie in Nr. 59. Wir können uns den p umgebenden Kurventeil dadurch entstanden denken, daß sich eine Ebene φ um T, in ihr eine Gerade Q um p dreht und gleichzeitig ein Punkt q sich auf Q bewegt. Gelangt φ nach σ, so muß gleichzeitig Q mit T und q mit p zusammenfallen. Bei jeder dieser drei Bewegungen lassen sich nun zwei verschiedene Fälle unterscheiden, jenachdem nämlich die Ebene φ in σ, die Gerade Q in T und der Punkt q in p den Bewegungssinn nicht ändern oder ändern (umkehren). Bezeichnen wir das eine Verhalten mit $+$, das andere mit $-$, so gelangen wir zu den folgenden 8 Fällen[1]):

1) *G. K. Chr. v. Staudt,* Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, Nr. 205; vgl. auch *Chr. Wiener,* Z. Math. Phys. 25 (1880), S. 95—97, u. Lehrbuch, I, Nr. 257, 259.

Hosted by Google

	1	2	3	4	5	6	7	8
p	+	+	+	+	−	−	−	−
T	+	+	−	−	+	+	−	−
σ	+	−	+	−	+	−	+	−

Man kann sich diese Fälle auf folgende Weise leicht anschaulich machen. Der Raum wird durch Schmieg-, Normal- und rektifizierende Ebene in 8 Oktanten zerlegt; nimmt man nun von den zwei Teilen, in die p das betrachtete Kurvenstück zerlegt, den einen stets in demselben Oktanten, den andern der Reihe nach in jedem der 8 Oktanten an, so gelangt man zu den obigen 8 Fällen.

Bei Änderung des Bewegungssinnes spricht man von Rückkehrelementen[1]), also von *Rückkehrpunkt*, *Rückkehrtangente* und *Rückkehrebene*, oder von *stationären* Elementen. Eine Rückkehrtangente enthält drei, eine Rückkehrebene vier benachbarte Kurvenpunkte. Im Fall 1 heißt p ein *gewöhnlicher* Kurvenpunkt. Benennungen für die übrigen 7 Fälle *(singuläre Punkte)* haben sich noch nicht eingebürgert.[2]) Geht die Raumkurve zweimal durch denselben Punkt, so heißt er ein *Doppelpunkt*.

In einem gewöhnlichen Punkt einer Raumkurve durchsetzt diese die Schmiegebene und befindet sich auf einer Seite der rektifizierenden Ebene (vgl. Fig. 114).

67. Krümmungen einer Raumkurve. Klassenzahl algebraischer Raumkurven. Durch drei benachbarte Punkte von K ist ein der Schmiegebene angehörender Kreis (als Grenzkreis betrachtet) bestimmt, den man *Krümmungs-*, *Oskulations-* oder *Schmiegungskreis* der Raumkurve nennt. Sein Mittelpunkt heißt *Krümmungsmittelpunkt*, der reziproke Wert seines Radius die *erste Krümmung* oder *Flexion* der Kurve im zugehörigen Kurvenpunkt. Bezeichnet $d\varphi$ den Winkel zweier benachbarten Tangenten (im Bogenmaß), ds die Entfernung ihrer Berührungspunkte, so ist nach Nr. 63 die erste Krümmung auch $\frac{d\varphi}{ds}$. Analog definiert man nun die *zweite Krümmung* oder *Torsion* einer Raumkurve, die ein Maß für die Stärke des Heraustretens der Kurve aus der Schmiegebene bildet. Schließen nämlich zwei benachbarte Schmiegebenen den Winkel $d\psi$ ein und ist wieder ds die Entfernung der zugehörigen Berührungspunkte, so nennt man $\frac{d\psi}{ds}$ die Torsion der Raumkurve.

1) *v. Staudt*, a. a. O. Nr. 197.

2) Vgl. jedoch die Vorschläge von *R. Mehmke*, Z. Math. Phys. 49 (1903), S. 62—68.

Hosted by Google

Denken wir uns auf einer Seite der Schmiegebene des Punktes p und zwar auf dem von p nach dem Krümmungsmittelpunkt gehenden Halbstrahl einen Beschauer stehen und gegen p hinblicken, so macht ein auf der Kurve für ihn nach abwärts durch p sich bewegender Punkt eine Drehung rechtsum oder linksum. Im ersten Fall heißt die Kurve in p *rechtsgewunden*, im zweiten Fall *linksgewunden.*[1]) Die Torsion soll in dem einen Fall positiv, in dem andern negativ genommen werden. Die Torsion einer ebenen Kurve ist Null.

Wie eine ebene Kurve als Umhüllungsgebilde ihrer Tangenten (als Strahlort, Nr. 60), so läßt sich eine Raumkurve als Umhüllungsgebilde ihrer Schmiegebenen, als *Ebenenort*, auffassen. Eine Raumkurve kann daher auch durch gesetzmäßige Bewegung einer Ebene erzeugt werden, deren verschiedene Lagen die Schmiegebenen der Kurve bilden. Die Schnittlinien benachbarter Lagen der Ebene sind die Tangenten, die Schnittpunkte je dreier aufeinander folgenden Lagen der Ebene die Punkte der Raumkurve. Diese Erzeugungsweise ist der durch Bewegung eines Punktes dual (Nr. 22). Führt man analog, wie in Nr. 60 erwähnt wurde, rechtwinkelige Ebenenkoordinaten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ ein, so definieren zwei Gleichungen zwischen diesen eine Raumkurve im obigen Sinne. Sind diese Gleichungen algebraisch, so folgert man Sätze, die zu denen in Nr. 65 dual sind. Da eine als Punktort algebraische Kurve auch als Ebenenort algebraisch ist, so kann man z. B. den zu Satz 1 in Nr. 65 dualen Satz in folgender Form aussprechen:

Satz 1: *An eine algebraische Raumkurve lassen sich aus jedem Punkt gleichviele Schmiegebenen legen. Diese konstante Anzahl heißt die Klasse der Raumkurve.*

Die Tangenten einer Raumkurve erfüllen eine krumme, aus zwei längs der Kurve zusammenhängenden Mänteln bestehende Fläche, die *Tangentenfläche* der Raumkurve; diese bildet eine scharfe Kante der Fläche, deren *Rückkehrkante* oder *Gratlinie.* (Siehe Fig. 118.)

68. Projektionen von Raumkurven. Von einem Zentral- oder Parallelriß K' einer Raumkurve K ist im allgemeinen dasselbe zu sagen, was in Nr. 64 von dem einer ebenen Kurve erwähnt wurde. Insbesondere bildet sich jede Tangente von K, die nicht durch das Projektionszentrum geht, als Tangente von K' ab.

Wir wollen nun die Projektionen der in Nr. 66 erwähnten 8 Punktarten einer Raumkurve untersuchen. Dabei müssen wir die drei mög-

1) Auf welcher Seite der Schmiegebene der Beschauer stehend gedacht wird, ist dabei gleichgültig. Stellt Fig. 114 eine solche Ansicht dar, daß man die von den Viertelebenen $\sigma v \tau$ gebildete körperliche Ecke von der hohlen Seite sieht, so ist die Kurve K rechtsgewunden.

Hosted by Google

lichen Fälle unterscheiden, daß das Projektionszentrum a) außerhalb der Schmiegebene, b) auf der Tangente, c) außerhalb der Tangente aber in der Schmiegebene des Punktes liege.

a) Geht weder die Tangente T noch die Schmiegebene σ des Punktes p von K durch das im Endlichen oder Unendlichen gelegene Projektionszentrum o, so hat K' in p' denselben Tangenten- und Punktcharakter wie K in p, d. h. jenachdem T und p Rückkehrelemente von K sind oder nicht, sind auch T' und p' Rückkehrelemente von K' oder nicht. Denn denken wir uns den p umgebenden Teil von K wie in Nr. 66 erzeugt, so wird durch Projektion aus dem sowohl außerhalb Q als φ liegenden Punkt o weder die Reihenfolge der Punkte in Q noch der Geraden in φ geändert. *Es wird also die Projektion p' des Punktes p von K in den Fällen 1 und 2 der Tabelle in Nr. 66 ein gewöhnlicher Punkt, in den Fällen 3 und 4 ein Wendepunkt, in den Fällen 5 und 6 eine Spitze und in den Fällen 7 und 8 ein Schnabel von K' sein.* Zusammenfassend können wir sagen:

Satz 1: *Liegt das Projektionszentrum außerhalb der Schmiegebene des Punktes p einer Raumkurve K, so besitzt die Projektion K' in p' den gleichen Punkt- und Tangentencharakter wie K in p.*

b) Liegt o auf T (Fig. 115), so projizieren sich die Ebenen φ_i durch T als die Geraden $Q_i' = [p'q_i']$, die Schmiegebene σ insbesondere als die Tangente S' von K' in p' und die Aufeinanderfolge der Ebenen φ_i ist dieselbe wie die der entsprechenden Geraden Q_i'. *K' besitzt daher in Bezug auf S' denselben Charakter wie K in Bezug auf σ.*

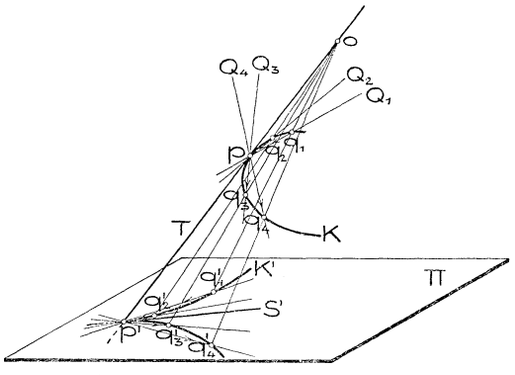


Fig. 115.

Anders ist es jedoch mit dem Charakter von K' in bezug auf p'. Kurz bevor die um p sich drehende Gerade Q mit T zusammenfällt und kurz nachdem sie T verlassen hat, schließt sie mit σ sehr kleine Winkel ein; für die jetzige Betrachtung können diese beiden Lagen von Q als mit T in einer Ebene befindlich angenommen werden. Wenn nun Q, in T angelangt, ihren Drehsinn nicht ändert (T keine Rückkehrtangente ist), so sieht man diese Gerade (aus o!) vor und nach dem Zusammenfallen mit T von verschiedenen Seiten; ein in p sich nicht ändernder Bewegungssinn von q auf Q erscheint daher in der Pro-

Hosted by Google

jektion als in p' sich ändernd (vgl. Fig. 115); ein in p sich ändernder Bewegungssinn von q auf Q erscheint hingegen in der Projektion als in p' sich nicht ändernd. Das Umgekehrte tritt ein, wenn T Rückkehrtangente ist. Dann sieht man Q vor und nach dem Zusammenfallen mit T von derselben Seite, das Verhalten von q in p wird durch Projektion dann nicht geändert. Man kann mithin folgenden Satz aussprechen:

Satz 2: *Liegt das Projektionszentrum in der Tangente T des Punktes p von K, so ist der Tangentencharakter von K' in p' gleich dem Ebenencharakter von K in p; hingegen hat K' in p' denselben oder entgegengesetzten Punktcharakter wie K in p, jenachdem T Rückkehrtangente ist oder nicht.*

Ist insbesondere p ein gewöhnlicher Punkt von K, so folgt aus diesem Satze, daß K' in p' eine Spitze hat (vgl. Fig. 115). Dies gibt den

Satz 3: *Berührt bei der (zentralen oder parallelen) Abbildung einer Raumkurve ein Sehstrahl die Kurve in einem gewöhnlichen Punkt, so hat das Bild der Kurve im Bilde des Berührungspunktes eine Spitze.*

Analoges gilt für den Schlagschatten einer Raumkurve.

c) Liegt o in σ, nicht aber auf T, dann sieht man die Ebene $\varphi = [Tq]$ vor und nach dem Zusammenfallen mit σ von derselben oder von verschiedener Seite, jenachdem σ eine Rückkehrebene ist oder nicht. Im Fall also σ keine Rückkehrebene ist, erscheint ein in T sich nicht ändernder Drehsinn von Q in der Projektion als in T' sich ändernd, ein in T sich ändernder Drehsinn von Q hingegen als in T' sich nicht ändernd. Das Umgekehrte tritt ein, wenn σ Rückkehrebene ist. Da o stets außerhalb Q bleibt, so wird der Bewegungssinn von q auf Q durch Projektion nicht geändert, d. h. der Punktcharakter von K in p wird dem Punktcharakter von K' in p' gleich sein. Dies gibt den

Satz 4: *Liegt das Projektionszentrum in der Schmiegebene σ des Punktes p von K (nicht aber auf der Tangente in p), so besitzt K' in p' denselben Punktcharakter wie K in p; hingegen hat K' in p' denselben oder entgegengesetzten Tangentencharakter wie K in p, jenachdem σ Rückkehrebene ist oder nicht.*

Für einen gewöhnlichen Punkt p wird darnach p' ein Wendepunkt oder man hat

Satz 5: *Oskuliert bei der (zentralen oder parallelen) Abbildung einer Raumkurve eine Schebene (Ebene durch o) die Kurve in einem gewöhnlichen Punkt, so hat das Bild der Kurve im Bilde des Berührungspunktes einen Wendepunkt.*

Hosted by Google

Mit Hilfe der eben abgeleiteten Sätze lassen sich für die Normalrisse der 8 Arten von Kurvenpunkten auf die Schmieg-, Normal- und rektifizierende Ebene die Charaktere leicht angeben.[1])

Wenn also auch die Kurve K gar keine Singularitäten aufweist, so kann K' deren verschiedene zeigen. Es sei noch erwähnt, daß K' soviele Doppelpunkte besitzen wird, als aus o Geraden legbar sind, die K zweimal schneiden (Sekanten oder Bisekanten von K).

Von besonderer Wichtigkeit ist der

Satz 6: *Eine algebraische Raumkurve und ihre Projektion aus einem der Kurve nicht angehörenden Punkt besitzen gleiche Ordnungszahlen.*

Denn wählt man in der Bildebene Π eine beliebige Gerade G', so enthält sie die Bilder aller Punkte der Ebene $[oG']$. G' hat also mit K' ebensoviele Punkte gemeinsam wie $[oG']$ mit K. Die erste Anzahl ist aber (Nr. 57) die Ordnung von K', die letztere (Nr. 65) die Ordnung von K. Dabei ist jedoch zu beachten, daß die ganze Kurve K' oder eine Teilkurve von ihr auch zwei- oder mehrfach überdeckt sein kann und dann doppelt oder mehrfach gezählt werden muß (vgl. Nr. 102).

Hingegen wird die Projektion einer Kurve n^{ter} Ordnung aus einem ihrer einfachen Punkte von $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, aus einem ihrer Doppelpunkte von $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung usw. sein.

Satz 6 zufolge wird auch der Schlagschatten einer algebraischen Raumkurve auf eine Ebene im allgemeinen dieselbe Ordnung wie die Raumkurve besitzen.

Aus Satz 1 in Nr. 68 folgt: Die Klasse von K' ist im allgemeinen gleich der Ordnung der Tangentenfläche (Nr. 71) von K. Denn die aus einem Punkte g' von Π an K' legbaren Tangenten sind die Projektion jener Tangenten von K, die $[og']$ schneiden; diese Zahl ist aber die Ordnung der Tangentenfläche von K.

69. Konstruktion der Tangente, der Schmiegebene und des Krümmungshalbmessers in einem Punkte einer durch zugeordnete Normalrisse gegebenen Raumkurve. Um eine Raumkurve K anzunehmen, darf man zwei Normalrisse, etwa K' und K'', innerhalb gewisser Grenzen willkürlich wählen. Berührt jedoch eine Ordnungslinie den einen dieser Risse, so beachte man, daß sie auch den andern berühren oder einen Rückkehrpunkt desselben enthalten muß (vgl. z. B. Fig. 117). Damit ferner durch die beiden Risse die Kurve im Raume eindeutig bestimmt sei, muß, da die Ordnungslinien K' und K'' im allgemeinen in mehreren Punkten schneiden, durch beigesetzte

1) Vgl. *Chr. Wiener*, Z. Math. Phys. 25 (1880), S. 96 f., u. Lehrbuch, I, Nr. 259. Modelle dazu sind im Verlage von *L. Brill* in Darmstadt erschienen (jetzt bei *M. Schilling* in Halle a. S.).

Hosted by Google

Zeichen (Buchstaben) festgesetzt werden, welche Punkte von K' und K'' einander zugeordnet sein sollen. Durch den einen Riß eines K angehörigen Punktes ist dann der andere Riß eindeutig bestimmt.

Die Tangente T in p an K stellt sich (nach Nr. 68) in den Rissen als das Tangentenpaar T', T'' an K' und K'' in p' bzw. p'' dar (Fig. 116). Umgekehrt bestimmen diese Tangenten T' und T'' eindeutig T. Berührt eine Ordnungslinie K' und K'', so wird K von einer doppelprojizierenden Ebene berührt.

Die Schmiegebene σ des Punktes p geht durch T. Um von ihr eine erste Hauptlinie S_1 zu erhalten, verbinden wir p mit den in seiner Nähe zu verschiedenen Seiten auf K gewählten Punkten $q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots$, suchen die Schnittpunkte $t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots, t$ dieser Geraden sowie der Tangente T mit einer zu Π_1 parallelen Ebene ε_1 und verbinden diese Punkte durch eine Kurve K_1. Die Tangente in t an K_1 ist S_1. Denn die Ebenen $[Tq_1]$, $[Tq_2]$, ... haben, wenn q auf K nach p hineinrückt, σ als Grenzlage. Nun schneiden diese Ebenen ε_1 in den Geraden $[tt_1]$, $[tt_2]$, ... und deren Grenzlage ist, wenn t_i nach t hineinrückt, die Tangente S_1 an K_1 in t. S_1 und p bestimmen die Schmiegebene σ. (Es sei noch bemerkt, daß K_1 ein Teil der Projektion von K aus p auf ε_1 ist.)

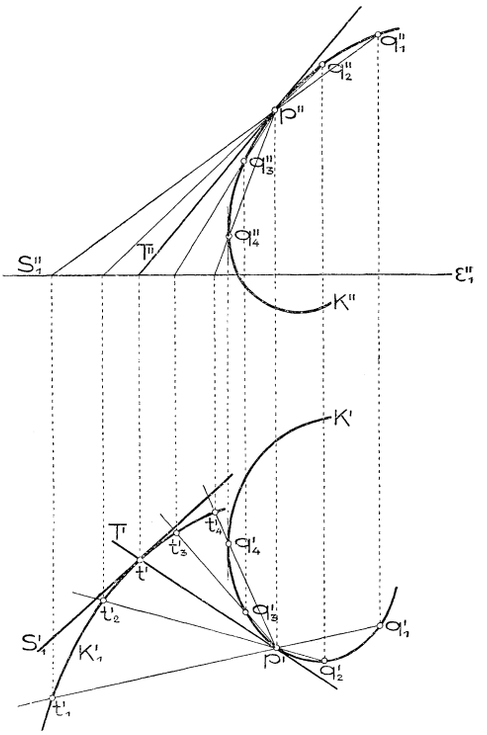


Fig. 116.

Da K mit σ drei benachbarte Punkte gemeinsam hat, so wird jede Projektion von K auf σ durch dieselben drei Punkte gehen, d. h. in p denselben Krümmungskreis wie K haben. Projiziert man insbesondere K durch Strahlen senkrecht zu Π_1 auf σ und nennt diese Projektion K_2, so fällt K_2' mit K' zusammen. Durch die oben ermittelte Ebene σ und $K_2'(=K')$ ist aber K_2 bestimmt. Dreht man jetzt σ um S_1 parallel zu Π_1, so erhält man die Gestalt K_2^0 von K_2 (nach Nr. 64) und kann nun nach Nr. 63 in p^0 den Krümmungsradius von K_2^0 konstruieren, der dem von K in p gleicht.

70. Ermittlung der Schnittpunkte einer durch zugeordnete Normalrisse gegebenen Raumkurve K mit einer Ebene ε (Fig. 117).

Hosted by Google

K und ε seien im Auf- und Kreuzriß, ε durch zwei zweite Hauptlinien A und B gegeben. In Fig. 117 steht die Tangente an K im Punkte 1 zu Π_3 senkrecht, weil K''' in $1'''$ einen Rückkehrpunkt (Schnabel) hat (Nr. 68).

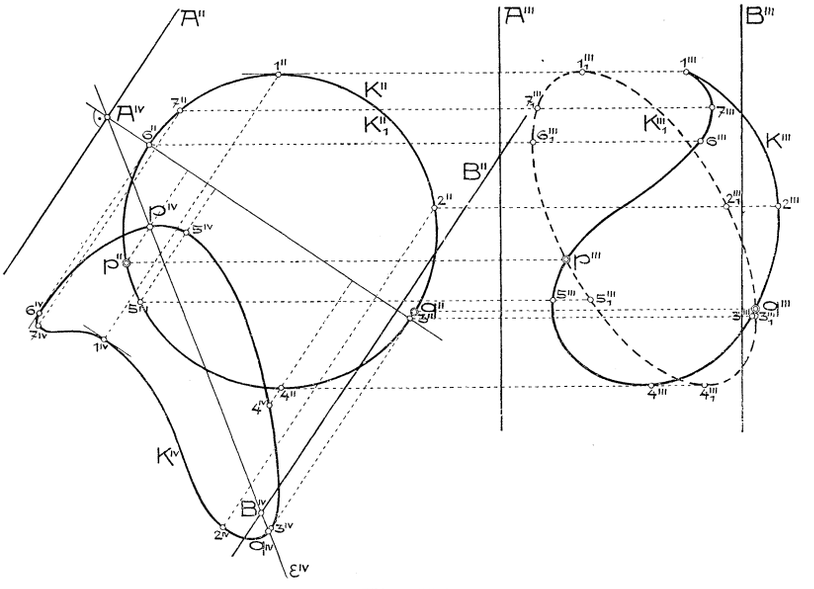


Fig. 117.

1. Methode. Man ermittle den Seitenriß von K und ε auf eine zu A normale Ebene Π_4. ε^{IV} wird eine Gerade und deren Schnittpunkte mit K^{IV} sind die Seitenrisse der gesuchten Schnittpunkte p und q, aus denen p'', q'' und p''', q''' folgen. Es genügt natürlich, solche Teile von K^{IV} zu zeichnen, denen voraussichtlich die Schnittpunkte mit ε^{IV} angehören werden.

2. Methode. Sei K_1 jene Kurve in ε, deren Aufriß sich mit K'' deckt, so sind die Schnittpunkte von K und K_1 identisch mit denen von K und ε. Ermittelt man (nach Nr. 64) K_1''', so gehören die Kreuzrisse jener Punkte sowohl K_1''' als K''' an. Jedoch ist nicht jeder Schnittpunkt dieser Kurven Kreuzriß eines der gesuchten Punkte, sondern nur ein solcher, wo zugeordnete Punkte von K und K_1 sich decken. Es muß also hierbei die Zuordnung der Punkte der Risse genau beachtet werden. In Fig. 117 z. B. sind bloß die Punkte p''', q''' Seitenrisse von Schnittpunkten der Kurven K und K_1, da in dem oberen der beiden übrigen reellen Schnittpunkte von K''' und K_1''' sich zwei Punkte projizieren, von denen der K_1 angehörige zwischen 1_1 und 2_1, der K angehörige zwischen 5 und 6 liegt, die also sicherlich nicht zugeordnet sind; analoges gilt für den unteren

Hosted by Google

Schnittpunkt. — Es wäre natürlich wieder nur nötig gewesen, jene Teile von K_1''' zu zeichnen, auf denen voraussichtlich die Schnittpunkte liegen werden, was einige Versuche bald lehren.

II. Kapitel.

Allgemeines über krumme Flächen.

71. Erzeugung krummer Flächen, ihre Einteilung in algebraische und transzendente. Einige Sätze über algebraische Flächen. Gewöhnlich werden nur *gesetzmäßige Flächen* in Betracht gezogen. Eine solche ist meist definiert als die Gesamtheit der Lagen einer sich gesetzmäßig bewegenden (gesetzmäßig erzeugten) Kurve, die dabei ihre Gestalt entweder gesetzmäßig oder gar nicht ändert. Die verschiedenen Lagen der sich bewegenden Kurve heißen die *Erzeugenden* der Fläche. Ihre sämtlichen Punkte sind also nach einer bestimmten Vorschrift konstruiert. Bezeichnen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die rechtwinkeligen Koordinaten eines Flächenpunktes, so kann diese Vorschrift in eine Gleichung $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = 0$ umgesetzt werden, die für die Punkte der Fläche und nur für diese besteht.

In der Technik werden ziemlich häufig Flächen bloß durch eine Schar durch Zeichnung gegebener Kurven bestimmt. Solche nur unvollständig festgelegte Flächen, für die man kein Entstehungsgesetz kennt, sollen *graphische Flächen* heißen (vgl. Nr. 144).

Läßt sich die Gleichung einer Fläche durch algebraische Umformungen so auf die obige Form bringen, daß links eine ganze rationale Funktion von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ steht, so heißt die Fläche *algebraisch* und die höchste Dimension eines Gliedes nennt man die *Ordnung der Fläche.* Nicht algebraische Flächen heißen *transzendent.* Werden imaginäre Schnittpunkte (Nr. 57) mitgerechnet und mehrfache Punkte mehrfach gezählt, so bestehen die Sätze:

Satz 1: *Eine algebraische Fläche n^{ter} Ordnung wird von jeder (ihr nicht angehörigen) Geraden in n Punkten geschnitten.*

Satz 2: *Eine (analytische) Fläche, die von jeder Geraden in n Punkten geschnitten wird, ist eine algebraische Fläche n^{ter} Ordnung.*

Die einzige Fläche erster Ordnung ist die Ebene. Zu den Flächen zweiter Ordnung gehören die Kugel, der Drehkegel, das Ebenenpaar usw.; letzteres ist eine zerfallende Fläche zweiter Ordnung.

Satz 3: *Jeder ebene Schnitt einer Fläche n^{ter} Ordnung ist eine Kurve n^{ter} Ordnung.*

Denn jede Gerade der Schnittebene hat mit der Fläche, also auch mit der Schnittkurve n Punkte gemeinsam. Aus Nr. 61, Satz 5

Hosted by Google

folgt dann, daß *eine Gerade, die mit einer Fläche n^{ter} Ordnung mehr als n Punkte gemeinsam hat, ihr ganz angehört.*

Satz 4: *Eine Fläche p^{ter} und eine Fläche q^{ter} Ordnung (ohne gemeinsame Teilfläche) haben eine Raumkurve pq^{ter} Ordnung gemeinsam.*

Denn irgend eine Ebene ε schneidet die beiden Flächen in ebenen Kurven p^{ter} und q^{ter} Ordnung, die nach Nr. 61, Satz 1 pq Punkte gemeinsam haben. Diese sind aber die einzigen in ε liegenden gemeinsamen Punkte beider Flächen.

Zwei Flächen zweiter Ordnung durchdringen sich demnach in einer Kurve vierter Ordnung, die freilich, wie wir später (Nr. 98, 101) sehen werden, auf verschiedene Weise zerfallen kann.

Ferner sei noch erwähnt

Satz 5: *Eine Fläche p^{ter} und eine Raumkurve n^{ter} Ordnung haben pn Punkte gemeinsam,*

woraus unter Beachtung von Satz 4 folgt:

Satz 6: *Drei algebraische Flächen mit den Ordnungszahlen p, q, r schneiden sich in pqr Punkten.*

Eine Verallgemeinerung des Satzes 3 in Nr. 65 bildet der

Satz 7: *Haben eine Fläche p^{ter} und eine Kurve n^{ter} Ordnung mehr als pn Punkte gemeinsam, so liegt ein Teil der Kurve (oder die ganze Kurve) auf der Fläche.*

Der obige Satz über eine Gerade und eine algebraische Fläche ist ein Sonderfall davon.

72. Einteilung krummer Flächen nach der Art ihrer Erzeugenden. Einige Eigenschaften der abwickelbaren Flächen.

Nach der Art ihrer Erzeugenden teilt man die Flächen in *Regelflächen*[1]) und *Nichtregelflächen*. Unter ersteren versteht man alle durch Bewegung einer Geraden erzeugbaren Flächen. Auf ihnen muß sich also durch jeden Punkt eine Gerade ziehen lassen. Man kann die Bewegung der Geraden dadurch bestimmt denken, daß sie etwa drei vorgegebene Kurven, die *Leitlinien*, beständig schneiden soll. Wenn je zwei benachbarte Lagen der Geraden sich im allgemeinen nicht schneiden, also windschief zueinander sind, so nennt man die Regelfläche eine *windschiefe Fläche*. Z. B. bilden sämtliche Haupt- oder Binormalen einer Raumkurve windschiefe Flächen. Schneiden sich hingegen je zwei benachbarte Lagen der erzeugenden Geraden, so heißt die Regelfläche *abwickelbar*[2]) *(developpabel)* oder auch eine

1) Der Name rührt von dem alten Ausdruck „Regel“ für „Lineal“ her.

2) Solche Flächen wurden zuerst 1771 von *L. Euler* und *G. Monge* untersucht. Vgl. *G. Scheffers*, Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume, Leipzig 1901, S. 261, Fußn.

Hosted by Google

Torse. Die Schnittpunkte der aufeinanderfolgenden Erzeugenden bilden dann im allgemeinen eine Raumkurve (vgl. Fig. 118) und jede Erzeugende ist Tangente dieser Kurve, weil sie die Schnittpunkte mit der vorhergehenden und nachfolgenden Erzeugenden enthält. Anders ausgedrückt:

Satz 1: *Eine abwickelbare Fläche ist im allgemeinen identisch mit der Tangentenfläche einer Raumkurve.*

Diese Raumkurve heißt die *Rückkehrkante* oder *Gratlinie* der Fläche, weil deren beide Mäntel sich längs dieser Linie berühren und daher ein ebener Schnitt der Fläche im allgemeinen in den Schnittpunkten mit der Gratlinie Rückkehrpunkte besitzt.

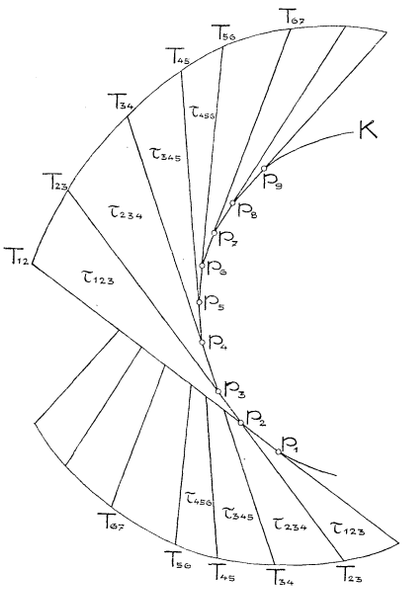


Fig. 118.

Den Namen abwickelbar erhielt die Fläche wegen der Eigenschaft, sich ohne Falten, Dehnen oder Zerreißen in eine Ebene ausbreiten („abwickeln") oder, wie wir auch kurz sagen wollen, *verebnen* zu lassen. Sind nämlich (Fig. 118) T_{12}, T_{23}, T_{34}, ... aufeinanderfolgende Erzeugende der Fläche, $\tau_{123}, \tau_{234}, \tau_{345}, \ldots$ die durch je zwei von ihnen legbaren Ebenen (Schmiegebenen der Gratlinie K), so kann man unter Festhaltung von τ_{123} die Fläche unendlich wenig um T_{23} drehen, bis τ_{234} mit τ_{123} zusammenfällt, dann die Fläche um T_{34} drehen, bis τ_{345} mit τ_{234} zusammenfällt usw., sodaß schließlich die ganze Fläche in die Ebene τ_{123} ausgebreitet ist. Die beiden längs K zusammenhängenden Flächenmäntel überdecken dann einen Teil der Ebene doppelt; die Erzeugenden werden die Tangenten einer ebenen Kurve, der Verwandelten von K.

Bei dieser Verebnung bleibt die Länge jedes Linienelementes der Fläche ungeändert, mithin auch die Länge irgend einer Kurve auf der Fläche; das gleiche gilt für den Winkel, den zwei benachbarte Erzeugende oder eine Erzeugende mit einem in ihr beginnenden Linienelement einschließen. Daraus folgen

Satz 2: *Die kürzeste, auf der Fläche verlaufende Verbindungslinie zweier Punkte einer abwickelbaren Fläche geht bei der Verebnung in eine Gerade über*

Hosted by Google

und

Satz 3: *Die erste Krümmung der Gratlinie einer abwickelbaren Fläche wird bei deren Verebnung nicht geändert.*

Zum Beweise des letzten Satzes braucht nur darauf hingewiesen zu werden, daß nach Nr. 67 die erste Krümmung einer Kurve $\frac{d\varphi}{ds}$ ist und daß sich für die Gratlinie sowohl $d\varphi$ als ds bei der Verebnung nicht ändern.

Wird umgekehrt eine Ebene (etwa ein Blatt Papier) irgendwie ohne Falten, Dehnen oder Zerreißen verbogen, so entsteht eine abwickelbare Fläche.

Im besondern können die Schnittpunkte der benachbarten Erzeugenden einer abwickelbaren Fläche in einen und denselben Punkt

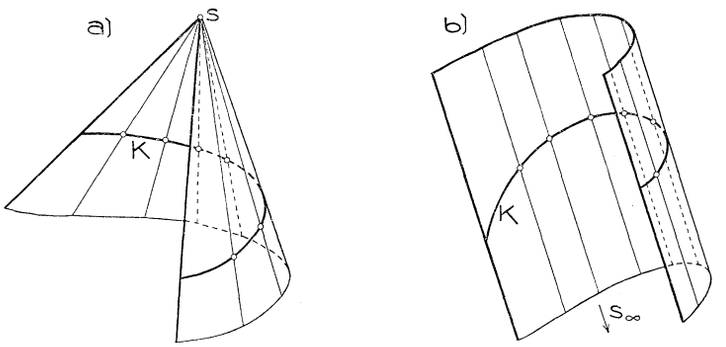


Fig. 119 a, b.

fallen; die Fläche ist dann durch Drehung einer Geraden um einen Punkt erzeugbar und heißt *Kegel-* oder *Zylinderfläche*, jenachdem der feste Punkt (die *Spitze* oder der *Scheitel*) im Endlichen oder Unendlichen liegt. Die Bewegung der Geraden läßt sich durch Angabe der Spitze s, bzw. der Erzeugendenrichtung, und einer Kurve K, der *Leitkurve*, bestimmen, welche die Gerade beständig schneiden soll (Fig. 119). Ist K eine algebraische Kurve n^{ter} Ordnung, so ist jeder durch sie legbare Kegel oder Zylinder (dessen Spitze nicht der Kurve angehört) ebenfalls von n^{ter} Ordnung.

Entsteht ein Kegel oder Zylinder durch Drehung (Rotation) einer Geraden um eine sie schneidende oder zu ihr parallele Achse, so heißt er *Drehkegel* bzw. *Drehzylinder*. Er ist von der zweiten Ordnung, da jede zur Achse normale Ebene ihn in einem Kreise, also in einer Kurve zweiter Ordnung schneidet.

Auf die Verebnung abwickelbarer Flächen kommen wir noch später zurück (Nr. 107).

Hosted by Google

Die Nichtregelflächen lassen sich nach der Art der Erzeugenden in Gruppen teilen. So z. B. nennt man die durch Bewegung eines (seine Lage und Größe ändernden) Kreises erzeugbaren Flächen *zyklische Flächen.*

Flächen endlich, die durch Bewegung einer ihre Gestalt nicht ändernden Kurve entstehen, teilt man nach der Art dieser Bewegung ein. Man spricht demgemäß von *Schieb-, Dreh-* und *Schraubenflächen,* von denen die letzten beiden Arten eine ausführlichere Behandlung erfahren sollen.

73. Tangente, Tangentenebene, Haupttangenten einer Fläche. Unter einer Tangente der Fläche Φ im Punkte p versteht man die Verbindungslinie von p mit einem benachbarten Punkte, d. h. die Grenzlage, die die Sekante $[pq]$ annimmt, wenn q auf irgend einem der Fläche angehörigen Wege in p hineinrückt. Es gibt unendlich viele Flächentangenten in einem Punkte. Die Tangente T an jede durch p gehende, auf der Fläche liegende Kurve K im Punkte p ist eine Tangente der Fläche in p. *Jede Ebene durch T schneidet Φ in einer Kurve, die im allgemeinen T in p berührt,* weil sie mit T die beiden Φ angehörigen zusammenfallenden Punkte gemeinsam hat. Im besondern kann jedoch diese Schnittkurve in p einen Doppelpunkt haben ohne T zu berühren.

Sei K_1 (Fig. 120) eine zweite Kurve auf Φ durch p und T_1 ihre Tangente in p, dann schneidet die Ebene τ durch T und T_1 die Fläche in einer Kurve S, die sowohl T als T_1 berührt, genauer gesagt, mit jeder der beiden Geraden zwei zusammenfallende Punkte gemeinsam hat. Dies kann nur dann eintreten, wenn p ein Doppelpunkt der Schnittkurve S ist. Dabei beachte man jedoch, daß die beiden durch p gehenden Kurvenzüge (deren Tangenten H_1, H_2 natürlich von T und T_1 im allgemeinen verschieden sein werden) reell oder imaginär sein können (Nr. 58, S. 116). Jede andere Gerade in τ durch p hat mit S, also auch mit der Fläche ebenfalls zwei benachbarte Punkte gemeinsam, ist mithin eine Tangente der Fläche.[1])

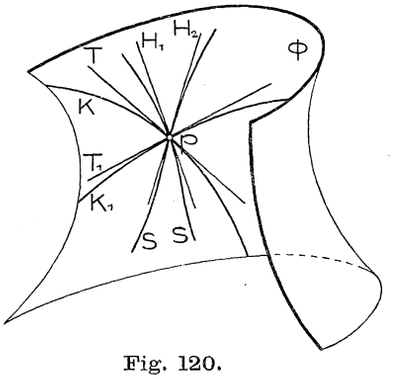


Fig. 120.

1) Diese Ausdrucksweise hat den Sinn, daß jede in τ durch p gezogene Gerade als Grenzlage einer Geraden betrachtet werden kann, die sich um einen ihrer Punkte dreht und die beiden Kurvenzweige S durch p beständig in zwei getrennten Punkten schneidet. Daraus erkennt man die Unzulässigkeit der Aus-

Hosted by Google

Gäbe es nun außerhalb τ noch eine Gerade T_2, die mit der Fläche zwei in p zusammenfallende Punkte gemeinsam hätte, so müßte jede Gerade G durch p die Fläche in zwei zusammenfallenden Punkten treffen. Denn die Ebene $[GT_2]$, die τ in einer Tangente T_3 von Φ schnitte, enthielte dann zwei Tangenten des Punktes p; mithin wäre nach obiger Schlußweise auch G eine Tangente. p wäre dann ein *singulärer* Flächenpunkt, entweder ein *gewöhnlicher Knotenpunkt* (auch *konischer Punkt* genannt, vgl. Fig. 123) oder ein Punkt einer *Doppelkurve* (vielfachen Kurve) der Fläche, längs der sie sich selbst durchschneidet.[1]) Sehen wir von solchen Punkten ab, so gibt es also außerhalb τ keine Φ in p berührende Gerade und es besteht

Satz 1: *Sämtliche Tangenten einer Fläche in einem nicht singulären Punkt gehören einer Ebene, der Tangentenebene (Tangentialebene, Berührungsebene oder auch Berührebene) der Fläche in jenem Punkte an.*

Die Tangentialebene τ einer Fläche im Punkte p enthält sämtliche p benachbarten Flächenpunkte und *schneidet die Fläche,* wie oben gezeigt, *in einer Kurve mit einem Doppelpunkt in p.* τ ist durch zwei Tangenten in p bestimmt.

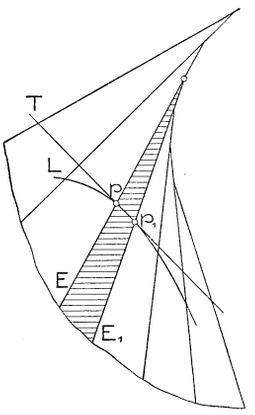


Fig. 121.

Eine Fläche zweiter Ordnung wird also von jeder ihrer Tangentenebenen in zwei reellen (getrennten oder vereinigten) oder konjugiert imaginären Geraden geschnitten (vgl. Nr. 58).

Enthält die Fläche eine Gerade E, so geht jede Berührungsebene in einem Punkte von E durch diese Gerade.

Es seien hier gleich einige weitere für den darstellenden Geometer wichtige Folgerungen erwähnt.

Die Berührungsebene in einem Punkte p einer abwickelbaren Fläche enthält die durch ihn gehende Erzeugende E und die benachbarte Erzeugende E_1. Denn legen wir (Fig. 121) an eine beliebig auf der Fläche durch p gezogene Kurve L die Tangente T in p, so enthält sie auch den auf E_1 liegenden zu p benachbarten Punkt p_1. Ebene $[ET] = [Ep_1]$ ist dann die Berührungsebene der Fläche in p. Da aber E und E_1 sich

sage, daß auch jede außerhalb τ durch p gezogene Gerade S in zusammenfallenden Punkten schneide; denn eine solche Gerade kann nicht als Grenzlage einer S beständig in zwei getrennten Punkten schneidenden Geraden aufgefaßt werden.

1) Als Doppelkurve ist auch jede *Kuspidalkurve* einer Fläche aufzufassen, d. h. eine Kurve, längs der sich die Fläche ebenso berührt wie sich eine abwickelbare Fläche längs ihrer Gratlinie berührt.

Hosted by Google

schneiden, so enthält diese Ebene auch E_1, d. h. das zwischen E und E_1 liegende Flächenelement. Daraus folgt

Satz 2: *Jede Tangentenebene einer abwickelbaren Fläche berührt diese längs einer Erzeugenden.*

Dieser Satz gilt insbesondere für Kegel- und Zylinderflächen.

Bewegt sich eine Ebene nach irgend einem Gesetz, so umhüllt sie eine abwickelbare Fläche. Die verschiedenen Lagen der Ebene sind Tangentialebenen, die Schnittlinien benachbarter Lagen Erzeugende der Fläche. Auch jede andere Fläche kann als Umhüllungsgebilde von Ebenen aufgefaßt werden. Sind $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ die in Nr. 67 erwähnten Ebenenkoordinaten, so bestimmt jede Gleichung $f(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = 0$ im allgemeinen ∞^2 eine Fläche einhüllende Ebenen; sie bilden das zur Fläche als Punktort duale Gebilde. Ist die Gleichung *algebraisch* vom m^{ten} Grade, so heißt die dadurch definierte Fläche eine *Fläche m^{ter} Klasse. Durch jede Gerade des Raumes lassen sich dann m Tangentenebenen an die Fläche legen.* Alle einer Tangentenebene τ benachbarten Tangentenebenen gehen durch den Berührungspunkt von τ. Zu den Flächen als Ebenenort sind auch die aus sämtlichen Tangentenebenen einer unebenen oder ebenen Kurve bestehenden Gebilde zu rechnen; sie sind zu den als Punktort betrachteten abwickelbaren bzw. Kegelflächen dual.

Durchdringen sich zwei beliebige Flächen Φ_1 und Φ_2 in einer Kurve K, so gehört die im Punkte p von K an sie gelegte Tangente T den Tangentialebenen τ_1 und τ_2 beider Flächen im Punkte p an oder

Satz 3: *Die Tangente der Durchdringungskurve zweier Flächen in einem ihrer Punkte ist die Schnittlinie der Tangentenebenen an die Flächen in diesem Punkte.*

Wird eine dieser Flächen als Ebene gewählt, so folgt

Satz 4: *Die Tangente der Schnittlinie einer Ebene mit einer krummen Fläche in einem ihrer Punkte ist die Schnittgerade der Ebene mit der Tangentialebene der Fläche in diesem Punkte.*

Dieser Satz gilt insbesondere auch für die Asymptoten der Schnittkurve.

Haben zwei Flächen Φ_1, Φ_2 in einem gemeinsamen Punkte p dieselbe Tangentialebene, so sagt man, sie *berühren* oder *tangieren* sich in p oder sie haben ein *Flächenelement* gemeinsam. *Jede Ebene durch p schneidet dann Φ_1 und Φ_2 in zwei Kurven, die sich in p berühren.* Berühren sich zwei Flächen in allen Punkten einer Kurve C, so sagt man, sie sind einander *längs dieser Kurve umschrieben oder eingeschrieben;* sie haben dann einen *Flächenstreifen* längs C gemeinsam. Insbesondere läßt sich einer jeden Fläche Φ_1 längs einer ge-

Hosted by Google

gebenen Kurve C eine *abwickelbare Fläche* umschreiben; sie wird von den Tangentenebenen an Φ_1 in den Punkten von C umhüllt. Eine Schar von ∞^1 stetig aufeinanderfolgenden Flächen bestimmt im allgemeinen eine neue, sie sämtlich *einhüllende* Fläche, die *Hüllfläche* der Schar, als Ort der Schnittlinien benachbarter Flächen. Diese Schnittlinien heißen die *Charakteristiken* der Hüllfläche.

Von zwei sich berührenden Flächen gilt der

Satz 5: *Berühren sich zwei Flächen Φ_1, Φ_2 in einem Punkte p, so ist er ein Doppelpunkt ihrer Schnittlinie.*

Denn jede Gerade durch p in der gemeinsamen Berührungsebene hat sowohl mit Φ_1 als Φ_2, mithin auch mit deren Schnittlinie zwei zusammenfallende Punkte gemeinsam.

Insbesondere schneidet, wie schon früher erwähnt, die Berührungsebene τ in p die Fläche in einer (reellen oder imaginären) Kurve mit einem Doppelpunkt in p. Die Tangenten an die beiden Kurvenzüge im Doppelpunkt haben (Nr. 58) mit der Kurve, also auch mit der Fläche drei benachbarte Punkte gemeinsam oder berühren die Fläche in zwei benachbarten Punkten. Sie heißen die *Haupttangenten*[1]) der Fläche im Punkte p. Jenachdem sie (Fig. 122 a, b, c) reell getrennt, konjugiert imaginär oder zusammenfallend sind, nennt man p einen *hyperbolischen*, *elliptischen* oder *parabolischen* Flächenpunkt. Auf den Grund dieser Benennung kommen wir später zurück (Nr. 117).

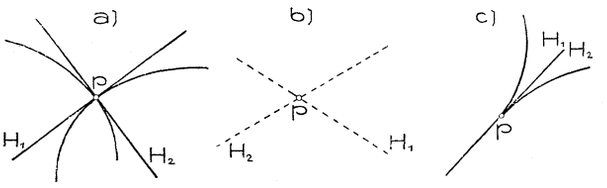


Fig. 122 a—c.

Existieren auf einer Fläche hyperbolische und elliptische Punkte, so erfüllen die parabolischen Punkte im allgemeinen eine die Gebiete der beiden andern Punktarten trennende Kurve.

Eine gerade Linie auf einer Fläche ist Haupttangente für jeden ihrer Punkte. *Es besitzt demzufolge eine windschiefe Fläche* (Sonderpunkte ausgenommen) *nur hyperbolische, eine abwickelbare Fläche nur parabolische Punkte.* Jede Tangentenebene der letzteren schneidet nämlich in zwei benachbarten oder, was dasselbe ist, zusammenfallenden Geraden.

In einem gewöhnlichen Knotenpunkte p einer Fläche gibt es ∞^1 Haupttangenten, die einen Kegel zweiter Ordnung bilden. Denn für jede

1) Sie wurden zuerst untersucht von *Ch. Dupin*, Développements de géométrie, Paris 1813, p. 51 f.

Hosted by Google

Ebene durch p gelangt man durch die obigen Betrachtungen zu zwei Haupttangenten. Fig. 123 zeigt die Form einer Fläche in einem Knotenpunkt. Für einen Punkt p der Doppelkurve einer Fläche zerfällt dieser Kegel in zwei (auch zusammenfallende) Ebenen.

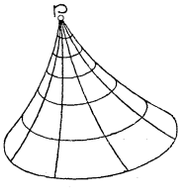


Fig. 123.

Die senkrecht zur Tangentenebene einer Fläche durch deren Berührungspunkt gelegte Gerade heißt die *Normale* der Fläche in diesem Punkte.

74. Krümmungslinien, Haupttangentenkurven und geodätische Linien krummer Flächen. Die Normalen in den Punkten einer beliebig auf einer Fläche gezogenen Kurve K bilden im allgemeinen eine windschiefe Fläche, die *Normalenfläche* längs K. Für den besonderen Fall, als die Normalenfläche längs K abwickelbar wird, heißt K eine *Krümmungslinie* der Fläche. Wir werden später sehen (Nr. 118), daß es auf jeder Fläche zwei einander senkrecht durchschneidende Scharen reeller Krümmungslinien gibt.

Schreitet man von einem Punkte p einer krummen Fläche Φ in der Richtung einer Haupttangente zu einem benachbarten Punkte p_1, von diesem in der Richtung jener Haupttangente von p_1, die von $[pp_1]$ unendlich wenig abweicht, zum benachbarten Punkte p_2 fort usw., so erhält man eine Kurve auf Φ, deren Tangenten Haupttangenten von Φ sind und die man deshalb eine *Haupttangentenkurve* (oder *Asymptotenkurve*[1]) der Fläche nennt. Auf Flächen mit hyperbolischen Punkten gibt es zwei Scharen reeller Haupttangentenkurven, die die Fläche netzartig überziehen (Fig. 124). In der Kurve parabolischer Punkte endigen die Haupttangentenkurven in Spitzen; durch einen Knotenpunkt gehen unendlich viele (Fig. 123). Da jede Haupttangente die Fläche in zwei aufeinanderfolgenden Punkten berührt, so enthält die Ebene $[pp_1p_2]$ z. B. die Tangenten $[p_1p]$ und $[p_1p_2]$ der Fläche im Punkte p_1, ist also die Berührungsebene von Φ in p_1. Da sie zugleich die Schmiegebene der Haupttangentenkurve in p_1 bildet, so besteht der

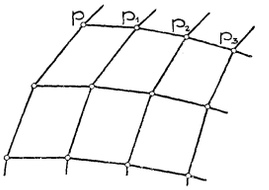


Fig. 124.

Satz 1: *Die Schmiegebenen der Haupttangentenkurven einer krummen Fläche berühren diese.*

Eine andere wichtige Art von Kurven auf krummen Flächen sind die *geodätischen Linien. Man versteht darunter solche Kurven auf einer vorgegebenen Fläche, deren Schmiegebenen zur Fläche senkrecht stehen, d. h. die Flächennormale enthalten.*

1) *Ch. Dupin*, a. a. O. p. 189.

Hosted by Google

Durch ein auf der Fläche Φ angenommenes Linienelement pp_1 geht eine einzige geodätische Linie der Fläche. Denn nach der Definition einer solchen Kurve ist die durch pp_1 und die Flächennormale in p_1 legbare Ebene ihre Schmiegebene in p_1; nimmt man also von der Schnittkurve dieser Ebene mit Φ das auf pp_1 folgende Linienelement p_1p_2, so gehört es auch der geodätischen Linie an. Auf dieselbe Weise bestimmt p_1p_2 das nächste Element der geodätischen Linie usw. *Durch jeden Punkt einer krummen Fläche gehen daher,* den ∞^1 Linienelementen des Punktes entsprechend, ∞^1 *geodätische Linien.*

Ein um eine starre Fläche gespannter Faden legt sich auf der Fläche längs einer geodätischen Linie. Denn soll sich der Faden im Gleichgewicht befinden, so muß die Resultierende der in zwei benachbarten Fadenelementen wirkenden Zugkräfte längs der Flächennormalen wirken. Da aber die Resultierende zweier Kräfte stets der Ebene der Komponenten, also hier der Schmiegebene des Fadens angehört, so steht diese Ebene überall zur Fläche normal.

Satz 2: *Für eine abwickelbare Fläche Φ sind die geodätischen Linien identisch mit den (in Nr. 72, Satz 2 erwähnten) kürzesten Verbindungslinien zweier Punkte auf der Fläche.*

Denn sind p_1, p_2, p_3 (Fig. 125) drei aufeinanderfolgende Punkte einer geodätischen Linie, E_1, E_2, E_3 die Erzeugenden durch diese Punkte, so steht $[p_1p_2p_3]$ zur Tangentialebene $[E_1E_2]$ des Punktes p_2 senkrecht. Betrachtet man nun p_2 als Spitze eines Drehkegels mit der Achse E_2 und der Erzeugenden $[p_2p_1]$, so steht die Tangentialebene dieses Kegels längs $[p_2p_1]$ bekanntlich zur Verbindungsebene $[E_2p_1]$ der Erzeugenden mit der Achse senkrecht, ist also mit $[p_1p_2p_3]$ identisch. Die Rückverlängerung des Halbstrahls $[p_2p_3]$ gehört dieser Tangentialebene an und ist dem Halbstrahl $[p_2p_1]$ benachbart, kann daher als die zu $[p_2p_1]$ gehörige Nachbarerzeugende des Drehkegels aufgefaßt werden oder, anders ausgedrückt, beide Halbstrahlen schließen mit E_2 den gleichen Winkel ein. Da (nach Nr. 72) diese Winkel beim Verebnen von Φ sich nicht ändern, so gelangen p_1, p_2, p_3 in eine gerade Linie, und da dies für je drei aufeinanderfolgende Punkte der geodätischen Linie gilt, so wird sie durch die Abwicklung in eine Gerade verwandelt. Umgekehrt erkennt man durch dieselbe Überlegung, daß jede Linie auf der abwickelbaren Fläche, die durch das Verebnen eine Gerade wird, die Eigenschaft besitzt, daß ihre Schmiegebenen zur Fläche senkrecht stehen. Damit ist aber obige Behauptung bewiesen.

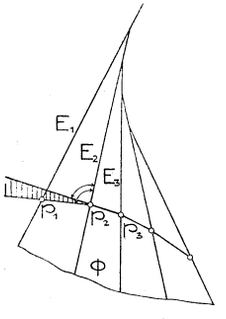


Fig. 125.

Hosted by Google

Mit Hilfe des Satzes 2 läßt sich nun auch zeigen, *daß für eine beliebige (nicht abwickelbare) Fläche* Ψ *eine geodätische Linie* G *die kürzeste Verbindung zwischen je zweien ihrer Punkte auf der Fläche ist.* Hierbei soll das „kürzeste" in dem Sinne verstanden werden, daß diese Verbindungslinie zweier Punkte p und q kürzer ist als jede andere in der Nachbarschaft von G auf Ψ verlaufende Verbindungslinie zwischen p und q. Denn umschreibt man der Fläche Ψ längs G die abwickelbare Fläche Φ, so verlaufen alle G benachbarten Kurven von Ψ auch auf Φ. Für Φ ist aber, wie eben gezeigt, G kürzeste Verbindungslinie zwischen je zweien ihrer Punkte, mithin gilt dasselbe auch für Ψ.

Auf einer Kugelfläche sind die geodätischen Linien die Hauptkreise.

Auf der von sämtlichen rektifizierenden Ebenen (Nr. 66) einer Raumkurve K umhüllten abwickelbaren Fläche ϱ (der *rektifizierenden Developpablen* von K) ist K eine geodätische Linie, da ja jede Schmiegebene von K zur rektifizierenden Ebene des Punktes senkrecht steht. Bei der Abwicklung von ϱ verwandelt sich demnach K in eine Gerade. Dies ist der Grund für die Benennung „rektifizierende" Ebene.

III. Kapitel.

Kurven zweiter Ordnung.

75. Normalriß eines Kreises. Der Normalriß einer Kurve zweiter Ordnung, die sich in keiner projizierenden Ebene befindet, ist nach Nr. 64, Satz 1 wieder eine Kurve zweiter Ordnung und zwar eine derselben Art, weil in einem Parallelriß nur die unendlichfernen Punkte der Kurvenebene sich als unendlichferne Punkte des Bildes darstellen. *Der Normalriß eines Kreises,* als Kurve zweiter Ordnung ohne reelle unendlichferne Punkte, *wird daher* wieder eine Kurve zweiter Ordnung dieser Art, d. h. *im allgemeinen eine Ellipse,* im besondern, nämlich wenn der Kreis zur Rißebene parallel ist, ein Kreis *sein.*

Aufgabe: *Man zeichne den Aufriß eines Kreises* K, *von dem der Mittelpunkt* m *und eine zweite Hauptlinie* H_2 *seiner Ebene durch Auf- und Grundriß sowie der Halbmesser* $\mathfrak{a}$ *gegeben sind (Fig. 126).*

Der Vorgang zur Ermittlung einzelner Punkte von K'' ist derselbe wie beim Zeichnen einer ebenen Figur von gegebener Gestalt (Nr. 50). Wir drehen den Kreis um eine zweite Hauptlinie, am besten um den zu H_2 parallelen Durchmesser ab, parallel zu Π_2. Der parallel gedrehte Kreis K_0 erscheint dann im Aufriß als der Kreis K_0'' über $a''b''$ ($[a''b''] = [m''\|H_2'']$, $\overline{m''a''} = \overline{m''b''} = \mathfrak{a}$). Das Zurückdrehen geschieht mit Hilfe des Seitenrisses auf die Ebene $[m|H_2]$, wobei man

Hosted by Google

der Einfachheit halber $m''' = m''$ annimmt. Fig. 126 zeigt die Ermittlung von H_2''' und, mittels des Seitenrisses $[m''' H_2''']$ der Kreisebene, die Rückdrehung der Endpunkte c_0, d_0 des zu $[ab]$ senkrechten Kreisdurchmessers sowie der beliebig gewählten Punkte p_0, q_0 und ihrer bezüglich $[cd]$ symmetrischen Punkte. Die Tangente T'' in p'' an K'' ist der Aufriß der Tangente T in p an K; legt man daher in p_0'' die Tangente T_0'' an K_0'', so schneidet sie T'' auf dem Aufriß $[a''b'']$ der Drehachse.

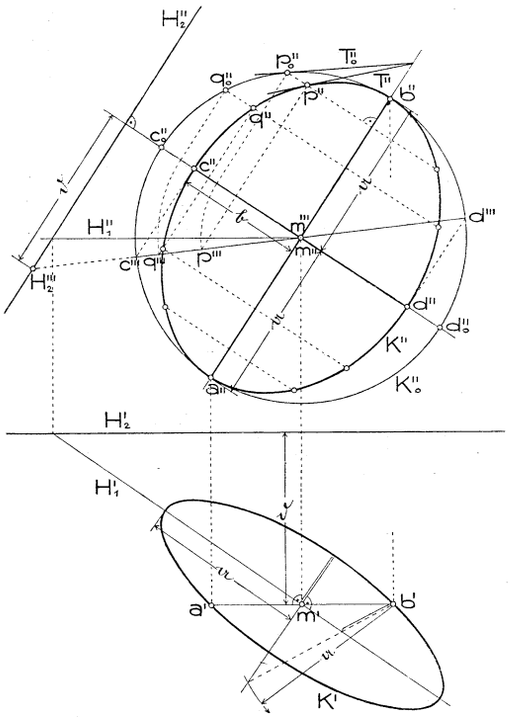


Fig. 126.

Der Grundriß des Kreises ließe sich punktweise aus dem Aufriß auf bekannte Weise (Nr. 21, 38) ableiten; vorteilhafter ist es, eine erste Hauptlinie der Kreisebene aufzusuchen und nun K auf analoge Weise wie vorhin parallel Π_1 zu drehen. (Bezüglich der in Fig. 126 im Grundriß ausgeführten Konstruktion vgl. die Bemerkung unter e).)

Aus obiger Konstruktion folgert man:

a) Der Normalriß eines Kreises ist eine Figur, die aus dem Kreise dadurch entsteht, daß man seine zu einem Durchmesser senkrechten Ordinaten in einem konstanten Verhältnis verkleinert. Bezeichnet man $\overline{m''c''}$ mit $\mathfrak{b}$, so ist dieses Verhältnis $\mathfrak{b} : \mathfrak{a}$.

b) Der Normalriß besitzt zwei zueinander senkrechte Symmetrieachsen, den festen und den dazu senkrechten Kreisdurchmesser ($[a''b'']$ und $[c''d'']$); mithin ist die Figur zentrisch-symmetrisch in bezug auf den Schnittpunkt m'' der beiden Achsen, den Mittelpunkt von K''. $\overline{a''m''} = \mathfrak{a}$ heißt ihre *große*, $\overline{c''m''} = \mathfrak{b}$ ihre *kleine Halbachse*. Durch die Halbachsen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist K'' völlig bestimmt.

c) Indem wir jetzt die Projektionsfigur an und für sich betrachten, lassen wir die Akzente weg, bezeichnen also die Kreisprojektion (Ellipse) mit K, die Achsen mit ab, cd usw. (vgl. Fig. 127).

Hosted by Google

Aus a) folgt, daß man aus einem Punkte p_0 des Kreises K_0 über ab den Punkt p von K dadurch erhalten kann, daß man über cd den Kreis K_1 zeichnet, den Schnittpunkt p_1 des Radius mp_0 mit K_1 aufsucht und aus p_0 und p_1 Lote $[p_0q_0]$ und $[p_1q_1]$ auf die große und kleine Achse fällt. Ihr Schnittpunkt ist, wegen

$$\overline{q_0p} : \overline{q_0p_0} = \overline{mp_1} : \overline{mp_0} = \mathfrak{b} : \mathfrak{a}^1),$$

der gesuchte Punkt p (*Konstruktion der Ellipse mittels der Kreise über den Achsen*).

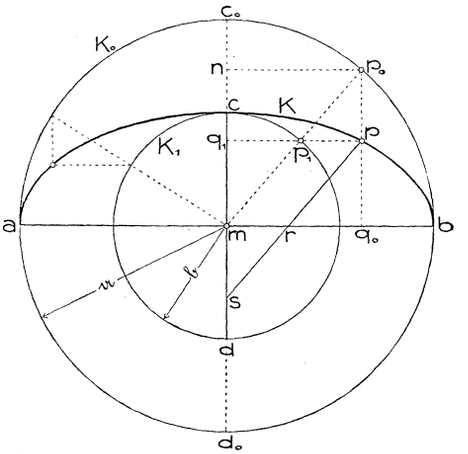


Fig. 127.

d) die Parallele zu $[mp_0]$ durch p (Fig. 127) schneidet die große und kleine Achse in den Punkten r und s derart, daß

$$\overline{sp} = \overline{mp_0} = \mathfrak{a}, \quad \overline{rp} = \overline{mp_1} = \mathfrak{b}$$

ist. Sind umgekehrt auf den Achsen zwei Punkte r und s derart gefunden, daß jener Punkt p auf $[rs]$, der von s die Entfernung $\mathfrak{a}$ besitzt, auch von r die Entfernung $\mathfrak{b}$ hat, so gehört p der Kurve K an. Denn zieht man $[m \parallel rs]$, so erhält man die Punkte p_0 und p_1 auf K_0 bzw. K_1, aus denen p durch die in c) angegebene Konstruktion hervorgeht.

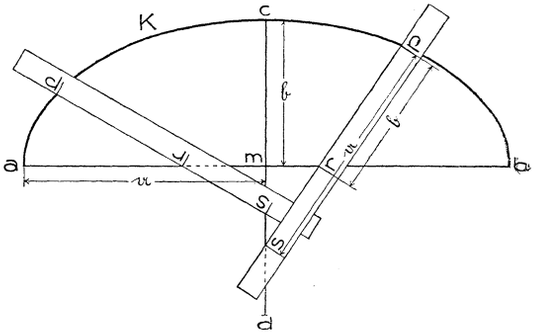


Fig. 128.

Daraus folgt die für den praktischen Zeichner empfehlenswerteste Konstruktion beliebig vieler Punkte von K aus deren Achsen (*Konstruktion der Ellipse mittels des Papierstreifens*). Man trägt (Fig. 128) auf einem Papierstreifen mit genau geradlinigem Rande von einem

1) Betrachtet man $[mb]$ und $[mc]$ als Abszissen- bzw. Ordinatenachse, setzt $\overline{mq_0} = x$, $\overline{q_0p} = \mathfrak{y}$, so ergibt sich für den Ort der Punkte p sofort die Gleichung

$$\mathfrak{y} = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} \sqrt{\mathfrak{a}^2 - x^2}.$$

Damit ist unabhängig von dem am Anfang dieser Nummer erwähnten Satz durch Rechnung bewiesen, daß der Normalriß eines Kreises eine Ellipse ist. Ein rein geometrischer Beweis folgt in Nr. 76.

Hosted by Google

Punkte p aus nach derselben Seite hin die halbe kleine Achse bis r und die halbe große Achse bis s auf. Legt man nun diesen Papierstreifen derart, daß r (der Endpunkt der halben kleinen Achse) der großen Achse und s (der Endpunkt der halben großen Achse) der kleinen Achse angehört, so bestimmt p einen Punkt von K. Durch Verschieben des Streifens lassen sich beliebig viele Punkte rasch und ohne Striche zu ziehen finden. Man wird daher bei der Darstellung eines Kreises in einem Normalriß (Fig. 126) die beiden Achsen des Bildes wie angegeben konstruieren und weitere Punkte vorteilhafter mittels des Papierstreifens ermitteln.

Diese Konstruktion läßt sich auch in folgender Form aussprechen:

Bewegt sich eine Gerade derart, daß zwei ihrer Punkte r und s auf zwei zueinander normalen Geraden gleiten, so beschreibt jeder Punkt p dieser Geraden eine Ellipse mit den Halbachsen $\overline{pr}$ und $\overline{ps}$[1]).

Auf diesem Satze beruhen viele Instrumente zum Zeichnen von Ellipsen, sogenannte *Ellipsographen* oder *Ellipsenzirkel.*[2])

e) Aus dem anfangs d) Gesagten ergibt sich ferner eine einfache *Konstruktion der Länge der zweiten Achse der Ellipse K aus einer Achse und einem Punkt.*[3]) Es sei z. B. (Fig. 129) die große Achse ab und Punkt p gegeben, $\mathfrak{b}$ gesucht. Schlägt man mit $\mathfrak{a} = \frac{1}{2}\overline{ab}$ um p einen Kreisbogen, der die Symmetrale von ab in dem mit p nicht auf derselben Seite von $[ab]$ liegenden Punkt s schneidet, und sucht $r = [sp \cdot ab]$, dann ist $\overline{rp} = \mathfrak{b}$.

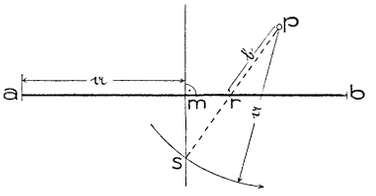


Fig. 129.

Diese Konstruktion kann man z. B. in Fig. 126 beim Zeichnen des Grundrisses K' des Kreises verwerten. Die große Achse von K' gehört dem Grundriß H_1' der ersten Hauptlinie der Kreisebene durch m an und hat die Länge $2\mathfrak{a}$, läßt sich also unmittelbar zeichnen. Außerdem findet man sofort die Grundrisse der Punkte a, b wegen

1) Der Satz gilt auch noch, wenn die Leitgeraden nicht normal sind (*Proclus*, 410–485 n. Chr.), ja es beschreibt auch jeder mit der beweglichen Geraden fest verbundene Punkt eine Ellipse (*F. van Schooten*, 1646). Die Gerade selbst umhüllt im obigen Fall eine *Astroide*: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$, wo $l = \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ ist. Diese Kurve umhüllt sämtliche von den Punkten der Geraden beschriebenen Ellipsen.

Ch. Dupin, J. Éc. Polyt., cah. 14 (1808), p. 45, gab eine analoge Erzeugungsweise des Ellipsoides an.

2) Literatur hierzu ist angegeben in der Encyklopädie d. math. Wissensch., Bd. III 2 (Art. III C 1), Kegelschnitte u. Kegelschnittsysteme (*F. Dingeldey*), Nr. 45.

3) Diese Konstruktion lehrt schon *S. Stevin* (1548—1620). Vgl. *M. Cantor*, Geschichte d. Mathematik, 2. Bd. (2. Aufl.), Leipzig 1900, S. 575.

Hosted by Google

$[a'b'] \parallel H_2'$. Daraus erhält man nach Fig. 129 die kleine Achse von K' und weitere Punkte mittels des Papierstreifens.

f) Fällt man in Fig. 127 aus p_0 das Lot np_0 auf $[cd]$, so besteht die Proportion

$$\overline{np_0} : \overline{q_1p_1} = \overline{mp_0} : \overline{mp_1} = \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$$

oder, wegen $\overline{np_0} = \overline{q_1p}$,

$$\overline{q_1p} : \overline{q_1p_1} = \mathfrak{a} : \mathfrak{b}.$$

Die Linie K entsteht demnach auch aus dem Kreise K_1 über der kleinen Achse, indem man dessen zur kleinen Achse senkrechten Ordinaten im Verhältnis $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ vergrößert.

Das Ergebnis von a) und f) läßt sich auch in der Form aussprechen, daß die Linie K perspektiv-affin ist mit jedem der Kreise über den beiden Achsen, wobei die betreffende Achse Affinitätsachse und die dazu senkrechte Richtung die der Affinitätsstrahlen ist.

76. Elementarer Beweis dafür, daß der Normalriß eines Kreises eine Ellipse ist. Unabhängig vom Satz 1 in Nr. 64 läßt sich, anknüpfend an einige der eben angegebenen Eigenschaften des Normalrisses K eines Kreises seine Ellipseneigenschaft ganz elementar und ohne Rechnung nachweisen. Hierbei werden sich zugleich einige später zur Verwendung gelangende Sätze ergeben.

Dreht man K (Fig. 127) um die kleine Achse cd aus der Zeichenebene heraus, so wird der Normalriß dieser Linie eine Figur sein, deren zu $[cd]$ senkrechten Ordinaten aus den entsprechenden Ordinaten von K durch Verkürzung in einem konstanten Verhältnis hervorgehen. Dreht man insbesondere soweit, daß der Normalriß von b auf K_1 fällt oder, was dasselbe ist, daß das Verkürzungsverhältnis $\mathfrak{b} : \mathfrak{a}$ wird, so muß der Normalriß K' von K sich mit K_1 decken. Denn K entstand aus K_1 durch Vergrößerung der Ordinaten im Verhältnis $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ (Nr. 75, f)), K' entsteht aus K durch Verkleinerung der neuen Ordinaten im Verhältnis $\mathfrak{b} : \mathfrak{a}$. *Die Kurve K ist demnach ein ebener Schnitt des projizierenden Zylinders über K_1, d. h. eines Drehzylinders.*

Für einen ebenen Schnitt eines Drehzylinders ist aber nach *G. P. Dandelin*[1]) die für die elementare Betrachtungsweise der Ellipse zur Definition dienende Eigenschaft leicht nachweisbar: *Die Summe der Entfernungen eines jeden Punktes der Kurve von zwei festen Punkten ihrer Ebene ist konstant.*

Wir denken uns zu diesem Zwecke dem Zylinder zwei Kugeln $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ eingeschrieben, die gleichzeitig die schneidende Ebene ε berühren (Fig. 130). Ihre Mittelpunkte seien o_1, o_2, ihre Berührungs-

1) Nouv. Mém. Ac. Belgique 2 (1822), p. 172 f. — Weitere Literatur, siehe Encyklopädie d. math. Wissensch., Art. III C 1 (*F. Dingeldey*), Nr. 5.

Hosted by Google

kreise mit dem Zylinder K_1, K_2 und ihre Berührungspunkte mit ε f_1 und f_2. Die durch einen beliebigen Punkt p von K gehende Zylindererzeugende berühre die Kugeln in t_1 und t_2. Unter Benutzung des Satzes, daß die aus einem Punkte an eine Kugel gelegten Tangentenstrecken gleiche Länge haben, folgt

$$\overline{pf_1} = \overline{pt_1},$$
$$\overline{pf_2} = \overline{pt_2},$$

daher

$$\overline{pf_1} + \overline{pf_2} = \overline{pt_1} + \overline{pt_2} = \overline{t_1t_2},$$

welche Strecke für alle Punkte von K dieselbe Länge hat.[1]) Für schneidende Ebenen senkrecht zur Zylinderachse und nur für solche fallen f_1 und f_2 zusammen, wird also der Schnitt ein Kreis. Damit ist also bewiesen, daß jeder (nicht zu den Erzeugenden parallele) ebene Schnitt eines Drehzylinders eine Ellipse (oder ein Kreis) und mithin auch, *daß jeder Normalriß eines Kreises eine Ellipse (oder ein Kreis) ist.*[2])

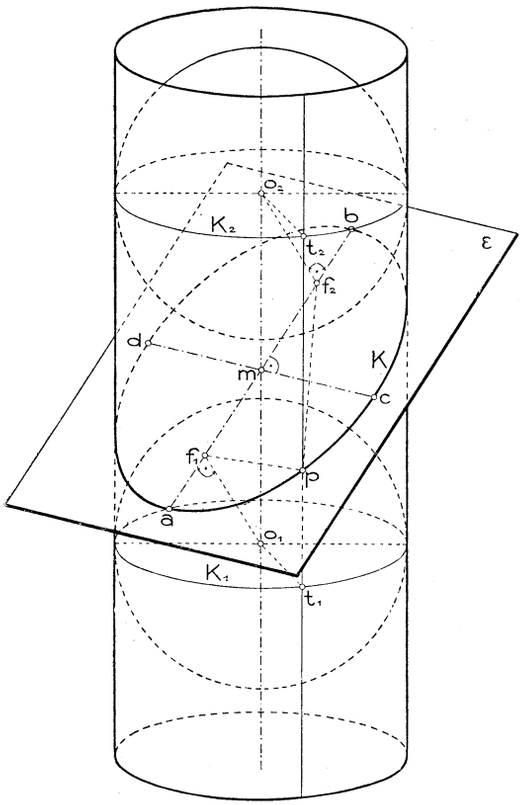


Fig. 130.

Die Punkte f_1, f_2 nennt man bekanntlich die *Brennpunkte* der Ellipse; sie liegen auf der großen Achse und haben, da sie von den Endpunkten der kleinen Achse den Abstand $\mathfrak{a}$ besitzen müssen $(\overline{cf_1} + \overline{cf_2} = 2\mathfrak{a})$, vom Mittelpunkt die Entfernung $\mathfrak{e} = \sqrt{\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2}$, die man die *lineare Exzentrizität* der Ellipse nennt.

Bei gegebenem Drehzylinder und gegebener Schnittebene ε findet

1) Denkt man sich insbesondere p mit den auf $[f_1f_2]$ liegenden Punkten a und b von K zusammenfallen, so folgert man leicht, daß $\overline{t_1t_2} = \overline{ab}$ und diese Strecke die große Achse der Ellipse ist (vgl. Nr. 91).

2) Die Grundgedanken für diesen Beweis finden sich beisammen in dem Lehrbuch von *O. Schlömilch*, Grundz. einer wissenschaftl. Darst. d. Geometrie des Maßes, 2. T., Eisenach 1854, S. 121—125. Vgl. ferner: *C. Pelz*, Z. f. Realschulw. 16 (Wien 1891), S. 590—594. Einen andern einfachen elementaren Beweis dieses Satzes, bei dem der *Dandelin*sche Satz nicht benutzt wird, gaben *C. Gusserow*, Z. math. naturw. Unterr. 19 (1888), S. 418—419, und *Th. Schmid*, Z. f. Realschulw. 17 (1892), S. 589—592.

Hosted by Google

man nach obigem die Brennpunkte, wenn man in der durch die Zylinderachse $\perp \varepsilon$ gelegten Ebene σ die Mittelpunkte jener Kreise sucht, die die beiden Zylindererzeugenden und die Gerade $[\varepsilon\sigma]$ berühren, und aus ihnen die Lote auf $[\varepsilon\sigma]$ fällt; die Fußpunkte sind f_1 und f_2.

Denkt man sich die beiden Kugeln $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ in dem Zylinder parallel verschoben, bis sie sich mit einer beliebigen Kugel $\varkappa$ vom Zentrum o decken, so gelangen die mitverschobenen Radien $o_1 f_1$ und $o_2 f_2$ in den zu ε senkrechten Durchmesser von $\varkappa$. Da dessen Endpunkte nun mit f_1 und f_2 auf Parallelen zu den Zylindererzeugenden liegen, so *erhält man die Brennpunkte einfacher, wenn man dem Zylinder eine beliebige Kugel einschreibt und die Endpunkte ihres zur Schnittebene senkrechten Durchmessers parallel zu den Zylindererzeugenden auf jene Ebene projiziert.* Für spätere Verwendung sprechen wir dieses Ergebnis in folgender Form aus:

Satz 1: *Umschreibt man einer Kugel einen Zylinder, so schneidet er irgend eine Ebene ε in einer Ellipse, deren Brennpunkte die Schrägrisse der Endpunkte des zu ε senkrechten Kugeldurchmessers für die zu den Zylindererzeugenden parallele Sehstrahlenrichtung sind.*

Nachdem bewiesen, daß der Normalriß eines Kreises eine Ellipse mit einer dem Kreisdurchmesser gleichen Hauptachse ist, *darf auch umgekehrt jede Ellipse als Normalriß eines über ihrer großen Achse beschriebenen Kreises aufgefaßt werden.* Denn wählt man den Neigungswinkel α der Kreisebene so, daß $\cos\alpha = \frac{b}{a}$ ist, so hat der Normalriß des Kreises mit der gegebenen Ellipse auch die kleine Achse gemeinsam. Demnach gelten die in Nr. 75 für eine Kreisprojektion gezeigten Konstruktionen für jede Ellipse.

Von der Auffassung einer Ellipse als Kreisprojektion ausgehend, lassen sich manche einfach beweisbare Konstruktionen für Punkte und Tangenten eines Kreises unmittelbar auf die Ellipse übertragen.

77. Krümmungskreise der Ellipse. Wir betrachten die gegebene Ellipse als den Aufriß eines Kreises K, demnach ihre große und kleine Achse als Aufrisse zweier normalen Kreisdurchmesser ab und cd, wovon $[ab] \parallel \Pi_2$ ist. Der Seitenriß von K auf eine zu $[ab]$ senkrechte Ebene Π_3 ist dann eine gerade Linie K''' (Fig. 131).

Denken wir uns in einem beliebigen Punkte p von K die Tangente T und die dazu senkrechte Ebene ν gelegt, so enthält diese den Kreismittelpunkt m und das in m auf der Kreisebene errichtete Lot M. Alle in ν durch p gezogenen Geraden stehen zu T senkrecht und schneiden M. Dies gilt insbesondere für die zweite, durch p gehende Hauptlinie N von ν, für die $N'' \perp T''$ und $N''' \parallel X_{23}$ (oder

Hosted by Google

$\perp [m''m'''])$ ist. Bezeichnet q den Schnittpunkt $[MN]$, so ist

$$q''' = [p''' \parallel X_{23} \cdot M''']$$

und q'' liegt in M'' auf der Ordnungslinie durch q'''; $N'' = [p''q'']$ ist dann die *Ellipsennormale* in p''.

Aus dieser Konstruktion der Ellipsennormalen lassen sich einige wichtige, die Konstruktion der Krümmungskreise betreffende Folgerungen ziehen. Wir wissen (Nr. 63), daß der Schnittpunkt zweier benachbarten Kurvennormalen der Krümmungsmittelpunkt des betreffenden Kurvenpunktes ist. Rückt nun p auf K in den benachbarten Punkt von c, so läßt sich, weil der Kreuzriß dieses Punktes c''' deckt, der Schnittpunkt c_1'' der Ellipsennormalen in dem c'' benachbarten Punkte mit der Ellipsennormalen M'' in c'' auf die frühere

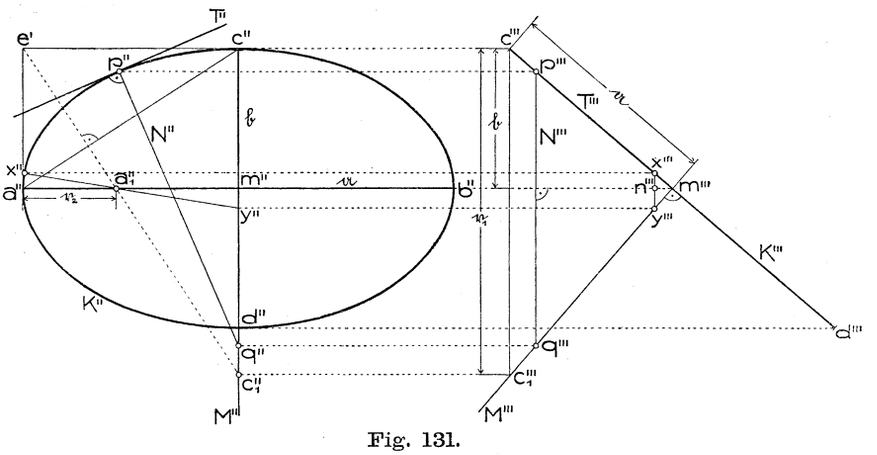


Fig. 131.

Art finden ($c_1''' = [c''' \parallel X_{23} \cdot M''']$, $c_1' = [c_1''' \; X_{23} \cdot M'']$). c_1'' ist also die Mitte des Krümmungskreises im Scheitel c'' der Ellipse (vgl. auch Nr. 86, Satz 4). Nennen wir den Halbmesser $\overline{c''c_1''}$ dieses Kreises r_1, so folgt aus dem bei m''' rechtwinkeligen Dreieck $c'''m'''c_1'''$:

$$a^2 = b r_1$$

oder

$$\boxed{r_1 = \frac{a^2}{b}}$$

Schreibt man diese Gleichung in Form einer Proportion

$$r_1 : a = a : b,$$

so sieht man, wenn e'' den Schnittpunkt der Ellipsentangenten in a'' und c'' bezeichnet, daß $c_1''c''e'' \sim c''e''a''$, also $[c_1''e''] \perp [a''c'']$ ist. *Darnach findet man c_1'' als Schnitt des aus e'' auf $[a''c'']$ gefällten Lotes mit der kleinen Achse der Ellipse.*

Hosted by Google

Rückt p auf K in den Nachbarpunkt x von a, so gehört x'' der zu M'' parallelen Ellipsentangente in a'' an. Sucht man wieder mit Hilfe des Kreuzrisses den Schnittpunkt y'' der Ellipsennormalen in x'' mit M'', so ist der Schnittpunkt a_1'' dieser Normalen mit $[a''b'']$ der Krümmungsmittelpunkt der Ellipse im Scheitel a''. Nun bestehen die Proportionen (vgl. Fig. 131):

$$\begin{aligned}\overline{a''a_1''} : \overline{m''a_1''} &= \overline{a''x''} : \overline{m''y''} \\ &= \overline{n'''x'''} : \overline{n'''y'''} \\ &= \mathfrak{b} : (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{b}) \\ &= \overline{a''e''} : \overline{m''c_1''}.\end{aligned}$$

Der Punkt a_1'' ergibt sich daher auch als Schnitt der früher gezogenen Geraden $[e''c_1'']$ mit der großen Achse.

Aus $a_1''a''e'' \sim e''c''c_1''$ folgt zugleich, wenn man $\overline{a''a_1''} = \mathfrak{r}_2$ setzt,

$$\mathfrak{r}_2 : \mathfrak{b} = \mathfrak{a} : \mathfrak{r}_1$$

mithin, wegen $\mathfrak{r}_1 = \frac{\mathfrak{a}^2}{\mathfrak{b}}$,

$$\boxed{\mathfrak{r}_2 = \frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}}}.$$

Das Hauptergebnis werde zusammengefaßt in den

Satz 1: *Die Mittelpunkte der Krümmungskreise in den Scheiteln einer Ellipse ergeben sich, wenn man aus dem Schnittpunkte der Tangenten in zwei (zu verschiedenen Achsen gehörigen) Achsenendpunkten auf die Verbindungslinie dieser Punkte das Lot fällt und seine Schnitte mit den Achsen aufsucht.*

Der Zeichner verwendet diese Punkte, um von einer punktweise konstruierten und mit Bleistift vorgezeichneten Ellipse Stücke um die Scheitel herum, für welche kleine Verstöße gegen die Symmetrie stark auffallen, mittels der Zirkelreißfeder auszuziehen, da solche Stücke ohne merklichen Fehler durch Bögen der Krümmungskreise ersetzbar sind. Wie weit eine solche Ersetzung stattfinden darf, ist nur durch Versuch bestimmbar, weshalb die Ellipse vorerst möglichst genau in Bleistift gezeichnet sein muß. Die übrig bleibenden Ellipsenstücke ziehe man mittels eines Kurvenlineals aus. Man kann aber auch nach Ermittlung des Krümmungsmittelpunktes in einem Zwischenpunkt (siehe unten) ein weiteres Stück mittels des Zirkels ausziehen.

Besitzt man einige Fertigkeit im Ellipsenzeichnen und handelt es sich bloß um ein angenähertes Zeichnen einer durch ihre Achsen gegebenen Ellipse, so kann man (ohne vorhergehende Konstruktion

Hosted by Google

einzelner Punkte) sofort Bögen der Scheitel-Krümmungskreise mittels des Zirkels (Fig. 132) dann die Verbindungsstücke berührend an je zwei dieser Bögen freihändig ziehen. Übrigens erweist es sich hierbei sowohl als beim Ausziehen einer Ellipse als vorteilhaft, statt der Krümmungskreise andere zu verwenden, deren Mittelpunkte auf den Achsen etwas näher gegen den Ellipsenmittelpunkt liegen.[1]) Es soll dies Fig. 132 zeigen, wo auf der linken Hälfte Teile der Krümmungskreise, auf der rechten Teile von Kreisen um die Punkte b_2, c_2, d_2 verwendet sind.

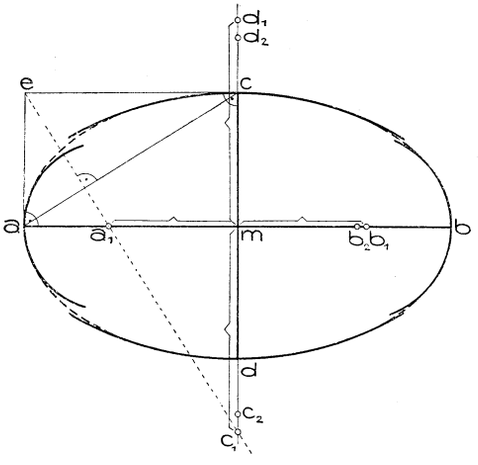


Fig. 132.

Durch ähnliche Überlegungen wie oben läßt sich auch eine Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes für einen beliebigen Ellipsenpunkt p'' ableiten (Fig. 133). Die Normale $[p''q'']$ in p'' wird von

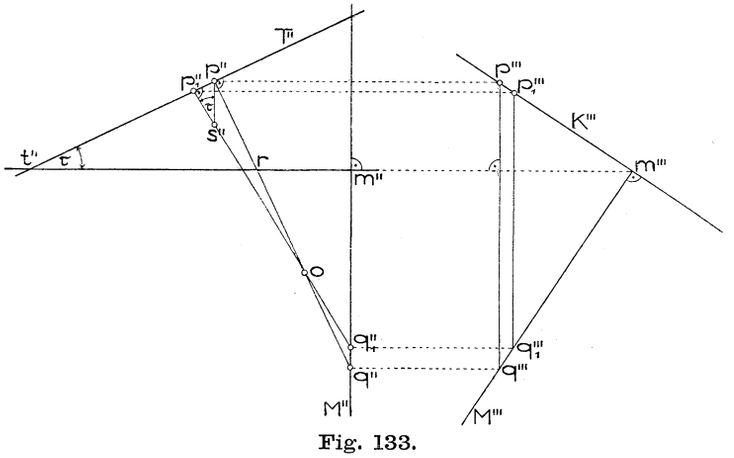


Fig. 133.

der auf dieselbe Weise konstruiert gedachten Normalen $[p_1''q_1'']$ des Nachbarpunktes p_1'' im Krümmungsmittelpunkt o geschnitten. Trifft $[p''\,M'']$ die Gerade $[p_1''q_1'']$ in s'', so besteht die Proportion

$$\overline{p''o} : \overline{q''o} = p''s'' : \overline{q''q_1''}.$$

1) Diese Bemerkung stammt aus den an der techn. Hochschule in Wien gehaltenen Vorlesungen meines verehrten Lehrers *R. Staudigl* (1838—1891).

Hosted by Google

Da ferner in dem Dreieck $p_1''p''s''$ der Winkel bei p_1'' unendlich wenig von einem rechten abweicht, also der Gegenwinkel von $p''p_1''$ gleich dem Neigungswinkel τ der Ellipsentangente $T'' = [p''p_1'']$ in p'' gegen die große Achse ist, so kann man

$$\overline{p''s''} = \frac{\overline{p''p_1''}}{\sin\tau}$$

setzen, wodurch die Proportion übergeht in

$$\overline{p''o} : \overline{q''o} = \frac{\overline{p''p_1''}}{\sin\tau} : \overline{q''q_1''}.$$

Es handelt sich nun darum, das Verhältnis $\overline{p''p_1''} : \overline{q''q_1''}$ unendlich kleiner Strecken durch ein Verhältnis endlicher Strecken zu ersetzen. Konstruiert man zu jedem Punkt p_i'' von T'' den zugehörigen Punkt q_i'' in M'' auf dieselbe Weise wie q'' aus p'' konstruiert wurde, so sieht man, daß $\overline{p''p_i''}$ und $\overline{q''q_i''}$ ein konstantes Verhältnis besitzen. Denkt man sich insbesondere p_i'' nach dem Schnittpunkt t'' von T'' mit der großen Achse verlegt, so fällt q_i'' mit m'' zusammen und das konstante Verhältnis ist $\overline{p''t''} : \overline{q''m''}$ oder, wegen $t''rp'' \sim q''rm''$ (vgl. Fig. 133), $\overline{p''r} : \overline{m''r}$. Setzt man dies in die letzte Proportion statt $\overline{p''p_1''} : \overline{q''q_1''}$ ein, so erhält man

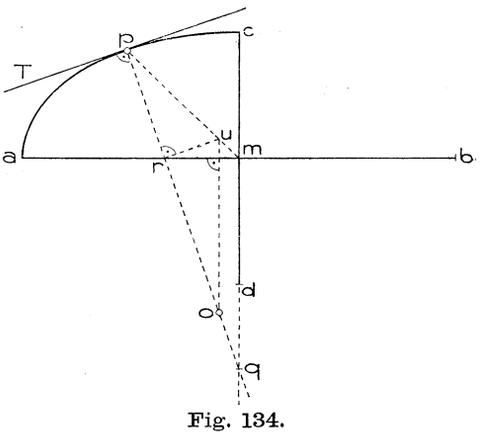


Fig. 134.

$$\overline{p''o} : \overline{q''o} = \frac{\overline{p''r}}{\sin\tau} : \overline{m''r} = \overline{t''r} : \overline{m''r}.$$

Die Teilung von $\overline{p''q''}$ durch den Punkt o im Verhältnis $\overline{t''r} : \overline{m''r}$, mithin die *Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes für einen beliebigen Punkt der Ellipse*, kann daher auf die in Fig. 134 angegebene Art geschehen.[1])

1) Diese Konstruktion wurde mitgeteilt von *K. H. Schellbach*, „Die Kegelschnitte, für den Gebrauch in Gymn. u. Realsch. bearbeitet", Berlin 1843, S. 83. — Wegen anderer Konstr. siehe Encyklopädie d. math. Wissensch., Art. III C 1 (*F. Dingeldey*), Nr. 36. — Eine allgemeine auf Kurvenkrümmung bezügliche darstellend-geometrische Methode behandelt *C. Heumann*, Arch. Math. Phys. (3) 6 (1904), S. 283–301.

Hosted by Google

78. Konjugierte Durchmesser einer Ellipse. Konstruktion der Achsen aus konjugierten Durchmessern. Normalenkonstruktion. Jede Gerade durch den Mittelpunkt einer Ellipse heißt ein *Durchmesser*; die Schnittpunkte mit der Ellipse nennt man seine *Endpunkte*. Faßt man die Ellipse als Normalriß eines Kreises auf (Nr. 76), so sind die Ellipsendurchmesser Normalrisse der Kreisdurchmesser. *Zwei Ellipsendurchmesser, die Normalrisse rechtwinkeliger Kreisdurchmesser sind, heißen zueinander konjugiert oder konjugierte Durchmesser. Zu jedem Durchmesser einer Ellipse gehört ein konjugierter Durchmesser.* Für einen Kreis sind konjugierte Durchmesser dasselbe wie normale Durchmesser.

Zwei normale Kreisdurchmesser besitzen die Eigenschaft, daß die zu dem einen parallelen Sehnen durch den andern halbiert werden und daß die Tangenten in den Endpunkten des einen Durchmessers zu dem andern parallel sind. Diese Eigenschaften werden durch Parallelprojektion nicht gestört, gelten mithin auch für konjugierte Durchmesser einer Ellipse. Wir haben daher den

Satz 1: *Zwei konjugierte Durchmesser einer Ellipse besitzen die Eigenschaft, daß die zu dem einen parallelen Sehnen durch den andern halbiert werden und daß die Tangenten in den Endpunkten des einen Durchmessers zu dem andern parallel sind.*

Es gelten davon aber auch die Umkehrungen:

Satz 2: *Haben zwei Durchmesser einer Ellipse die Eigenschaft, daß die zu dem einen parallelen Sehnen durch den andern halbiert werden oder daß die Tangenten in den Endpunkten des einen zum andern parallel laufen, so sind sie zueinander konjugiert,*

da in einem Kreise nur normale Durchmesser diese Eigenschaft haben.

Die Achsen einer Ellipse sind das einzige Paar konjugierter Durchmesser, das aufeinander senkrecht steht. Der Kreis besitzt unendlich viele Achsenpaare.

Wir wollen nun eine Konstruktion der Achsen einer Ellipse aus zwei konjugierten Durchmessern ableiten.

Sind von einer Ellipse K die Achsen ab und cd gegeben, so können wir den Kreis K_0 über der großen Achse ab als den in die Ellipsenebene gedrehten Kreis betrachten, von dem die Ellipse der Normalriß ist (Nr. 76). K und K_0 sind perspektiv-affin mit $[ab]$ als Affinitätsachse und den dazu senkrechten Geraden als Affinitätsstrahlen; den Punkten c, d entsprechen die Endpunkte des zu ab senkrechten Durchmessers $c_0 d_0$ von K_0. Sucht man zu den Endpunkten zweier normalen Halbmesser mp_0 und mq_0 von K_0, etwa mittels des Kreises K_1 über cd (Fig. 135), die entsprechenden Punkte p, q von K, so sind mp und mq konjugierte Halbmesser der Ellipse.

Hosted by Google

Dreht man nun die Figur mpp_0p_1 in der Zeichenebene um m, bis p_0 nach q_0 gelangt, also um 90^0, so erhält sie die Lage mrq_0q_1, und da alle Strecken der gedrehten Figur auf den entsprechenden Strecken der ursprünglichen Figur senkrecht stehen, ist $mr \perp mp$ und rq_0qq_1 ein Rechteck. Verlängert man die Diagonale $[qr]$ dieses Rechtecks bis zu den Schnittpunkten t und u mit den Achsen, so gelten, unter s die Mitte des Rechtecks verstanden, die Beziehungen:

$$\overline{sm} = \overline{st} = \overline{su},$$

$$\overline{qt} = \overline{ur} = \overline{mq_1} = \mathfrak{b},$$

$$\overline{qu} = \overline{tr} = \overline{mq_0} = \mathfrak{a}.$$

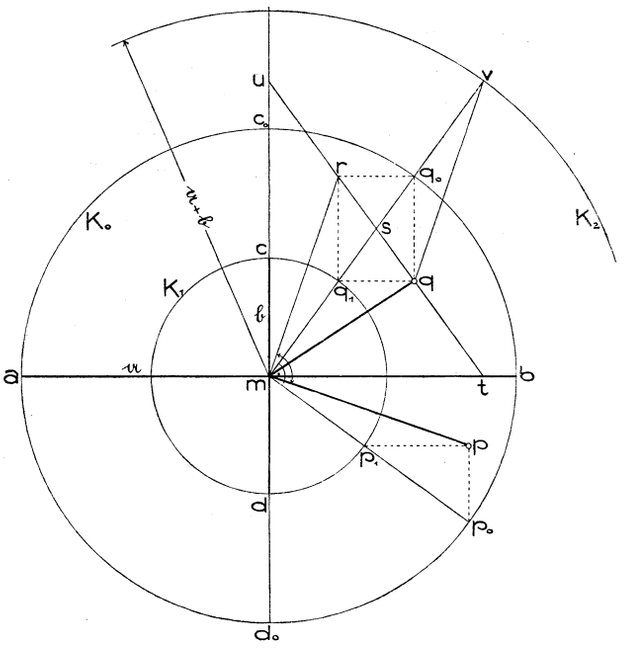


Fig. 135.

Mit ihrer Hilfe sind aus den konjugierten Halbmessern mp und mq die Achsen der Ellipse leicht erhältlich (*Rytz*'sche Konstruktion).[1])

Man macht (Fig. 136) $mr \perp mp$, zieht $[qr]$ und trägt darauf von der Mitte s der Strecke qr aus beiderseits die Strecke $\overline{sm}$ bis t und u ab. $[mu]$ und $[mt]$ geben dann die Richtungen der beiden Achsen an und zwar

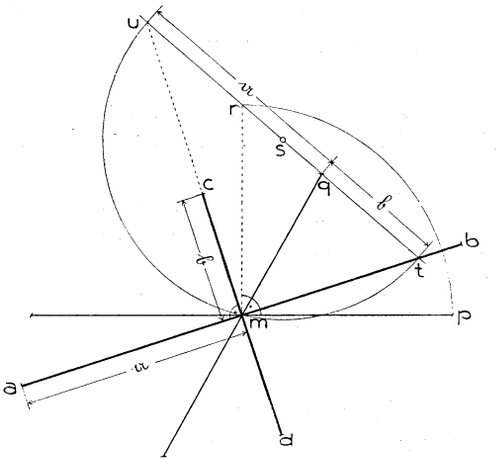


Fig. 136.

1) *L. Mossbrugger,* Größtenteils neue Aufgaben aus dem Gebiete der Géométrie descriptive, Zürich 1845, S. 125, Fußnote. — Zahlreiche andere Lösungen dieser Aufgabe enthält ein Aufsatz von *C. Pelz,* Progr. Staatsrealsch. in Teschen. 1876.

Hosted by Google

$[mt]$ die der großen Achse, da diese immer innerhalb der spitzen Winkel liegt, die die konjugierten Durchmesser bilden. Um die Achsenendpunkte zu erhalten, trägt man noch $\overline{qt}$ auf $[mu]$ und $\overline{qu}$ auf $[mt]$ von m aus beiderseits ab.

Zieht man in Fig. 135 durch q die Parallele zu $[mr]$, bis sie $[mq_0]$ in v trifft, dann ist $msr \cong vsq$, daher

$$\overline{sv} = \overline{ms} \quad \text{und} \quad \overline{q_0 v} = \overline{m q_1} = \mathfrak{b};$$

v liegt demnach auf dem mit dem Halbmesser $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ um m beschriebenen Kreis K_2. Zufolge des Parallelismus der Ellipsentangente in q und des Durchmessers $[mp]$ ist $[vq]$, als Parallele der zu $[mp]$ senkrechten Geraden $[mr]$, die *Ellipsennormale* in q. Diese Konstruktion[1]) verwendet man z. B., wenn es sich um das Zeichnen der Lagerfugen eines aus Stein herzustellenden elliptischen Bogens handelt (Fig. 137), da diese Fugen auf der Wölblinie senkrecht stehen müssen.

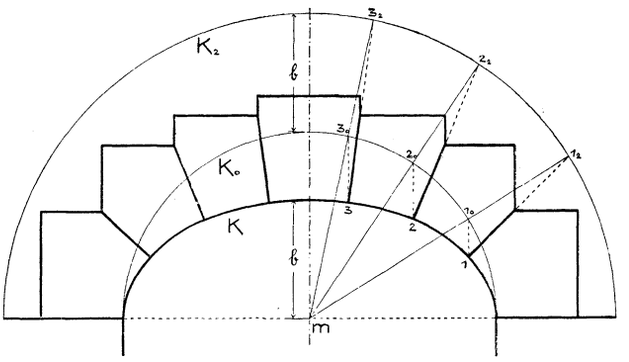


Fig. 137.

79. Schatten des Kreises und der Ellipse auf eine Ebene (für Parallelbeleuchtung). Aus Satz 1 in Nr. 64 und der beigefügten Bemerkung folgt

Satz 1: *Der Schatten einer Ellipse oder eines Kreises auf eine Ebene ist im allgemeinen eine Ellipse (in besonderen Fällen ein Kreis),*

da der Schatten eine Kurve zweiter Ordnung ohne reelle unendlichferne Punkte sein muß.

Die Schatten konjugierter Durchmesser der Ellipse (oder des Kreises) K sind (nach Nr. 78) konjugierte Durchmesser der Schattenellipse K_s. Man wird daher zur Konstruktion von K_s die Schatten zweier konjugierten Durchmesser von K (bei einem Kreise also zweier normalen Durchmesser) aufsuchen, daraus (nach Fig. 136) die Achsen und dann mittels eines Papierstreifens (Fig. 128) weitere Punkte von K_s ermitteln.

1) Sie findet sich z. B. bei *L. Paillotte,* Nouv. Ann. (2) 8 (1869), p. 269.

Hosted by Google

Auf dieselbe Weise zeichnet man einen *Normalriß einer Ellipse.*

Daß es bei gegebener Lichtrichtung L zu jeder Ellipse K Ebenen gibt, auf die der Schatten von K ein Kreis wird, läßt sich auf folgende Weise erkennen. Legt man durch den Mittelpunkt m und die Endpunkte a und b zweier konjugierten Halbmesser von K die Lichtstrahlen, so bestimmen sie ein dreiseitiges Prisma. Nach Nr. 52 gibt es zwei zur Normalebene von L symmetrische Stellungen von Ebenen, die dieses Prisma nach gleichschenkeligen (in $[m\,|\,L]$) rechtwinkeligen Dreiecken schneiden. Sei $m_s a_s b_s$ ein solches Dreieck, so ist der Schatten K_s von K auf diese Ebene eine Ellipse mit den gleichlangen und zueinander senkrechten konjugierten Halbmessern $m_s a_s$ und $m_s b_s$, d. h. ein Kreis. Anders ausgedrückt:

Satz 2: *Jeder Zylinder mit elliptischer Leitlinie läßt sich auf zwei Arten nach Kreisen schneiden. Die Stellungen der Kreisschnittebenen schließen mit der Stellung der Normalschnitte entgegengesetzt gleiche Winkel ein.*

Jeder elliptische Zylinder ist demnach auch ein schiefer Kreiszylinder.

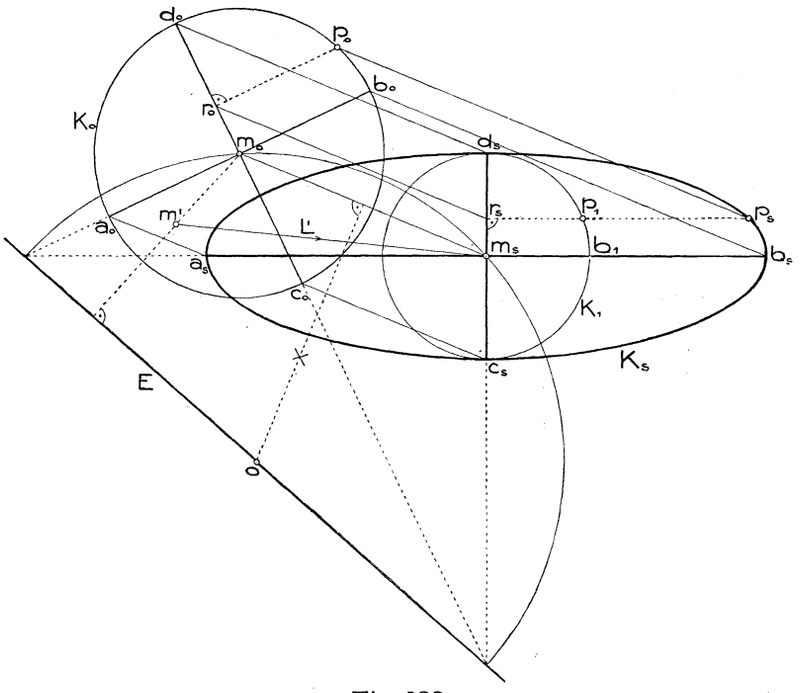


Fig. 138.

Von dem Schatten eines Kreises erhält man übrigens die Achsen leicht unmittelbar. *Es sei z. B. der Schatten eines Kreises K auf die*

Hosted by Google

Horizontalebene Π_1 zu ermitteln, wenn (Fig. 138) K durch die Spur $E = [\varepsilon \Pi_1]$ seiner Ebene ε, den Grundriß m' seines Mittelpunktes und durch seine Umklappung K_0 in Π_1 gegeben, ferner die Lichtrichtung L durch den Schatten m_s von m auf Π_1 bestimmt ist. K_0 und K_s sind perspektiv-affine Figuren mit E als Affinitätsachse und $[m_0 m_s]$ als Richtung der Affinitätsstrahlen (Nr. 38, S. 76). Es gibt daher (Nr. 39) ein Paar rechtwinkeliger und auf bekannte Weise konstruierbarer Geraden durch m_0, denen rechtwinkelige Gerade durch m_s entsprechen. Schneiden erstere K_0 in a_0, b_0 und c_0, d_0 und sucht man im affinen System die entsprechenden Punkte a_s, b_s und c_s, d_s, so sind diese die Scheitel der Ellipse K_s.

Mittels dieser Figur läßt sich auch unabhängig von Nr. 64, Satz 1 beweisen, *daß der Schatten eines Kreises eine Ellipse ist.* Sucht man nämlich von einer zu $[c_0 d_0]$ senkrechten Ordinate $r_0 p_0$ von K_0 den Schatten $r_s p_s$, so ist er $\| [a_s b_s]$ oder $\perp [c_s d_s]$ und das Verhältnis $\overline{r_s p_s} : \overline{r_0 p_0}$ ist von der Lage des Punktes p_0 unabhängig, mithin $= \overline{m_s b_s} : \overline{m_0 b_0}$. Nun betrachten wir den Kreis K_1 über $c_s d_s$ als den im Verhältnis $\overline{m_s c_s} : \overline{m_0 c_0}$ verkleinerten Kreis K_0; dann ist, unter b_1 den b_0 entsprechenden Punkt auf K_1 verstanden,

$$\overline{r_0 p_0} : \overline{r_s p_1} = \overline{m_0 b_0} : \overline{m_s b_1}$$

ebenfalls von der Lage des Punktes p_0 auf K_0 unabhängig. Aus

$$\frac{\overline{r_s p_s}}{\overline{r_0 p_0}} = \frac{\overline{m_s b_s}}{\overline{m_0 b_0}} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{r_0 p_0}}{\overline{r_s p_1}} = \frac{\overline{m_0 b_0}}{\overline{m_s b_1}}$$

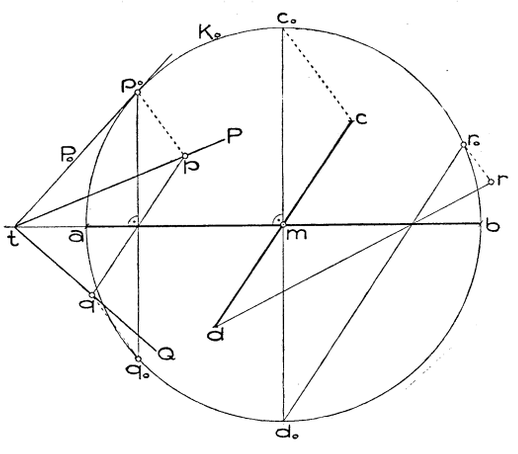


Fig. 139.

folgt aber durch Multiplikation

$$\frac{\overline{r_s p_s}}{\overline{r_s p_1}} = \frac{\overline{m_s b_s}}{\overline{m_s b_1}},$$

d. h. K_s entsteht aus K_1 durch Vergrößerung der zu $[c_s d_s]$ senkrechten Ordinaten in einem konstanten Verhältnis, ist also (Nr. 75 und 76) eine Ellipse.

Eine Ellipse kann immer als der Schatten jedes über einem Durchmesser beschriebenen Kreises betrachtet werden. Denn sind ab und cd (vgl. etwa Fig. 139) konjugierte Durchmesser einer Ellipse und betrachtet man den Kreis über ab in obigem Sinne als Umlegung K_0 eines Kreises K, $[ab]$ als

Hosted by Google

E und c als Schatten eines Endpunktes des zu $[ab]$ senkrechten Durchmessers von K, so ist K_s eine Ellipse mit den konjugierten Durchmessern ab und cd, also mit der gegebenen identisch. Diese Tatsache, in andrer Form ausgesprochen, gibt den

Satz 3: *Jeder über einem Ellipsendurchmesser beschriebene Kreis ist zur Ellipse perspektiv-affin; der Durchmesser ist Affinitätsachse, die Verbindungslinie der Endpunkte der dazu im Kreise und in der Ellipse konjugierten Durchmesser bestimmt die Richtung der Affinitätsstrahlen.*

Die schon in Nr. 75 erwähnten Affinitäten zwischen der Ellipse und den Kreisen über den Achsen bilden Sonderfälle dieses Satzes.

80. Lösung von Aufgaben über die Ellipse mittels eines affinen Kreises. Satz 3 in Nr. 79 ermöglicht es, Aufgaben über Lagenbeziehungen für eine durch zwei konjugierte Durchmesser (insbesondere die Achsen) gegebene Ellipse dadurch zu lösen, daß man diese Aufgaben mittels Affinität auf die entsprechenden Kreisaufgaben zurückführt.

Aufgabe 1: *Es sind Punkte und Tangenten der durch die konjugierten Durchmesser ab und cd gegebenen Ellipse zu konstruieren.* Zeichnet man (Fig. 139) den Kreis K_0 über ab und in ihm den zu ab senkrechten Durchmesser c_0d_0, so gibt $[c_0c]$ die Richtung der Affinitätsstrahlen für die zwischen K_0 und der Ellipse K bestehende Affinität an. Wählt man nun in K_0 irgend eine Sehne $[p_0q_0] \parallel [c_0d_0]$, dann entspricht ihr in K eine zu $[cd]$ parallele Sehne, die sich mit jener auf der Affinitätsachse $[ab]$ schneidet. Sie wird von den Affinitätsstrahlen durch p_0, q_0 in den K angehörigen Punkten p, q getroffen. Legt man ferner in p_0 die Tangente P_0 an K_0, so ist die entsprechende Gerade $P = [P_0 \cdot ab \cdot p]$ die Tangente an K in p. Auf diese Weise lassen sich beliebig viele Punkte der Ellipse samt ihren Tangenten finden.

Weichen die Affinitätsstrahlen von der Richtung $[cd]$ wenig ab, dann findet man zu einem Punkte r_0 von K_0 den entsprechenden Punkt r von K genauer, indem man z. B. die Gerade $[r_0d_0 \cdot ab \cdot d]$ mit dem Affinitätsstrahl durch r_0 zum Schnitt bringt. Insbesondere wird man eine solche Konstruktion anwenden müssen, wenn $[cd] \perp [ab]$, d. h. die Ellipse durch ihre Achsen gegeben ist.

Aufgabe 2: *Es sind die Schnittpunkte einer Geraden G mit der durch die konjugierten Durchmesser ab und cd gegebenen Ellipse zu suchen* (Fig. 140). Zu G, als dem System der Ellipse K angehörig, suche man im System des Kreises K_0 die entsprechende Gerade G_0 (z. B. indem man $e = [c \parallel G \cdot ab]$ aufsucht und $[G \cdot ab \cdot \parallel [ec_0]]$ zieht). Wird K_0 von G_0 in den Punkten p_0, q_0 geschnitten, so sind deren

Hosted by Google

entsprechende Punkte p, q im System von K die Schnittpunkte von G mit K.

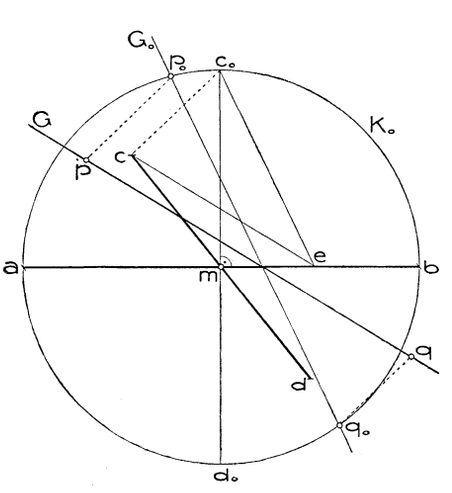


Fig. 140.

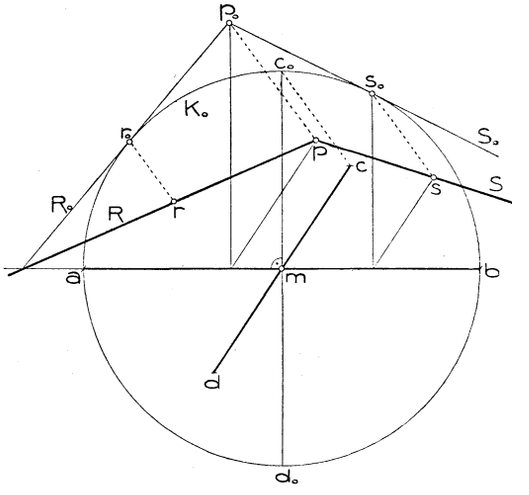


Fig. 141.

Aufgabe 3: *Aus einem Punkte p sind an die durch die konjugierten Durchmesser ab und cd gegebene Ellipse die Tangenten zu legen* (Fig. 141). Zu p, als dem System von K angehörig, suche man im System von K_0 den entsprechenden Punkt p_0, lege aus ihm an K_0 die Tangenten R_0, S_0 und ermittle deren entsprechende Gerade R, S im System von K. Den Berührungspunkten r_0, s_0 von R_0 und S_0 mit K_0 entsprechen auf R und S die Berührungspunkte r, s mit K.

Analog wäre die Aufgabe zu lösen, wenn p unendlichfern läge, also die Tangenten parallel zu einer Geraden gelegt werden sollten.

Aufgabe 4: *In der durch die konjugierten Durchmesser ab und cd gegebenen Ellipse ist der zur Richtung der Geraden G konjugierte Durchmesser zu suchen* (Fig. 142). Indem wir $[ce] \parallel G$ ziehen, erhalten wir in $[ec_0]$ die Richtung der G im System von K_0 entsprechenden Geraden G_0. Da konjugierten Durchmessern von K normale Durchmesser von K_0 entsprechen, so muß dem zu $[ec_0]$ senkrechten Durchmesser f_0g_0 von K_0 im System von K der zur Richtung von G konjugierte Ellipsendurchmesser fg zugeordnet sein.

Handelt es sich bloß um die Auffindung der zur Durchmesserrichtung D_1 konjugierten Richtung D_2 (nicht um die Endpunkte dieses Durchmessers), so kann diese einfacher unter Benutzung des Satzes erhalten werden, daß die Höhen eines Dreiecks sich in einem Punkt schneiden. Da mbc (Fig. 143) als Schrägriß (oder affine Figur) eines gleichschenkeligen und bei m rechtwinkeligen Dreiecks mbc_0 betrachtet

Hosted by Google

werden kann, so ist die Verbindungslinie der Mitte e von bc mit m das Bild der zu $[bc_0]$ senkrechten Geraden $[me_0]$. Betrachten wir ferner $mbf(f = [D_1 \cdot bc])$ als Schrägriß des Dreiecks mbf_0, so sind die Geraden $[me]$ und $[f \| cd]$ die Bilder zweier Höhen

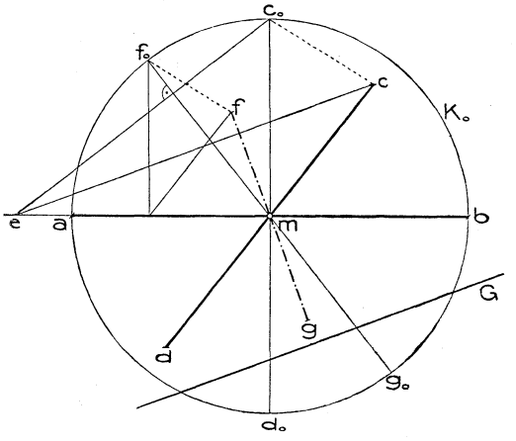


Fig. 142.

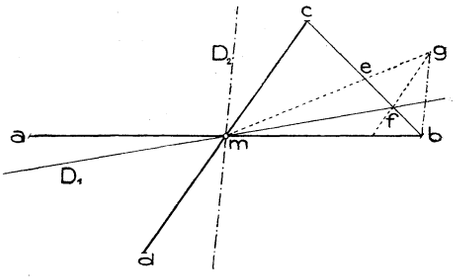


Fig. 143.

des Dreiecks mbf_0, $g = [f \| cd \cdot me]$ ist daher das Bild des Höhenschnittpunktes. $[gb]$, als Bild der dritten Höhe dieses Dreiecks, also einer zu $[mf_0]$ senkrechten Geraden, gibt mithin die Richtung des zu D_1 konjugierten Durchmessers D_2 an.

Es sei noch erwähnt, daß in den vorhergehenden oder ähnlichen Aufgaben die Ellipse auch durch einen Durchmesser ab und eine dazu konjugierte (d. h. zum konjugierten Durchmesser parallele) Sehne pq gegeben sein könnte. Denn, wie aus Fig. 139 ersichtlich, ist dann die Richtung der Affinitätsstrahlen durch $[p_0p]$ bestimmt, mithin der etwa erforderliche konjugierte Durchmesser cd unmittelbar zu finden.

Um auch eine Anwendung der perspektiven Affinität zwischen Ellipse und Kreis für eine nicht durch den Mittelpunkt gehende Affinitätsachse zu zeigen, soll mit ihrer Hilfe die (schon in Nr. 78, Fig. 136 behandelte)

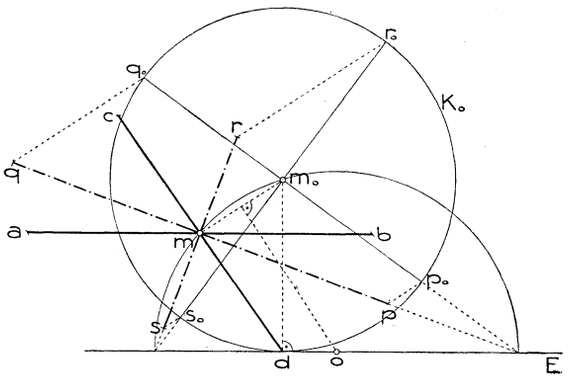


Fig. 144.

Aufgabe 5: *Die Achsen der durch die konjugierten Durchmesser ab und cd gegebenen Ellipse zu ermitteln,* gelöst werden. Wir wählen (Fig. 144) die zu $[ab]$ parallele Ellipsen-

Hosted by Google

tangente in d als Affinitätsachse E und zeichnen mit dem Halbmesser $\overline{mb}$ den E in d berührenden Kreis K_0 mit der Mitte m_0. Betrachtet man m_0 und m als affin entsprechende Punkte, so entspricht dem Kreise K_0 als affine Figur die gegebene Ellipse K (vgl. Nr. 79). Durch Konstruktion der entsprechenden rechten Winkel in den Punkten m_0 und m erhält man wie in Fig. 138 die Achsen von K.

81. Die Kurven zweiter Ordnung als ebene Schnitte von Drehkegeln. Um einige allgemeine Eigenschaften der Kurven zweiter Ordnung sowie besondere Eigenschaften der Hyperbel und Parabel abzuleiten, soll vorerst gezeigt werden, daß jede solche Kurve als ebener Schnitt eines Drehkegels aufgefaßt werden darf.

Nach Nr. 72 und Satz 3 in Nr. 71 ist jeder ebene Schnitt eines Drehkegels eine Kurve zweiter Ordnung. Ein unendlichferner Punkt tritt in der Schnittkurve eines (beliebigen) Kegels mit einer Ebene ε dann und nur dann auf, wenn eine Kegelerzeugende zu ε parallel ist, d. h. der durch die Kegelspitze $\parallel \varepsilon$ gelegten Ebene angehört. Da diese Parallelebene mit dem Drehkegel zwei konjugiert imaginäre, zwei reelle getrennte oder zwei zusammenfallende Erzeugende gemeinsam hat, so wird dementsprechend die Schnittkurve in ε zwei konjugiert imaginäre, zwei reelle getrennte oder zwei zusammenfallende unendlichferne Punkte besitzen oder

Satz 1: *Eine Ebene schneidet einen Drehkegel*[1]) *nach einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel, jenachdem die Parallelebene durch die Spitze den Kegel nicht (in reellen Erzeugenden) schneidet, schneidet oder berührt.*

Wir wollen diesen Satz jedoch auch auf elementarem Wege, unabhängig von dem allgemeinen Satz 1 in Nr. 57 beweisen, weil daraus zugleich Eigenschaften der Kegelschnitte folgen, die wir späterhin brauchen werden. Der Beweis ist dem für den ebenen Schnitt eines Drehzylinders (Nr. 76) völlig analog und umfaßt ihn.

Die durch die Achse des Drehkegels normal zur Schnittebene ε gelegte Ebene σ ist Symmetrieebene für den Kegel und für die Ebene ε, mithin auch für die Schnittkurve K; die Schnitterzeugenden von σ mit dem Kegel mögen A und B heißen. Wählen wir die Aufrißebene parallel zu σ (die Grundrißebene senkrecht zur Kegelachse), so wird K sich im Aufriß als gerade Linie K'' darstellen (Fig. 145—147). Die Aufrisse sämtlicher reellen Kegelerzeugenden überdecken doppelt zwei der von A'', B'' begrenzten Scheitelwinkel, die zusammen mit $\widehat{A''B''}$ bezeichnet werden sollen. Jenachdem nun die zu ε parallele Ebene durch die Spitze s mit dem Kegel a) keine

1) Oder auch, wie aus den vorhergehenden Bemerkungen folgt, einen allgemeinen *Kegel zweiter Ordnung.*

Hosted by Google

reelle, b) zwei reelle getrennte, c) zwei zusammenfallende Erzeugende gemeinsam hat, sich also im Aufriß als Gerade durch s'' außerhalb $\widehat{A''B''}$, innerhalb $\widehat{A''B''}$ oder als eine der Geraden A'', B'' darstellt, überdecken die Aufrisse der reellen Punkte von K doppelt:

a) eine innerhalb $\widehat{A''B''}$ liegende und von $A''B''$ begrenzte Strecke $a''b''$ der Geraden K'' (Fig. 145),

b) die Gerade K'' außerhalb der von A'' und B'' begrenzten Strecke $a''b''$ (Fig. 146),

c) einen zu A'' oder B'' parallelen und von B'' bzw. A'' begrenzten Halbstrahl (Fig. 147).

In jedem der drei Fälle schreiben wir nach *Dandelin*[1]) dem Kegel jene Kugeln ein, die gleichzeitig ε berühren, σ also in Kreisen schneiden, die A, B und $[\sigma\varepsilon]$ berühren. In den Fällen a) und b) sind zwei Kugeln $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ möglich; ihre Mitten mögen o_1, o_2, ihre Berührungskreise mit dem Kegel K_1, K_2 und ihre Berührungspunkte mit ε f_1, f_2 heißen. Man sieht dann sofort, daß im Fall a) o_1 und o_2 zu verschiedenen Seiten von ε und f_1, f_2 innerhalb der Strecke ab, im Fall b) o_1 und o_2 auf derselben Seite von ε und f_1, f_2 außerhalb der Strecke ab liegen. Im Fall c) gibt es nur eine eingeschriebene Kugel $\varkappa_1$ mit der Mitte o_1, die ε in einem auf dem oben erwähnten Halbstrahl liegenden Punkt f_1 berührt. (Der Mittelpunkt der zweiten Kugel also auch der Punkt f_2 liegen unendlichfern.)

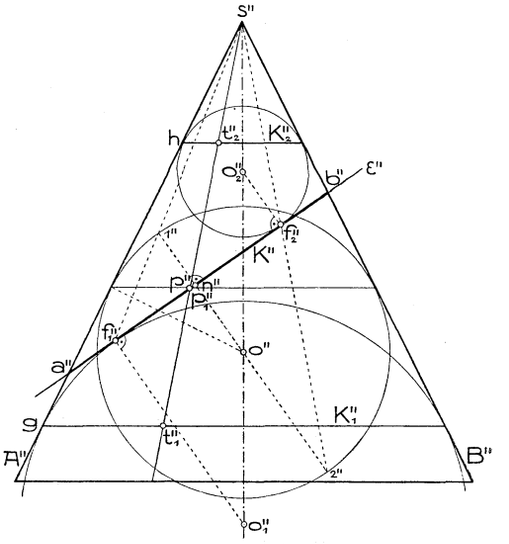


Fig. 145.

Fall a) (Fig. 145). Die durch den Punkt p von K gehende Kegelerzeugende berühre $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ in den auf K_1 und K_2 liegenden Punkten t_1 und t_2. Wegen

$$\overline{pf_1} = \overline{pt_1}, \quad \overline{pf_2} = \overline{pt_2},$$

also

$$\overline{pf_1} + \overline{pf_2} = \overline{pt_1} + \overline{pt_2} = \overline{t_1t_2} = \overline{gh} = \overline{ab},$$[2])

1) Vgl. Fußnote S. 153.

2) Läßt man nämlich p einmal mit a, das andre Mal mit b zusammenfallen, so folgt: $\overline{gh} = \overline{af_1} + \overline{af_2} = \overline{bf_1} + \overline{bf_2}$. Addiert man in der letzten Gleichung die Strecke $\overline{f_1f_2}$ links zu $\overline{af_1}$, rechts zu $\overline{bf_2}$, so ergibt sich $2\overline{af_2} = 2\overline{bf_1}$ oder $\overline{af_2} = \overline{bf_1}$, mithin $\overline{gh} = \overline{af_1} + \overline{bf_1} = \overline{ab}$.

Hosted by Google

ist K eine *Ellipse* mit den Brennpunkten f_1, f_2 und der großen Achse ab.

Fall b) (Fig. 146). Wegen

$$\overline{pf_1} = \overline{pt_1}, \quad \overline{pf_2} = \overline{pt_2},$$

also

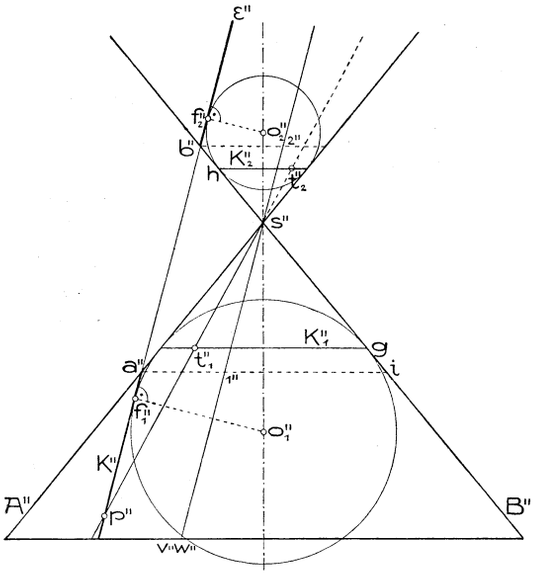


Fig. 146.

$$\overline{pf_2} - \overline{pf_1} = \overline{pt_2} - \overline{pt_1} = \overline{t_1t_2} = \overline{gh} = \overline{ab}$$

ist K eine *Hyperbel* mit den Brennpunkten f_1, f_2 und der reellen Achse[1]) ab.

Die zu ε parallelen Erzeugenden $[sv]$, $[sw]$ geben zugleich die Richtungen der Asymptoten an, ihr Neigungswinkel α gegen $\Pi_2 = \sigma$ ist also gleich dem Winkel der Asymptoten mit der reellen Achse. Betrachten wir auf $[sv]$ das zwischen den Kreisen durch a und b befindliche Stück $\overline{1\,2}$, so ist $\cos\alpha = \frac{\overline{1''\,2''}}{\overline{1\,2}}$ (Nr. 40). Wegen (vgl. Fig. 146)

$$\overline{1\,2} = \overline{bi} = \overline{hg} + \overline{bh} + \overline{gi} = \overline{ab} + \overline{bf_2} + \overline{af_1} = \overline{f_1f_2}$$

und

$$\overline{1''\,2''} = \overline{ab}$$

kann dafür, wenn man noch $\overline{ab} = 2\mathfrak{a}$ und $\overline{f_1f_2} = 2\mathfrak{e}$ ($\mathfrak{e}$ = *lineare Exzentrizität*) setzt, geschrieben werden

$$\cos\alpha = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{e}}.$$

Nehmen wir die später (Nr. 86) zu erweisende Tatsache vorweg, daß die Asymptoten einer Hyperbel durch ihren Mittelpunkt gehen, so folgt aus dieser Gleichung:

Die Schnittpunkte einer Scheiteltangente der Hyperbel mit dem Kreise über den Brennpunkten geben, mit dem Mittelpunkte verbunden, die Asymptoten.

1) Man nennt bei der Ellipse und Hyperbel die die (reellen) Brennpunkte enthaltende Achse auch *Hauptachse*, die andere *Nebenachse*.

Hosted by Google

Fall c) (Fig. 147). Wegen

$$\overline{pf_1} = \overline{pt_1} = \overline{qg} = \overline{p''F_1''}$$

haben sämtliche Punkte der Schnittlinie K von f_1 den gleichen Abstand wie von der zur Aufrißebene senkrechten Schnittlinie F_1 von ε mit der Ebene von K_1. K ist daher eine *Parabel* mit dem Brennpunkt f_1 und der Leitlinie F_1.

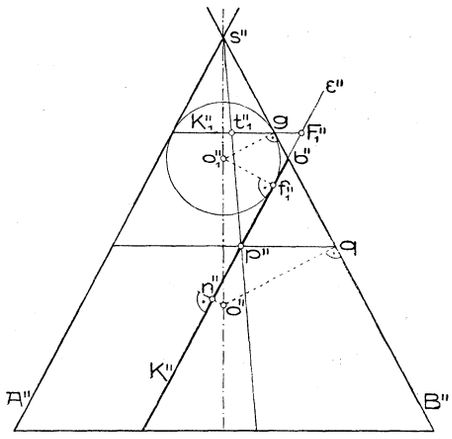


Fig. 147.

Zur Konstruktion der Brennpunkte eines ebenen Drehkegel-Schnittes braucht man jedoch nicht die Punkte o_1 und o_2 zu verwenden; es genügt, irgend eine Kugel mit dem Zentrum o (vgl. Fig. 145) dem Kegel einzuschreiben und die Endpunkte 1, 2 ihres zu ε senkrechten Durchmessers aus s auf ε zu projizieren. Denn diese Kugel ist mit den obigen Kugeln $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ zentrisch-ähnlich in bezug auf s; die Punkte 1 und 2 entsprechen in diesen Ähnlichkeiten bzw. den Punkten f_1 und f_2, liegen also mit ihnen auf Geraden durch s. Für spätere Verwendung sprechen wir dieses, Satz 1 in Nr. 76 als Sonderfall enthaltende Ergebnis in folgender Form aus:

Satz 2: *Umschreibt man einer Kugel aus einem Punkte s einen Kegel, so schneidet er irgend eine Ebene ε in einer Kurve zweiter Ordnung, deren Brennpunkte die Zentralrisse der Endpunkte des zu ε senkrechten Kugeldurchmessers aus s auf ε sind.*

Aus den obigen Figuren lassen sich noch manche andre Eigenschaften der Kegelschnitte leicht herleiten. Schreiben wir z. B. dem Kegel eine Kugel $\varkappa$ mit dem Zentrum o ein (vgl. Fig. 145), deren Berührungskreis mit dem Kegel durch den Punkt p von K, mithin auch durch den zu p bezüglich $[ab] = [\sigma\varepsilon]$ symmetrischen Punkt p_1 geht, so wird sie von ε in einem Kreise N geschnitten, der K in p und p_1 berührt (Nr. 73, 2. Abs. nach Satz 4). Die Mitte n von N liegt auf $[ab]$ im Fußpunkt des aus o auf ε gefällten Lotes und $[np]$ ist dann die Normale von K in p. Nun ist für einen Ellipsen- oder Hyperbelschnitt, wegen $[o_1f_1] \parallel [on] \parallel [o_2f_2]$ und $[o_1t_1] \parallel [op] \parallel [o_2t_2]$,

$$\overline{f_1n} : \overline{f_2n} = \overline{o_1o} : \overline{o_2o} = \overline{t_1p} : \overline{t_2p} = \overline{f_1p} : \overline{f_2p}$$

also

$$\overline{f_1n} : \overline{f_2n} = \overline{f_1p} : \overline{f_2p}.$$

Zufolge eines bekannten planimetrischen Satzes schließt dann die Kurvennormale $[pn]$ mit den Leitstrahlen $[f_1p]$ und $[f_2p]$ gleiche Winkel ein.

Hosted by Google

Für einen Parabelschnitt (Fig. 147) ist $f_1 n$ der Normalriß von $o_1 o$ auf die zu A parallele Parabelachse, qg der Normalriß von $o_1 o$ auf B; da die Parabelachse mit $[o_1 o]$ den gleichen Winkel einschließt wie B, so ist $\overline{f_1 n} = \overline{qg}$ und zufolge der Gleichung unter Fall c) $\overline{qg} = \overline{f_1 p}$, also $f_1 np$ ein gleichschenkeliges Dreieck mit dem Scheitel f_1. Die Parabelnormale $[pn]$ ist mithin gleich geneigt gegen den Leitstrahl und gegen die Parabelachse. Betrachtet man die Parabel als Kegelschnitt mit einem unendlichfernen Brennpunkt, die durch ihre Punkte parallel zur Achse gehenden Geraden also als die zweiten Leitstrahlen, so können wir zusammenfassend sagen:

Die Normale eines Kegelschnittes in einem Punkte schließt mit den Leitstrahlen durch diesen Punkt gleiche Winkel ein[1]).

Von der Definition einer Kurve 2. O. durch ihre Brennpunktseigenschaft ausgehend, läßt sich umgekehrt zeigen, daß durch sie unendlich viele Drehkegel legbar sind. Es sei z. B. der gegebene Kegelschnitt eine Ellipse E in der horizontalen Ebene ε mit den Brennpunkten f_1, f_2 und der großen Achse ab (Fig. 148). Dann nehmen wir eine beliebige Kugel $\varkappa_2$ (Mitte o_2) an, die ε in f_2 berührt, und ziehen in der durch $[ab]$ normal ε gelegten Ebene an den Schnittkreis mit $\varkappa_2$ aus a und b die Tangenten, welche sich in s treffen mögen. Nach Satz 2 schneidet der aus s der Kugel $\varkappa_2$ umschriebene Kegel ε in einer Ellipse mit der großen Achse ab und dem Brennpunkt f_2; diese Ellipse muß also mit E identisch sein. Analog führt man den Beweis für eine Hyperbel oder Parabel. Daraus folgt:

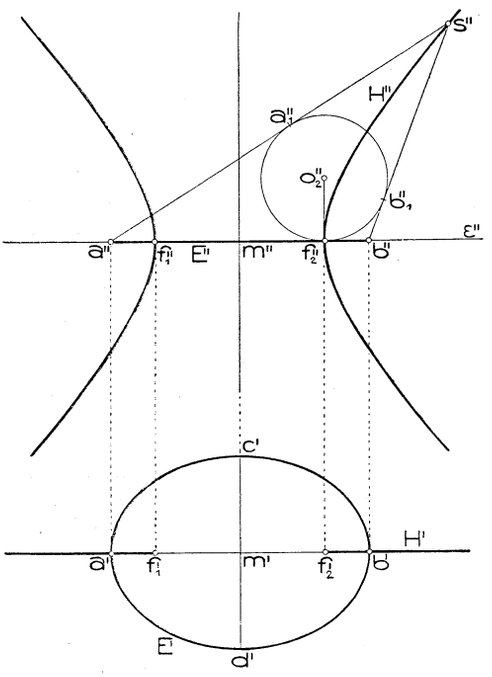


Fig. 148.

Satz 3: *Jede Kurve zweiter Ordnung darf als ebener Schnitt eines Drehkegels oder als Zentralriß eines Kreises aufgefaßt werden.*

Für die Spitzen s der durch die Ellipse E legbaren Drehkegel be-

1) Einen sehr einfachen Beweis dieses Satzes führt auch *R. Schüssler,* Orthogonale Axonometrie, Leipzig u. Berlin 1905, S. 88, Fußn. 1) an.

Hosted by Google

stehen, wenn (Fig. 148) $[as]$ und $[bs]$ $\varkappa_2$ in a_1 und b_1 berühren, die Beziehungen

$$\overline{as} = \overline{aa_1} + \overline{a_1 s} = \overline{af_2} + \overline{a_1 s}$$
$$\overline{bs} = \overline{bb_1} + \overline{b_1 s} = \overline{bf_2} + \overline{b_1 s},$$

woraus, wegen $\overline{a_1 s} = \overline{b_1 s}$,

$$\overline{as} - \overline{bs} = \overline{af_2} - \overline{bf_2} = \overline{f_1 f_2}$$

folgt. Die Punkte s liegen demnach auf einer Hyperbel H, deren Ebene zu ε senkrecht steht, die die Strecke $f_1 f_2$ zur reellen Achse und a, b zu Brennpunkten hat. Ebenso zeigt man, daß alle Drehkegel durch H ihre Spitzen auf E haben. Es gilt mithin der Satz[1]):

Wenn eine Hyperbel und eine Ellipse in zwei normalen Ebenen so liegen, daß die Scheitel der einen Linie die Brennpunkte der andern sind, so ist jede der Ort der Spitzen der durch die andre legbaren Drehkegel.

Für die Parabel gilt der analoge Satz:

Wenn zwei Parabeln in zwei normalen Ebenen so liegen, daß der Scheitel der einen der Brennpunkt der andern ist, so ist jede der Ort der Spitzen der durch die andre legbaren Drehkegel.

Man sagt von zwei solchen Kegelschnitten, der eine ist die *Fokalkurve* des andern.

82. Doppelverhältnis von vier Punkten einer Reihe oder vier Strahlen eines Büschels. Nach Nr. 81, Satz 3 darf jede Kurve 2. O. als Zentralriß eines Kreises betrachtet werden. Um nun mittels dieses Ergebnisses aus Eigenschaften des Kreises solche der Kurven 2. O. abzuleiten[2]), bedürfen wir eines Satzes über die Beziehung zwischen vier Punkten einer Geraden und deren Zentralprojektion, welcher eine Verallgemeinerung des Satzes bildet, daß durch Parallelprojektion das Teilverhältnis dreier Punkte einer Geraden (Nr. 4) nicht geändert wird.

Verbinden wir (Fig. 149) den außerhalb der Geraden G liegenden Punkt s mit irgend zwei Punkten a und b von G durch die Strahlen $A = [sa]$, $B = [sb]$ und bezeichnen $\overline{sa} = \mathfrak{a}$, $\overline{sb} = \mathfrak{b}$, $\overline{Gs} = \mathfrak{l}$, $\overline{sab} = \mathfrak{f}$, so läßt sich $2\mathfrak{f}$ auf doppelte Weise ausdrücken:

$$2\mathfrak{f} = \overline{ab} \cdot \mathfrak{l} = \mathfrak{a}\mathfrak{b} \sin \widehat{AB},$$

woraus

$$\overline{ab} = \mathfrak{a}\mathfrak{b} \frac{\sin \widehat{AB}}{\mathfrak{l}}$$

1) *J. N. P. Hachette* gibt bereits 1804 (Corr. Éc. Polyt. 1, p. 22—25) *Ch. Dupin* als Entdecker des Satzes an. Vgl. noch *Ch. Dupin*, Corr. Éc. Polyt. 2 (1813), p. 424; *A. Quetelet*, Nouv. Mém. Ac. Belgique 2 (1820), p. 151.

2) Diese Methode hat insbesondere *J. V. Poncelet* in seinem S. 38, Fußn. 1 angeführten Hauptwerk mit großem Erfolg angewandt.

Hosted by Google

folgt. Diese Gleichung gilt auch mit Rücksicht auf die Vorzeichen von $\overline{ab}$ und $\sin \widehat{AB}$, wenn man auf G eine positive Richtung wählt und im Büschel (s) jenen Drehsinn als den positiven annimmt, bei dem der Schnittpunkt eines Strahles mit G sich in positiver Richtung auf G bewegt. Ferner bleibt sie richtig, wenn einer der Punkte a, b ins Unendliche rückt oder beide sich decken.

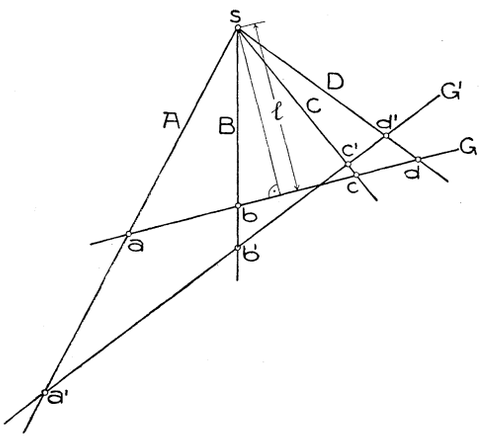


Fig. 149.

Sei nun c ein beliebiger dritter Punkt auf G und $[sc] = C$, $\overline{sc} = \mathfrak{r}$, dann hat man zufolge der letzten, für zwei beliebige Punkte von G geltenden Gleichung

$$\overline{ac} = \mathfrak{a}\mathfrak{r}\frac{\sin \widehat{AC}}{\mathfrak{l}}$$

$$\overline{bc} = \mathfrak{b}\mathfrak{r}\frac{\sin \widehat{BC}}{\mathfrak{l}},$$

mithin

$$\frac{\overline{ac}}{\overline{bc}} = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\frac{\sin \widehat{AC}}{\sin \widehat{BC}}.$$

Analog erhält man für das Teilverhältnis eines vierten Punktes d von G in bezug auf a und b, wenn $[sd] = D$ ist, den Ausdruck

$$\frac{\overline{ad}}{\overline{bd}} = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\frac{\sin \widehat{AD}}{\sin \widehat{BD}}.$$

Durch Division der letzten beiden Gleichungen ergibt sich die wichtige neue Gleichung

$$\frac{\overline{ac}}{\overline{bc}} : \frac{\overline{ad}}{\overline{bd}} = \frac{\sin \widehat{AC}}{\sin \widehat{BC}} : \frac{\sin \widehat{AD}}{\sin \widehat{BD}}.$$

Den linksstehenden Quotienten der Teilverhältnisse der Punkte c und d in bezug auf a und b nennt man das *Doppelverhältnis der vier Punkte* a, b, c, d und bezeichnet es mit $(abcd)$, worin die Reihenfolge der Punkte wohl zu beachten ist.[1]) Aus der letzten Gleichung

1) Es würde z. B. $(bacd) = \frac{\overline{bc}}{\overline{ac}} : \frac{\overline{bd}}{\overline{ad}}$ der reziproke Wert von $(abcd)$ sein.

Hosted by Google

entnimmt man, daß dieses Doppelverhältnis nur von den Winkeln der vier Strahlen A, B, C, D abhängt. Schneidet man daher diese Strahlen durch eine beliebige andre Gerade G' in den Punkten a', b', c', d', so wird

$$(a'b'c'd') = (abcd)$$

sein. Dies gibt den wichtigen

Satz 1: *Das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden wird durch (Zentral-) Projektion nicht geändert.*

Vier Strahlen A, B, C, D eines Büschels werden nach obigem von jeder Geraden nach dem nämlichen Doppelverhältnis geschnitten, gegeben durch

$$\frac{\sin \widehat{AC}}{\sin \widehat{BC}} : \frac{\sin \widehat{AD}}{\sin \widehat{BD}}.$$

Man nennt diese Zahl das *Doppelverhältnis der vier Strahlen* A, B, C, D und bezeichnet es mit $(ABCD)$. Werden vier Punkte a, b, c, d einer Geraden einmal aus s durch die Strahlen A, B, C, D, das andre Mal aus s' durch die Strahlen A', B', C', D' projiziert, so ist

$$(ABCD) = (A'B'C'D'),$$

weil jedes dieser Doppelverhältnisse $(abcd)$ gleich ist.

83. Harmonische Punkte und Strahlen. Hat das Doppelverhältnis von vier Punkten oder Strahlen den Wert -1, dann sagt man, die vier Punkte oder Strahlen liegen (oder sind) *harmonisch*. Aus

$$(abcd) = -1$$

oder

$$\frac{\overline{ac}}{\overline{bc}} = -\frac{\overline{ad}}{\overline{bd}}$$

folgt, daß ab von den Punkten c und d oder cd von den Punkten a und b innerlich und äußerlich in demselben Verhältnis geteilt wird (Nr. 4). Jedes der beiden Punktepaare trennt dann das andre; man sagt daher, ab und cd trennen einander harmonisch, und spricht genauer nicht von vier harmonischen Punkten, sondern von zwei harmonischen Punktepaaren. Zu jedem Punkte c gibt es in bezug auf ein Punktepaar ab einen einzigen harmonischen Punkt, da er durch sein Teilverhältnis $-\frac{\overline{ac}}{\overline{bc}}$ bestimmt ist (Nr. 4).

Insbesondere wird das Punktepaar ab *von seiner Mitte und dem unendlichfernen Punkte seiner Geraden harmonisch getrennt*, da die Teilverhältnisse der letzteren Punkte in bezug auf ab (nach Nr. 4) -1 bzw. $+1$ sind.

Hosted by Google

Vier harmonische Punkte gehen (nach Nr. 82, Satz 1) durch Projektion immer wieder in solche über. Projiziert man die harmonischen Punkte a, b, c, d der Geraden G (Fig. 150) insbesondere derart aus s auf G', daß die Projektion d' von d ins Unendliche fällt ($G' \parallel [sd]$), dann muß c' die Mitte von $a'b'$ sein. Dies benutzt man zur Konstruktion des vierten harmonischen Punktes c zu d in bezug auf ab.

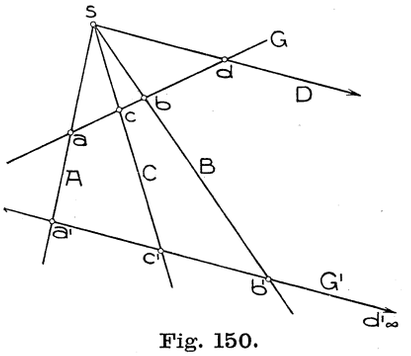


Fig. 150.

Projiziert man umgekehrt zwei Punkte, deren Mitte und den unendlichfernen Punkt ihrer Geraden aus irgend einem außerhalb dieser Geraden gelegenen Punkt auf eine andre Gerade, so erhält man stets vier harmonische Punkte.

Fällt c mit a oder b zusammen, so deckt sich sein harmonischer Punkt bezüglich ab mit ihm.

Zwei Strahlen werden durch ihre beiden Symmetralen harmonisch getrennt. Denn schneidet man diese vier Strahlen durch eine zu einer der Symmetralen parallele Gerade, so erhält man ein Punktepaar samt Mitte und unendlichfernem Punkt.

Ein wichtiger Satz über harmonische Punkte lautet:

Satz 1: *Ist m die Mitte des Punktepaares ab und cd dazu harmonisch, dann besteht die Gleichung $\overline{mc} \cdot \overline{md} = \overline{mb}^2$. Umgekehrt folgt aus dem Bestehen dieser Gleichung die harmonische Lage von ab und cd.*

In der Tat folgt aus

$$\frac{\overline{ac}}{\overline{bc}} : \frac{\overline{ad}}{\overline{bd}} = -1$$

oder

$$\overline{ac} \cdot \overline{bd} + \overline{bc} \cdot \overline{ad} = 0,$$

wenn man jede der vier Strecken durch den Punkt m zerlegt denkt,

$$(\overline{am} + \overline{mc})(\overline{bm} + \overline{md}) + (\overline{bm} + \overline{mc})(\overline{am} + \overline{md}) = 0$$

und daraus durch Ausmultiplizieren und Reduzieren (unter Beachtung von $\overline{am} = -\overline{bm}$) die behauptete Gleichung. Umgekehrt gelangt man von dieser Gleichung aus durch die entgegengesetzten Schritte zu $(abcd) = -1$.

84. Polareigenschaften des Kreises. Über den Kreis sind aus der Planimetrie die folgenden zwei Sätze bekannt:

Hosted by Google

a) Legt man aus einem Punkte p Gerade, die den Kreis K in den Punktepaaren $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, ... schneiden, so ist $\overline{pa_1} \cdot \overline{pb_1} = \overline{pa_2} \cdot \overline{pb_2} = \cdots$ eine konstante Größe (die Potenz von p bezüglich K), die, wenn p außerhalb K liegt, gleich ist dem Quadrate der aus p an K ziehbaren Tangentenstrecken.

b) Zwei (reelle) Kreise schneiden einander dann und nur dann rechtwinkelig, wenn die aus der Mitte des einen Kreises an den andern gezogenen Tangentenstrecken dem Halbmesser des ersten Kreises gleich sind.

Es sind dann auch die aus der Mitte des zweiten Kreises an den ersten gelegten Tangentenstrecken gleich dem Halbmesser des zweiten Kreises.

Mit Hilfe des Satzes 1 in Nr. 83 folgt daraus sofort der weitere Satz:

c) Sind zwei Punktepaare ab und cd harmonisch und beschreibt man über cd als Durchmesser einen Kreis K_1, so schneidet er jeden Kreis durch a und b orthogonal.

Denn ist k_1 die Mitte von K_1, mithin auch von cd, so ist (Nr. 83, Satz 1) $\overline{k_1 a} \cdot \overline{k_1 b} = \overline{k_1 c}^2$; legt man nun durch a und b einen beliebigen Kreis K, so ist die Potenz von k_1 bezüglich K gleich $\overline{k_1 c}^2$, d. h. (nach a)) $\overline{k_1 c}$ ist die Länge der aus k_1 an K ziehbaren Tangentenstrecken; zufolge b) schneiden sich dann K_1 und K rechtwinkelig.

Nun läßt sich auch leicht der folgende Hauptsatz beweisen:

d) Sucht man zu einem Punkte p in der Ebene eines Kreises K bezüglich der Schnittpunktepaare von K mit den Geraden durch p die vierten harmonischen Punkte, so liegen diese auf einer Geraden P.

Legen wir nämlich durch p (Fig. 151) irgend eine K in a_1 und b_1 schneidende Gerade G_1 und suchen zu p bezüglich $a_1 b_1$ den harmonischen Punkt p_1, dann schneidet (nach c)) der über pp_1 als Durchmesser beschriebene Kreis K_1 mit dem Zentrum k_1 den Kreis K rechtwinkelig. Trifft daher $G = [pm]$ (m Mitte von K) K_1 in s und K in a und b, so ist $\overline{mp} \cdot \overline{ms} = \overline{ma}^2$, mithin (Nr. 83, Satz 1) s der harmonische Punkt zu p bezüglich ab und demnach von der Lage von G_1 unabhängig; ferner steht $[sp_1]$ zu $[ps] = G$ senkrecht. Weil nun p_1 der vierte harmonische

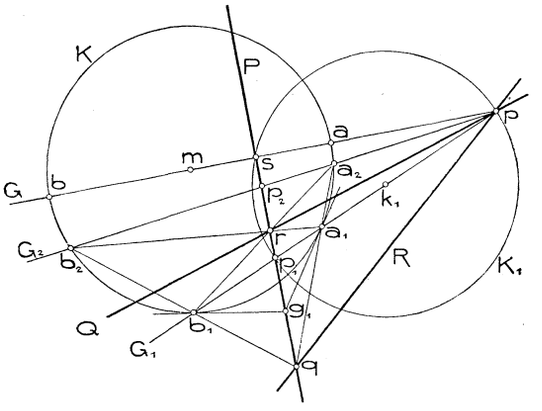


Fig. 151.

Punkt auf irgend einer durch p gelegten Geraden war, so ist der Ort aller dieser Punkte die durch s senkrecht zu G gelegte Gerade P. Dies gilt, ob p außerhalb oder innerhalb des Kreises K liegt.

Für $p = m$ liegen alle vierten harmonischen Punkte unendlichfern, ihr Ort P ist also die unendlichferne Gerade der Ebene. Wird p unendlichfern gewählt, so gehören die vierten harmonischen Punkte, als Mitten der Sehnen von der Richtung p, dem dazu senkrechten Kreisdurchmesser an. Für einen außerhalb K befindlichen (insbesondre auch für einen unendlichfernen) Punkt p gehören die Berührungspunkte der aus p an K legbaren, stets reellen Tangenten der Geraden P an, weil sich auf diesen Tangenten die vierten harmonischen Punkte mit den Berührungspunkten decken. Liegt p auf K, so ist seine Tangente als Gerade P aufzufassen.

Man nennt P die *Polare* von p bezüglich K. *Zu jedem Punkte in der Ebene des Kreises gehört eine Polare.* Die Punkte des Kreises sind die einzigen, die auf ihren Polaren liegen.

Irgend eine von G_1 verschiedene Gerade G_2 durch p (Fig. 151) schneide K in $a_2 b_2$, P in p_2; ferner sei $[a_1 a_2 \cdot P] = q$. Die Projektion der harmonischen Punktepaare pp_1, $a_1 b_1$ aus q auf G_2 liefert wieder harmonische Punktepaare. Da die Projektionen der drei ersten Punkte mit p, p_2, a_2 zusammenfallen und es zu a_2 bezüglich pp_2 nur einen harmonischen Punkt gibt, muß die Projektion von b_1 nach b_2 fallen. Die Geraden $[a_1 a_2]$ und $[b_1 b_2]$ schneiden sich demnach auf P (in q). Aus denselben Gründen schneiden sich auch $[a_1 b_2]$ und $[a_2 b_1]$ auf P (in r).

Projiziert man ferner die vier harmonischen Punkte $a_1 b_1 p_1 p$ aus r einmal auf $[a_1 a_2]$ das andre Mal auf $[b_1 b_2]$, so folgt, daß $[pr \cdot a_1 a_2]$ und $[pr \cdot b_1 b_2]$ zu q bezüglich $a_1 a_2$ bzw. $b_1 b_2$ harmonisch liegen oder daß $Q = [pr]$ die Polare von q bezüglich K ist. Hieraus schließt man sofort, daß auch $R = [pq]$ die Polare von r ist.

Nennt man vier Punkte der Ebene samt ihren sechs Verbindungsgeraden ein *vollständiges Viereck*, die Punkte seine Ecken, die Verbindungsgeraden seine Seiten und je zwei Seiten ohne gemeinsame Ecke *Gegenseiten*, so läßt sich dieses Ergebnis in folgender Form aussprechen:

e) Von jedem einem Kreise eingeschriebenen vollständigen Viereck ist die Verbindungslinie der Schnittpunkte zweier Gegenseitenpaare immer die Polare des Schnittpunktes des dritten Gegenseitenpaares.

Damit läßt sich, wenn K gezeichnet vorliegt, zu jedem Punkte mittels des Lineals allein die Polare konstruieren. Ferner folgt daraus der Satz:

f) Liegt in der Ebene eines Kreises der Punkt q auf der Polare von p, so liegt auch p auf der Polare von q. Zwei solche Punkte heißen bezüglich des Kreises konjugiert.

Hosted by Google

Sucht man zu zwei Punkten g_1, g_2 einer beliebigen Geraden P die Polaren G_1, G_2 bezüglich des Kreises K, so ist die Polare ihres Schnittpunktes p nach Satz f) $[g_1 g_2] = P$ und die Polaren sämtlicher Punkte von P gehen durch p. Man nennt p den *Pol* von P und kann sagen:

g) Jede Gerade besitzt in bezug auf einen Kreis einen einzigen Pol.

Schneidet die Gerade den Kreis in reellen Punkten, so ist der Schnitt der Tangenten in diesen Punkten der Pol der Geraden[1]). Der Pol der unendlichfernen Geraden ist der Kreismittelpunkt, der Pol einer Kreistangente ihr Berührungspunkt.

Aus dem Begriff von Pol und Polare folgt auch sofort der zu f) duale Satz:

h) Geht in der Ebene eines Kreises die Gerade Q durch den Pol von P, so geht auch P durch den Pol von Q. Zwei solche Gerade heißen bezüglich des Kreises konjugiert.

Die konjugierten Geraden durch den Kreismittelpunkt heißen *konjugierte Durchmesser*; sie sind zueinander normal, weil der Pol eines Durchmessers der Schnittpunkt der Tangenten seiner Endpunkte ist. Diese Paare senkrechter Durchmesser schneiden auf der unendlichfernen Geraden die Paare konjugierter Punkte aus.

Auf jeder Geraden G in der Ebene des Kreises K gibt es zu einem Punkte x' einen bezüglich K konjugierten Punkt x''. Da x'' als konjugierten Punkt wieder x' hat, so bilden die Punktepaare $x'x''$ auf G eine Punktinvolution (Nr. 4). Schneidet G den Kreis in reellen Punkten a und b, so sind diese die Doppelpunkte der Involution. Schneidet G den Kreis nicht reell, so definiert die Involution konjugierter Punkte, wie eine einfache Rechnung lehrt, die beiden imaginären Schnittpunkte. Wenn also zwei Kreise K_1, K_2 auf G dieselbe Involution konjugierter Punkte bestimmen, so schneiden sie G in demselben (reellen oder imaginären) Punktepaar. Insbesondere bestimmen irgend zwei Kreise K_1, K_2 derselben Ebene auf deren unendlichferner Geraden U dieselbe Involution konjugierter Punkte. Denn zu jedem Paare konjugierter (also zueinander senkrechter) Durchmesser von K_1 gibt es parallele konjugierte Durchmesser von K_2 und beide Paare schneiden auf U dasselbe sowohl bezüglich K_1 als K_2 konjugierte Punktepaar aus. Daraus folgt der

Satz 1: *Sämtliche Kreise der Ebene gehen durch dieselben zwei unendlichfernen konjugiert imaginären Punkte.*

Man nennt sie die *absoluten Punkte* oder auch die *Kreispunkte* der Ebene[2]). Sie sind definiert durch die Punktinvolution, welche die recht-

1) Dies gilt auch für den Fall, als die Gerade den Kreis in imaginären Punkten schneidet; es kann jedoch hier auf das Konstruieren mit imaginären Elementen nicht eingegangen werden.

2) Wegen historischer Bemerkungen hierzu vgl. Nr. 109.

Hosted by Google

winkeligen Strahlenpaare durch irgend einen Punkt der Ebene auf deren unendlichferner Geraden ausschneiden.

Parallele Ebenen besitzen demnach dieselben absoluten Punkte oder, anders ausgedrückt, auf jeder Geraden der unendlichfernen Ebene gibt es ein absolutes Punktepaar. Ein Kreis kann auch als Kurve zweiter Ordnung definiert werden, die durch die beiden absoluten Punkte hindurchgeht. Darum ist ein Kreis schon durch drei im Endlichen liegende Punkte bestimmt (vgl. Nr. 57, letzter Abschnitt).

85. Polareigenschaften der Kurven zweiter Ordnung. In Nr. 81 wurde gezeigt, daß jeder Kegelschnitt K' der Zeichenebene als Zentralriß eines Kreises K im Raume angesehen werden darf. Daraus folgert man sofort die Gültigkeit sämtlicher Polareigenschaften des Kreises für alle Kurven zweiter Ordnung. Legt man nämlich (Fig. 152) durch einen beliebigen Punkt p' der Zeichenebene die K' schneidenden Geraden $G_1', G_2', G_3', \ldots$ und sucht auf ihnen bezüglich der Schnittpunktepaare $a_1'b_1', a_2'b_2', a_3'b_3', \ldots$ zu p' die vierten harmonischen Punkte $p_1', p_2', p_3', \ldots$, so ist diese Figur der Zentralriß einer analogen Figur in der Kreisebene, da sich Gerade wieder als Gerade (vgl. Einleitung S. 2) und harmonische Punkte als ebensolche (Nr. 83) abbilden. Für den Kreis liegen aber $p_1, p_2, p_3, \ldots$ in einer Geraden P (Nr. 84, d)); mithin müssen die Punkte $p_1', p_2', p_3', \ldots$ ebenfalls einer Geraden P' angehören, die man die *Polare von p' in bezug auf K'* nennt. *Es gelten demnach die in Nr. 84 unter d) bis h) ausgesprochenen Sätze genau so für jede nicht zerfallende Kurve zweiter Ordnung*[1]. *Insbesondere besitzt jeder Punkt eine Polare und jede Gerade einen Pol.*

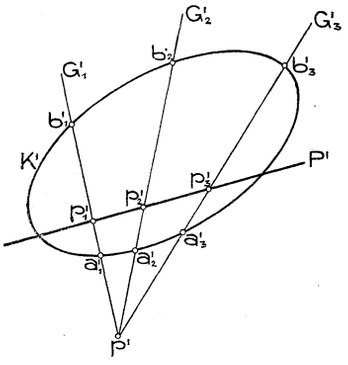


Fig. 152.

Wählt man p' unendlichfern, so sind die vierten harmonischen Punkte die Mitten der zur Richtung p' parallelen Sehnen von K'. Es besteht daher der

Satz 1: *Zieht man in einer (nichtzerfallenden) Kurve zweiter Ordnung eine Schar paralleler Sehnen, so liegen deren Mitten auf einer Geraden, die man einen Durchmesser nennt.*

Man kann auch sagen:

1) Die Polarentheorie der Kegelschnitte hat *G. Desargues* 1639 in seinem „Brouillon project" (vgl. Œuvres de Desargues, réunies et analysées par *Poudra*, Paris 1864, t. 1, p. 103 f.) entwickelt. Anfänge dieser Theorie finden sich schon bei *Apollonius von Pergä* (um 200 v. Chr.).

Hosted by Google

Ein Durchmesser einer Kurve zweiter Ordnung ist die Polare eines unendlichfernen Punktes.

Sämtliche Durchmesser gehen demnach durch einen Punkt, den *Pol der unendlichfernen Geraden*, den man den *Mittelpunkt* der Kurve zweiter Ordnung nennt.

Zwei Durchmesser heißen (Nr. 84, h)) *konjugiert, wenn der eine durch den Pol des andern geht oder, anders ausgedrückt, wenn die zu dem einen parallelen Sehnen durch den andern halbiert werden. Die unendlichfernen Punkte konjugierter Durchmesser sind konjugierte Punkte.*

Die Polaren der Brennpunkte einer Kurve zweiter Ordnung heißen ihre *Leitlinien* (*Direktricen*).

Da bei Zentral- oder Parallelprojektion jede Gerade sich als Gerade, je vier harmonische Punkte sich wieder als solche abbilden, so werden, wenn p und P Pol und Polare einer Kurve zweiter Ordnung K sind und p', P', K' die Projektionen dieser Gebilde bezeichnen, p' und P' Pol und Polare von K' sein. Anders ausgedrückt:

Satz 2: *Die Polareigenschaften einer Kurve zweiter Ordnung werden durch Zentral- oder Parallelprojektion nicht zerstört.*

Es sollen nun, da die Ellipse schon früher besprochen wurde, noch einige besondere Eigenschaften der Hyperbel und Parabel hervorgehoben oder abgeleitet werden.

86. Eigenschaften und Darstellung der Hyperbel. Eine Hyperbel K schneidet die unendlichferne Gerade U ihrer Ebene in zwei reellen Punkten u_1, u_2, deren Tangenten U_1, U_2 durch den Pol von U, das ist durch den Mittelpunkt m der Kurve gehen. Anders ausgedrückt heißt dies: *Die Asymptoten der Hyperbel schneiden sich im Mittelpunkt.*

Je zwei zu u_1, u_2 harmonische Punkte q, r von U geben, mit m verbunden, die konjugierten Durchmesser R bzw. Q. Daraus folgt:

Satz 1: *Je zwei konjugierte Durchmesser einer Hyperbel trennen die Asymptoten harmonisch.*

Sind die Asymptoten U_1, U_2 und der Durchmesser Q gegeben (Fig. 153) und schneidet man U_1 und Q durch eine zu U_2 parallele Gerade in t_1 und q_1, so gehört der zu q_1 bezüglich t_1 symmetrische Punkt r_1 dem zu Q konjugierten Durchmesser R $(= [mr_1])$ an, wegen

$$([UU_2]t_1q_1r_1) = -1.$$

Bei einer *gleichseitigen Hyperbel* $(U_1 \perp U_2)$ ist $\widehat{RU_1} = \widehat{U_1Q}$, es wird also der Winkel je zweier konjugierten Durchmesser durch die Asymptoten halbiert.

Hosted by Google

Schneidet eine Gerade $G \parallel Q$ die Asymptoten U_1, U_2 in den Punkten 1, 2, die Hyperbel K in 3, 4 und R in g, dann ist g die Mitte der Strecken 12 und 34, mithin $\overline{13} = \overline{24}$ und $\overline{14} = \overline{23}$. Weil G als beliebige Gerade betrachtet werden darf, hat man den

Satz 2: *Auf jeder Hyperbelsekante sind die zwischen der Kurve und den Asymptoten gelegenen Abschnitte einander gleich. Insbesondere ist auf jeder Tangente der Berührungspunkt die Mitte des zwischen den Asymptoten gelegenen Stückes.*

Dieser Satz dient zur *Konstruktion beliebig vieler Hyperbelpunkte* aus den Asymptoten und einem Punkte, sein Sonderfall zur Ermittlung des Berührungspunktes einer Tangente. Die Tangente in einem Hyperbelpunkte ist als Parallele zum konjugierten Durchmesser des diesem Punkte zugehörigen Durchmessers (zufolge Satz 1) leicht ohne Benutzung der Brennpunkte konstruierbar.

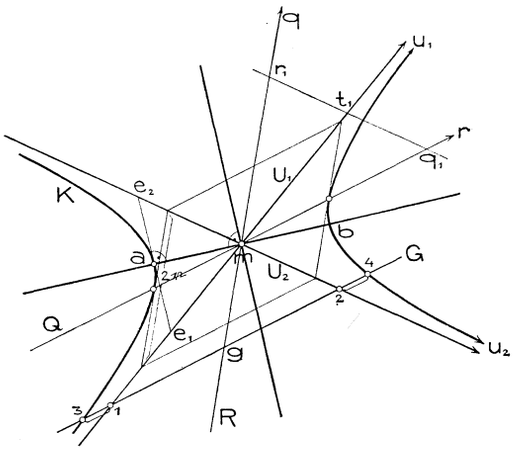


Fig. 153.

Von den obigen konjugierten Punkten q, r auf U liegt der eine außerhalb, der andre innerhalb der Kurve; nur aus ersterem lassen sich reelle Tangenten an K legen, deren Berührungspunkte die Schnittpunkte der Polaren Q mit der Hyperbel sind. Von zwei konjugierten Durchmessern Q, R einer Hyperbel schneidet also nur der eine — in Fig. 153 Q — die Kurve in reellen Punkten. Auf ihren zu R parallelen Tangenten schneiden die Asymptoten die gleich großen Strecken $2\mathfrak{r}$ aus, die man als *Länge des konjugierten imaginären Durchmessers* bezeichnet. Man sieht:

Satz 3: *Eine Hyperbel ist durch Angabe (der Lage und Länge) zweier konjugierten Durchmesser völlig bestimmt.*

Unter den Paaren konjugierter Durchmesser gibt es ein Paar normale Durchmesser, nämlich die die Asymptotenwinkel halbierenden *Achsen*. Die Achse mit den reellen Endpunkten a und b heißt die *reelle* oder *Hauptachse*, die andre die *imaginäre* oder *Nebenachse*. Die Länge der letzteren ist durch die Strecke $2\mathfrak{b} = \overline{e_1 e_2}$ (Fig. 153) gegeben, welche die Asymptoten auf der Tangente in a begrenzen. Wegen $\overline{m e_1} = \mathfrak{r}$ (Nr. 81, Fall b)) ist ($\overline{ma} = \mathfrak{a}$ gesetzt)

$$\mathfrak{r}^2 = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2.$$

Hosted by Google

Es soll noch eine *Konstruktion der Länge der reellen Achse einer Hyperbel aus ihren Asymptoten U_1, U_2 und einem Punkte p* abgeleitet werden (Fig. 154). Auf der Parallelen durch p zur Hauptachse $[ab]$ sei n der Schnitt mit der Nebenachse und p_1 zu p bezüglich der Schnittpunkte e_1, e_2 mit den Asymptoten harmonisch. Dann ist nach Satz 1 $[mp_1]$ der zu $[mp]$ konjugierte Durchmesser, also $[p \parallel mp_1]$ die Hyperbeltangente in p. Schneidet sie $[ab]$ in t und bezeichnet p' den Normalriß von p auf $[ab]$, so ist $[p'p]$ die Polare von t, mithin $(abtp') = -1$. Daraus folgt:

$$\overline{mt} \cdot \overline{mp'} = \overline{ma}^2 = \mathfrak{a}^2$$

oder, wegen

$$\overline{mt} = \overline{p_1p} = \overline{np} - \overline{np_1}$$

und

$$\overline{mp'} = \overline{np},$$

$$\mathfrak{a}^2 = (\overline{np} - \overline{np_1}) \cdot \overline{np} = \overline{np}^2 - \overline{np} \cdot \overline{np_1}.$$

Da zufolge $(e_1e_2pp_1) = -1$

$$\overline{np} \cdot \overline{np_1} = \overline{ne_1}^2$$

ist (Nr. 83, Satz 1), hat man schließlich

$$\mathfrak{a}^2 = \overline{np}^2 - \overline{ne_1}^2.$$

Der Kreis $(n, \overline{np})$ schneidet demnach auf der Parallelen zur Nebenachse durch e_1 einen Punkt aus, der von e_1 die gesuchte Entfernung $\mathfrak{a}$ *hat.*

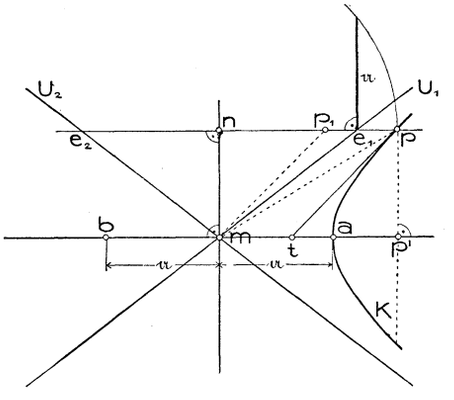


Fig. 154.

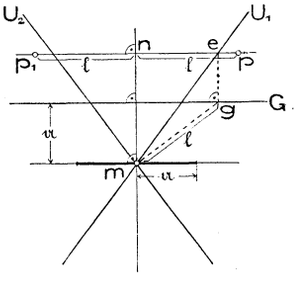


Fig. 155.

Aus der letzten Gleichung leitet man auch leicht die in Fig. 155 angegebene Konstruktion von Hyperbelpunkten aus den Asymptoten U_1, U_2 und der Hauptachse ab. G sei im Abstande $\mathfrak{a}$ parallel zur Hauptachse gezogen. Wird nun durch einen beliebigen Punkt e von U_1 die Parallele zur Nebenachse bis zum Schnitt g mit G und die

Hosted by Google

Parallele zur Hauptachse gezeichnet und auf letzterer vom Schnittpunkt n mit der Nebenachse aus die Entfernung l des Punktes g vom Hyperbelmittelpunkt beiderseits bis p und p_1 aufgetragen, so sind p, p_1 Hyperbelpunkte. Diese Konstruktion erscheint in mancher Hinsicht bequemer ausführbar als die bekannte aus dem Leitstrahlengesetz folgende.

Zum *Ausziehen der Hyperbel* in der Umgebung der Scheitelpunkte benutzt man wie bei der Ellipse die Krümmungskreise[1]), deren Radius sich hier ebenfalls leicht ermitteln läßt. Normale und Tangente eines Hyperbelpunktes p trennen nämlich die beiden Leitstrahlen, als deren Symmetralen (Nr. 81, S. 172), harmonisch, treffen also die Hauptachse in zwei zu den Brennpunkten f_1, f_2 harmonischen Punkten n und t. Zufolge Nr. 83, Satz 1 ist dann

$$\overline{mn} \cdot \overline{mt} = \overline{mf_1}^2.$$

Nähert sich nun p unbegrenzt dem Scheitelpunkt a, so fällt t auf a, während n sich einem Grenzpunkte o_1 nähert, dessen Entfernung $\mathfrak{r}$ von a aus der Gleichung

$$\overline{mo_1} \cdot \overline{ma} = \overline{mf_1}^2$$

folgt, die wegen (vgl. Fig. 156)

$$\overline{mo_1} = \mathfrak{a} + \mathfrak{r}, \quad \overline{ma} = \mathfrak{a}, \quad \overline{mf_1}^2 = \mathfrak{e}^2 = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2$$

in

$$\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{a}\mathfrak{r}$$

übergeht. Ihr gemäß läßt sich Punkt o_1, wie aus Fig. 156 ersichtlich, konstruieren. Er ist der Mittelpunkt des Krümmungskreises in a. Denn der Kreis $(n, \overline{np})$ berührt die Hyperbel in p und in dem bezüglich der Hauptachse symmetrischen Punkt, hat also mit der Kurve vier Punkte gemeinsam. Rückt nun p in a hinein, so geht dieser Kreis in den um o_1 mit dem Radius $\overline{o_1a} = \mathfrak{r}$ gezeichneten Kreis über, der daher in a mit der Hyperbel vier benachbarte Punkte gemeinsam hat[2]). Da

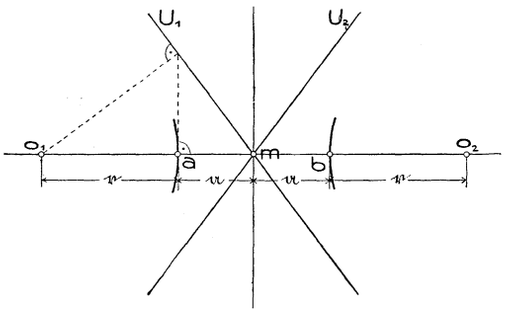


Fig. 156.

1) Oder Kreise mit etwas größerem Halbmesser (vgl. die Bemerkungen zu Fig. 132).

2) Durch dieselbe Überlegung ergibt sich der allgemeine Satz, daß für jede bezüglich einer Achse orthogonal-symmetrische Kurve in jedem ihrer (nicht singulären) Achsenschnittpunkte der Krümmungskreis mindestens vier zusammenfallende Punkte mit der Kurve gemeinsam hat.

Hosted by Google

dieselbe Betrachtung für die Ellipse und Parabel gilt, so kann man allgemein sagen:

Satz 4: *Der Krümmungskreis in einem Scheitelpunkt einer Kurve zweiter Ordnung hat mit ihr vier benachbarte Punkte gemeinsam (oder hyperoskuliert sie).*

Was die *Darstellung einer beliebig im Raume liegenden Hyperbel* K anlangt, so ist jeder Parallelriß K' von K (für Sehstrahlen, geneigt gegen die Ebene von K) wieder eine Hyperbel und zwar bilden sich (Nr. 64) die Asymptoten von K als die von K' ab. Die Risse zweier konjugierten Durchmesser (oder der Achsen) von K sind konjugierte Durchmesser von K'. Durch sie sind die Asymptoten und damit die Achsen ihrer Lage nach unmittelbar gegeben; die Hauptachsenlänge von K' erhält man aus den Asymptoten und einem Endpunkte des gefundenen reellen Durchmessers nach Fig. 154, man kann daher K' mit beliebiger Genauigkeit zeichnen.

87. Eigenschaften und Darstellung der Parabel. Eine Parabel K berührt die unendlichferne Gerade U ihrer Ebene in einem Punkte, der, als Pol von U, zugleich als Mittelpunkt m der Kurve zu betrachten ist (Nr. 85). Die Polaren aller Punkte von U gehen durch m oder

Satz 1: *Die Durchmesser der Parabel sind untereinander parallel.*

Jeder Durchmesser besitzt nur einen im Endlichen liegenden Endpunkt und hat als konjugierten Durchmesser die unendlichferne Gerade. Man spricht daher bei der Parabel nur von den *konjugierten Sehnen* eines Durchmessers (die von ihm halbiert werden) oder von der konjugierten Richtung. Zu dieser Richtung ist auch die Tangente im endlichfernen Endpunkte des Durchmessers, dessen *konjugierte Tangente*, parallel.

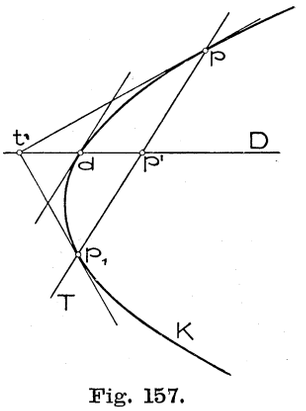


Fig. 157.

Wählt man auf dem Durchmesser D mit dem Endpunkte d (Fig. 157) einen beliebigen Punkt t, so schneidet dessen Polare T den Durchmesser in einem Punkte p', der zu t bezüglich d und des unendlichfernen Punktes von D harmonisch ist; d muß also die Mitte von tp' sein. Liegt t außerhalb der Parabel (Fig. 157), so ist p' der Schnitt von D mit der zu t gehörigen Berührungssehne (und $\overline{p_1 p'} = \overline{p' p}$).

Es gibt einen Durchmesser, dessen konjugierte Richtung zu ihm

Hosted by Google

senkrecht steht, die *Achse* A der Parabel. *Die Achse einer Parabel ist demnach jener Durchmesser, dessen konjugierte Tangente auf ihm senkrecht steht.* Der Endpunkt a der Achse heißt der *Scheitel* der Parabel, seine Tangente die *Scheiteltangente.* Legt man aus einem Punkte t von A (Fig. 158) eine Tangente an K und projiziert ihren Berührungspunkt p normal auf A nach p', so wird tp' durch a halbiert, weil ja $[pp']$ die Polare von t ist. Die Scheiteltangente halbiert dann tp in b und das in b auf $[tp]$ errichtete Lot trifft A in einem Punkte f, der mit p und t ein gleichschenkeliges Dreieck bestimmt. Die Tangente $[pt]$ in p ist demnach gegen die Parabelachse und gegen $[pf]$ gleich geneigt oder (Nr. 81) f ist der Brennpunkt der Parabel. Dies gibt den

Satz 2: *Kennt man von einer Parabel die Achse, den Scheitel und eine Tangente, so findet man ihren Brennpunkt, wenn man im Schnitt der Scheiteltangente mit der gegebenen Tangente auf diese ein Lot errichtet und es mit der Achse zum Schnitt bringt.*

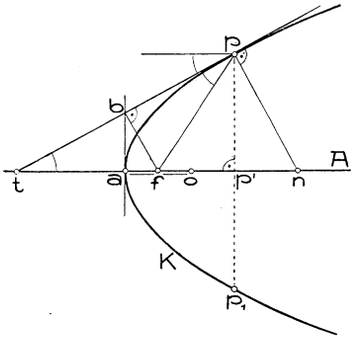


Fig. 158.

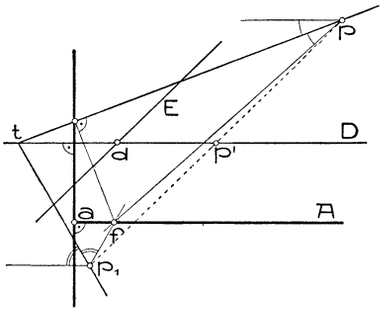


Fig. 159.

Umgekehrt liegen die Fußpunkte der aus dem Brennpunkt auf die Tangenten gefällten Lote in der Scheiteltangente. Damit läßt sich aus einem Durchmesser D, seiner konjugierten Tangente E und einem Punkte p der Parabel der Brennpunkt und Scheitel leicht finden (Fig. 159). Schneidet nämlich $[p \parallel E]$ den Durchmesser D in p', so ist der zu p bezüglich p' symmetrische Punkt p_1 ebenfalls ein Punkt der Parabel und die Verbindungslinien des zu p' bezüglich $d = [ED]$ symmetrischen Punktes t mit p und p_1 geben die Tangenten dieser Punkte. Sucht man noch zu $[p \parallel D]$ und $[p_1 \parallel D]$ bezüglich $[pt]$ bzw. $[p_1 t]$ die symmetrischen Geraden (Leitstrahlen), so ist ihr Schnitt f der Brennpunkt, $[f \parallel D] = A$ demnach die Achse; die Scheiteltangente geht $\perp A$ durch einen der Fußpunkte der aus f auf $[pt]$ oder $[p_1 t]$ gefällten Lote.

Hosted by Google

Ist in der eben besprochenen Aufgabe statt des Punktes p eine Tangente gegeben, so suche man zuerst ihren Berührungspunkt und verfahre dann wie vorhin.

Behufs Ermittlung des Krümmungskreises im Scheitel der Parabel kehren wir zu Fig. 158 zurück. Die Normale in p schneide A in n. Da der zweite Brennpunkt der Parabel unendlichfern auf A liegt und beide durch t und n harmonisch getrennt werden, so ist

$$\overline{fn} = \overline{ft} = \overline{fp}.$$

Rückt p nach a, so erreicht n als Grenze den zu a gehörigen Krümmungsmittelpunkt o, für den $\overline{fo} = \overline{fa}$ oder $\overline{ao} = 2\overline{af}$ ist. Daher besteht der

Satz 3: *Der Krümmungsradius im Parabelscheitel ist gleich der doppelten Entfernung des Scheitels vom Brennpunkt.*

Jeder *Parallelriß einer Parabel* K (für Sehstrahlen, geneigt gegen die Ebene von K) ist eine Parabel K'. Ein Durchmesser (bzw. die Achse) von K und seine konjugierte Tangente (bzw. die Scheiteltangente) bilden sich als Durchmesser von K' und dessen konjugierte Tangente ab. Kennt man noch das Bild eines Punktes oder einer Tangente von K, so kann man Scheitel und Brennpunkt von K' auf die oben gezeigte Weise finden und daher den Riß von K mit beliebiger Genauigkeit zeichnen.

Analog würde man verfahren, wenn es sich um die Ermittlung der Gestalt einer in gegebener Ebene liegenden und durch den Normalriß eines Durchmessers, seiner konjugierten Tangente und eines Punktes bestimmten Parabel handelte.

IV. Kapitel.

Kegel- und Zylinderflächen, allgemeine abwickelbare Flächen.

88. Darstellung und Tangentenebenen beliebiger Kegel- und Zylinderflächen. Ein Kegel (Nr. 72) ist bestimmt durch seine Leitkurve K, die wir gewöhnlich als eben annehmen und deshalb *Basiskurve* nennen wollen, und durch seine *Spitze* s. Zur Darstellung des Kegels werden wir daher zwei Normalrisse von K und s als gegeben voraussetzen.[1])

Wie bei der Darstellung jeder krummen Fläche ist auch hier die erste

1) Die Auseinandersetzungen der Nr. 88—90 gelten jedoch auch, wenn K und s in einer beliebigen linearen Abbildung (Nr. 25) gegeben sind.

Hosted by Google

Aufgabe: *Aus dem einen Riß eines der Fläche angehörigen Punktes p den andern zu finden.*

Seien z. B. K und s durch Auf- und Grundriß gegeben (Fig. 160) und soll aus p'' der Grundriß gefunden werden, so zeichne man die Grundrisse jener Kegelerzeugenden, deren Aufrisse $[s''p'']$ decken; auf ihnen liegt p'. Schneidet $[s''p'']$ K'' in $t_1'', t_2'', \ldots$ und sind deren entsprechende Punkte auf K' $t_1', t_2' \ldots$, so stellen $[s't_1']$, $[s't_2']$, ... die Grundrisse der verlangten Erzeugenden dar; auf ihnen liegen in der Ordnungslinie durch p'' die Grundrisse $p_1', p_2', \ldots$ jener Punkte p_1, $p_2, \ldots$ der Kegelfläche, deren Aufrisse p'' decken. Die Lösung der Aufgabe ist daher mehrdeutig.

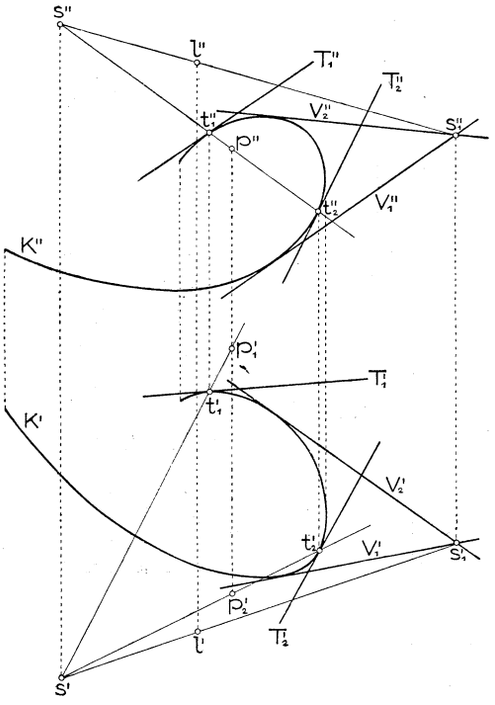


Fig. 160.

Die Tangentenebene längs der Erzeugenden $[sp_1]$ ist durch diese und die Tangente T_1 in t_1 an K bestimmt. T_1 ist zugleich die Basisspur der Tangentenebene.

Die durch einen Punkt l außerhalb der Kegelfläche an diese legbaren Berührungsebenen gehen durch $[sl]$ und ihre Basisspuren müssen K berühren. Man erhält also letztere als die aus dem Basisspurpunkt s_1 von $[sl]$ an K gezogenen Tangenten V_1, $V_2 \ldots$. Liegt l unendlichfern, so hat man die Aufgabe, parallel zu einer Geraden L die Tangentialebenen an den Kegel zu legen. Ihre Lösung erfolgt genau wie vorhin, an Stelle von $[sl]$ tritt $[s \parallel L]$.

Für einen algebraischen Kegel ist die Anzahl der aus einem Punkt l an ihn legbaren Tangentenebenen (die imaginären mitgezählt) gleich der Klasse von K also für alle Punkte des Raumes dieselbe. Man nennt diese Zahl die *Klasse des Kegels.* Die nichtzerfallenden Kegel zweiter Ordnung sind mit denen zweiter Klasse identisch.

Für einen Zylinder, bei dem s durch die Erzeugendenrichtung S gegeben ist, gilt alles wie vorhin. Bei der Konstruktion der Basisspuren der zu einer Geraden L parallelen Tangentialebenen (l unendlichfern) lege man durch einen beliebigen Punkt q die Parallelen zu S

Hosted by Google

und L und ziehe parallel zur Verbindungslinie ihrer Basisspurpunkte die Tangenten an K.

89. Ebene Schnitte beliebiger Kegel- und Zylinderflächen. Perspektive Kollineation ebener Figuren. Um den Schnitt einer Kegel- (oder Zylinder-)fläche mit einer nicht durch die Spitze gehenden Ebene zu erhalten, ermittle man deren Schnitte mit einer hinreichenden Anzahl von Erzeugenden und verbinde diese Punkte durch eine krumme Linie. Vorteilhaft ist es dabei, außerdem die Tangenten der Schnittkurve in den ermittelten Punkten aufzusuchen; sie ergeben sich als Schnitte der Tangentenebenen der Kegelfläche in diesen Punkten mit der schneidenden Ebene.

Die Aufgabe gehört, sobald der Kegel durch seine Basis K und Spitze s gegeben ist, zu den Aufgaben über Lagenbeziehungen (Nr. 16); die Ausführung soll daher so erfolgen, daß ihre Gültigkeit für jede lineare Abbildung hervortritt. Wir nehmen an, die Basisebene ε sei etwa durch die Bildpaare (Nr. 17) dreier ihrer Punkte, die in ihr liegende Basiskurve K durch ihr Bild K'', die Spitze s durch s', s'' und die schneidende Ebene ε_1 etwa auch durch die Bildpaare dreier ihrer Punkte gegeben. Dann ermittle man (nach Nr. 24) die Schnittlinie $E = [\varepsilon\varepsilon_1]$, lege ferner durch s eine beliebige Gerade X und suche (Nr. 23) deren Schnittpunkte x und x_1 mit ε und ε_1. Nach diesen vorbereitenden Konstruktionen kann die Durchführung der Aufgabe in jedem der beiden Bilder allein geschehen. In Fig. 161 wurde das zweite Bild benutzt, das wir uns jetzt als Aufriß einer beliebig im Raume liegenden Kegelfläche und schneidenden Ebene vorstellen wollen.

Um den Schnittpunkt a_1 irgend einer Erzeugenden $[sa]$ mit ε_1 zu erhalten, legen wir durch sie und X eine Ebene, ermitteln deren Schnittlinie mit ε_1 und bringen sie mit $[sa]$ zum Schnitt. Weil $[x''a'']$ die Basisspur der Ebene $[X \cdot sa]$ darstellt, ist $a_1'' = [x''a''E''x_1'' \cdot s''a'']$. Da ferner die Tangente A an K in a die Basisspur der Tangentialebene an den Kegel längs $[sa]$ ist, so wird das Bild der Tangente A_1 in a_1 an die Schnittkurve K_1 sein: $A_1'' = [A''E''a_1'']$. Den zu E'' parallelen Tangenten an K'' entsprechen ebensolche Tangenten an K_1''. (Siehe Fig. 161 in b und c; Konstruktion der Tangente in c_1 eingezeichnet.)

Lassen sich aus s'' an K'' reelle Tangenten $[s''d'']$ und $[s''e'']$ legen, so sind dies auch reelle Tangenten von K_1'', indem die Bilder der Tangenten an K_1 in den Schnittpunkten $d_1 = [sd \cdot \varepsilon_1]$, $e_1 = [se \cdot \varepsilon_1]$, wie aus obigem erhellt, mit $[s''d'']$ und $[s''e'']$ sich decken. Die Tangentenebenen längs der Kegelerzeugenden $[sd]$ und $[se]$ sind demnach projizierend. Man nennt $[s''d'']$, $[s''e'']$ den *scheinbaren*, $[sd]$, $[se]$ den *wirklichen Umriß der Kegelfläche* und kann daher sagen: *Das*

Hosted by Google

Bild jedes nicht durch die Spitze gehenden ebenen Schnittes einer Kegelfläche berührt deren scheinbaren Umriß.[1])

Die Kurve K_1 ist der Zentralriß von K aus s auf ε_1. Mithin wird (Nr. 64) jedem singulären Punkt auf K (oder K'') ein singulärer Punkt derselben Art auf K_1 (oder K_1'') entsprechen. Diese Punkte ermittelt man in erster Linie. In Fig. 161 treten nur die Wendepunkte f und g auf.

Faßt man alle Punkte von ε_1 als Zentralrisse der Punkte von ε (oder umgekehrt) aus dem Zentrum s auf oder, anders ausgedrückt, weist man je zwei auf einem Strahl durch s liegende Punkte von ε und ε_1 als einander entsprechend zu, so sieht man, daß jedem Punkte der einen Ebene ein einziger Punkt der andern Ebene und den Punkten einer Geraden der einen Ebene die Punkte einer Geraden der andern Ebene entsprechen, daß also dadurch die beiden Ebenen ε, ε_1 *kollinear* (Nr. 36) aufeinander bezogen sind. Diese zwei kollinearen ebenen Systeme befinden sich jedoch in der besondern Lage, daß die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch den festen Punkt s (das *Kollineationszentrum*) gehen und daß die entsprechenden Geraden sich auf der festen Geraden E (der *Kollineationsachse*) schneiden[2]). Man sagt von zwei kollinearen, diese beiden Bedingungen erfüllenden ebenen Systemen, gleichgültig ob sie verschiedenen Ebenen oder derselben Ebene angehören, sie befinden sich in *perspektiver Lage* oder sie sind *perspektiv-kollinear* (auch *zentrisch-kollinear*). Kollineare Systeme in derselben Ebene nennt man auch *vereinigt liegend*. Die perspektive Kollineation zweier (vereinigt oder nicht vereinigt liegenden) ebenen Systeme ist bestimmt durch die Kollineationsachse, das Kollineationszentrum und ein (auf einem Kollineationsstrahl liegendes) Paar entsprechender Punkte. Denn man kann dann zu jedem Punkt des einen Systems (analog wie in Nr. 38) den entsprechenden des andern unmittelbar finden.

Die zu ε_1 parallelen Geraden durch s gehören der Ebene $[s \| \varepsilon_1]$ an, schneiden mithin ε in einer Geraden $V \| E$. Anders ausgedrückt, der unendlichfernen Geraden V_1 von ε_1 entspricht in ε im allgemeinen eine endlichferne zu E parallele Gerade V. Analog entspricht der unendlichfernen Geraden U von ε eine endlichferne Gerade $U_1 \| E$ in ε_1. Man nennt V und U_1 die *Gegenachsen* der kollinearen Systeme ε bzw. ε_1 und erkennt unmittelbar, daß $\overline{Vs} = \overline{EU_1}$ ist. Der Parallelis-

1) Ist K algebraisch und lassen sich aus s'' keine reellen Tangenten an K'' legen, so besteht der scheinbare Umriß aus Paaren konjugiert imaginärer Geraden. Ist die schneidende Ebene projizierend, so besteht das Bild des Schnittes aus einer oder mehreren doppelt oder mehrfach überdeckten Strecken, die man als unendlich schmale, den scheinbaren Umriß berührende Kurven auffassen kann (vgl. etwa Fig. 145—147 oder Fig. 168 a, b, c).

2) Die eine Tatsache ist übrigens eine Folge der andern.

Hosted by Google

mus von V und U_1 mit E stimmt damit überein, daß sich V und V_1 sowie U und U_1 als entsprechende Gerade von ε und ε_1 auf E schneiden sollen. Parallelen Geraden in ε oder ε_1 entsprechen demnach in ε_1 bzw. ε Gerade, die durch einen Punkt von U_1 bzw. von V gehen und umgekehrt.

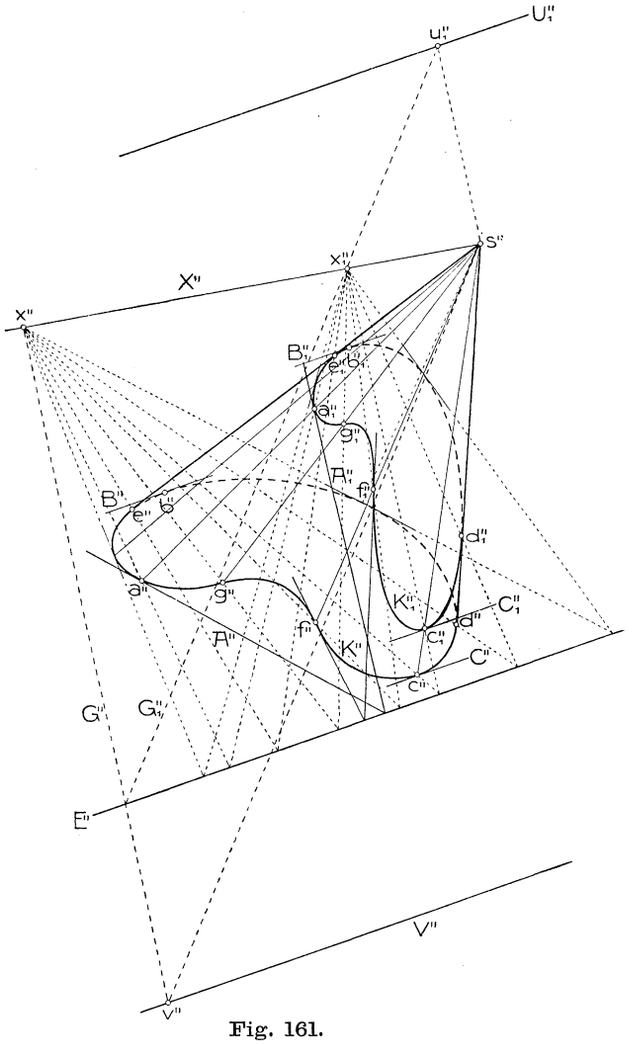


Fig. 161.

Man erkennt nun auch unmittelbar, daß die Bilder ε'', ε_1'' der beiden (nicht projizierend vorausgesetzten) Systeme ε, ε_1 kollinear verwandte Figuren sind. Denn irgend einem Punkte p'' von ε'' entspricht ein Punkt p in ε, diesem ein Punkt p_1 in ε_1 und damit ein Punkt p_1'' in ε_1'' und umgekehrt. Ferner entsprechen den Punkten einer Geraden in ε'' oder ε_1'' die Punkte einer Geraden in ε_1'' oder ε''. Da ferner entsprechende Punkte $a''a_1''$, $b''b_1''$,... Strahlen durch s'' angehören und entsprechende Gerade $A''A_1''$, $B''B_1''$, ... sich auf E'' schneiden, so bilden ε'' und ε_1'' zwei *perspektiv-* oder *zentrisch-kollineare* Systeme in der Bildebene mit s'' als *Kollineationszentrum*[1]) und E'' als *Kollineationsachse*. In dieser durch E'', s'', x'' und x_1'' bestimmten zentrischen Kollineation in der Zeichenebene entsprechen, auch wenn man von jeder räumlichen Bedeutung absieht, den unendlichfernen Geraden U'' und V_1''

1) Diese und die folgenden Namen rühren von *L. J. Magnus*, Sammlung von Aufg. u. Lehrsätzen a. d. analyt. Geom., Berlin 1833, S. 43—45, her.

Hosted by Google

von ε'' bzw. ε_1'' im allgemeinen endlichferne Gerade U_1'' und V'' in ε_1'' bzw. ε'', die zu E'' parallel sind, da sich die entsprechenden Geraden U'', U_1'' und V'', V_1'' auf E'' schneiden müssen. Man findet in Fig. 161 diese *Gegenachsen* V'' und U_1'' von ε'' bzw. ε_1'', wenn man durch x'' und x_1'' irgend zwei entsprechende (d. h. auf E'' sich schneidende) Gerade G'', G_1'' legt und die Punkte $v'' = [s'' \| G_1'' \cdot G'']$ und $u_1'' = [s'' \| G'' \cdot G_1'']$ aufsucht. Sie gehören, als entsprechende Punkte zu den unendlichfernen Punkten von G_1'' und G'', den Geraden V'' und U_1'' an. Daraus folgert man den

Satz 1: *In zwei perspektiv-kollinearen Systemen derselben Ebene ist der Abstand des Kollineationszentrums von der einen Gegenachse entgegengesetzt gleich dem Abstand der Kollineationsachse von der andern Gegenachse.*

Kollineationszentrum und Kollineationsachse liegen also entweder beide innerhalb oder beide außerhalb des von den Gegenachsen begrenzten Streifens. In besondern Fällen decken sich die Gegenachsen oder es liegt das Kollineationszentrum in der Kollineationsachse.

Stellt das gezeichnete zweite Bild einen Parallelriß dar, so sind V'' und U_1'' die Bilder der Gegenachsen von ε und ε_1; dies gilt jedoch nicht mehr, wenn das Bild einen Zentralriß darstellt.

Fällt s'' ins Unendliche, hat man es also mit einem Parallelriß eines Zylinders oder mit einem Zentralriß eines Kegels zu tun, dessen Spitze in der Verschwindungsebene (Nr. 20) liegt, so fallen die Gegenachsen mit der unendlichfernen Geraden der Bildebene zusammen und die perspektive Kollineation geht in eine perspektive Affinität über. Die Konstruktion des ebenen Schnittes bleibt dieselbe wie oben (vgl. Fig. 167).

Die perspektive Kollineation ist in Fig. 161 durch E'', s'', x'' und x_1'' bestimmt. Die Konstruktion des ebenen Schnittes im zweiten Bilde kommt auf die Ermittlung der K'' in dieser Kollineation entsprechenden Kurve K_1'' hinaus. Umgekehrt können zwei zentrisch-kollineare Kurven K'' und K_1'' (allgemeiner: Systeme) in der Zeichenebene als lineares Bild zweier ebenen Schnitte einer Kegelfläche (allgemeiner: zweier perspektiven ebenen Systeme im Raume) angesehen werden. Aus den Grundeigenschaften der Kollineation folgt sofort (vgl. Nr. 64), *daß zwei zentrisch-kollineare algebraische Kurven derselben Ebene gleiche Ordnung und Klasse haben.* Einem reellen Schnittpunkt von K'' mit der Gegenachse V'' entspricht ein reeller unendlichferner Punkt in K_1'', der Tangente in jenem Punkt eine Asymptote von K_1''. Wird V'' von K'' berührt, so berührt K_1'' die unendlichferne Gerade der Zeichenebene.

90. Ebene Schnitte beliebiger Kegel- und Zylinderflächen zweiter Ordnung. Wählt man eine Kurve zweiter Ordnung als

Hosted by Google

Basiskurve eines Kegels, so ist dieser selbst von der zweiten Ordnung. Es gibt jedoch nicht, wie man zuerst vermuten könnte, nach der Art der Basiskurve einen elliptischen, hyperbolischen und parabolischen Kegel zweiter Ordnung. Denn nach dem verallgemeinerten Satz 1 in Nr. 81 (Fußnote dazu) kann jeder dieser Kegel sowohl nach Ellipsen, als Hyperbeln und Parabeln geschnitten, mithin für jeden etwa eine Ellipse als Basiskurve gewählt werden. Es sei hierzu noch ohne Beweis[1]) erwähnt, daß jeder solche Kegel sich auch nach Kreisen schneiden läßt, *mithin der schiefe Kreiskegel schon die allgemeinste Form eines Kegels zweiter Ordnung vorstellt.*

Ist nun der Kegel in einer linearen Abbildung (etwa in zwei zugeordneten Normalrissen) durch die Bilder der Basiskurve und der Spitze, ferner die schneidende Ebene ε_1 gegeben, so ermittle man wie in Nr. 89 die Schnittlinie E von ε_1 mit der Basisebene ε und die Schnittpunkte x, x_1 eines beliebig durch s gelegten Strahles mit ε und ε_1. Das zweite Bild der Schnittkurve K_1 z. B. entspricht dann der Kurve K'' in der zentrischen Kollineation, die E'' als Kollineationsachse, s'' als Kollineationszentrum und x'', x_1'' als ein Paar zugeordneter Punkte bestimmen. Suchen wir, wie oben gezeigt, noch die Gegenachse V'' des Systems ε'' der Kurve K'', so wird K_1'' eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel sein, jenachdem K'' diese Gegenachse nicht (reell) schneidet, schneidet oder berührt.

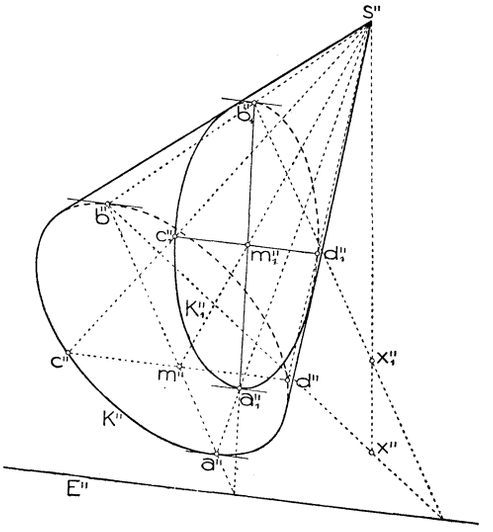


Fig. 162.

Fig. 162 stellt im zweiten Bilde den Fall dar, in dem K_1'' eine *Ellipse* wird.[2]) Wir trachten, zwei konjugierte Durchmesser von K_1'' zu erhalten. Legen wir an K'' parallel zu E'' die in a'' und b'' berührenden Tangenten, so sind die mit Hilfe von x'', x_1'' konstruierbaren entsprechenden Punkte a_1'', b_1'' die Endpunkte eines Durchmessers von K_1''. Denn die Tangenten in a_1'', b_1'' an K_1'' entsprechen den zur Kollineationsachse parallelen Tangenten in a'', b'', sind also zu E'' und mithin untereinander parallel. Der zu $a_1''b_1''$ konjugierte Durchmesser $c_1''d_1''$ von K_1'' geht durch die Mitte m_1'' von $a_1''b_1''$

1) Vgl. etwa *Rohn-Papperitz*, Lehrb. d. darst. Geometrie, 3. Aufl., Leipzig 1906, 3. Bd., Nr. 204—207.

2) Es sei hierzu für später bemerkt, daß im Falle einer zentralen Abbildung K_1 trotzdem auch eine Hyperbel oder Parabel sein kann.

Hosted by Google

parallel zu E''. Suchen wir den m_1'' entsprechenden Punkt $m'' = [a''b'' \cdot s''m_1'']$, so ist $[m'' \| E'']$ die $[c_1''d_1'']$ im System ε'' entsprechende Gerade. Ihren Schnittpunkten c'', d'' mit K'' entsprechen in ε_1'' die Endpunkte $c_1'' = [m_1'' \| E'' \cdot s''c'']$, $d_1'' = [m_1'' \| E'' \cdot s''d'']$ des zu $a_1''b_1''$ konjugierten Durchmessers von K_1''. Aus diesem Paare konjugierter Durchmesser lassen sich (Nr. 78) die Achsen von K_1'' finden und damit die Kurve genau zeichnen. Als Kontrolle diene, daß K_1'' den scheinbaren Kegelumriß berühren muß.

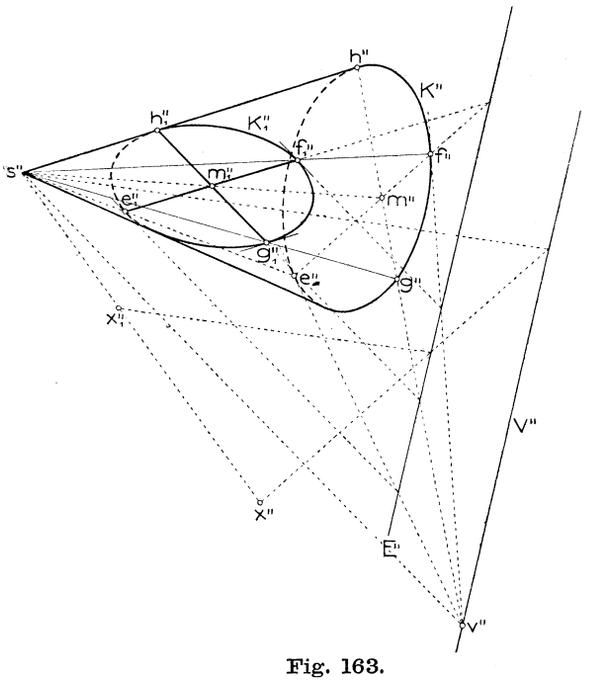


Fig. 163.

Sollte diese Konstruktion zu ungenauen Ergebnissen führen, etwa wegen des Auftretens sehr schleifender Schnitte von Geraden, so verwende man die folgende allgemeine Methode (Fig. 163). Statt wie vorher aus dem unendlichfernen Punkt von V'' lege man aus einem beliebigen Punkt v'' dieser nach Nr. 89 konstruierten Gegenachse die Tangenten $[v''e'']$, $[v''f'']$ an K''. Da auch ihnen parallele Tangenten von K_1'' entsprechen (Nr. 89), so werden die den Berührungspunkten e'', f'' entsprechenden Punkte $e_1'' = [v''e''E'' \cdot \| s''v'' \cdot s''e'']$ und $f_1'' = [v''f''E'' \cdot \| s''v'' \cdot s''f'']$ Endpunkte eines Durchmessers von K_1'' sein. Die Tangenten in diesen Punkten, mithin auch der zu $[e_1''f_1'']$ konjugierte Durchmesser sind zu $[s''v'']$ parallel. Zieht man also durch die Mitte m_1'' von $e_1''f_1''$ die Parallele zu $[s''v'']$ und sucht ihre durch v'' und den Schnittpunkt mit E'' gehende zugehörige Gerade in ε'', so entsprechen deren Schnittpunkten g'', h'' mit K'' in K_1'' die Endpunkte g_1'', h_1'' des zu $[e_1''f_1'']$ konjugierten Durchmessers. (In Fig. 163 kommt h_1'' zufällig in den scheinbaren Umriß zu liegen.)

Der dem Mittelpunkt m_1'' von K_1'' im System ε'' entsprechende Punkt m'' muß der Pol von V'' bezüglich K'' sein, da m_1'' der Pol der unendlichfernen Geraden von ε_1'' bezüglich K_1'' ist (Nr. 85, Satz 2);

Hosted by Google

m'' kann daher auch auf verschiedene Arten unmittelbar gefunden und daraus m_1'' als entsprechender Punkt in ε_1'' erhalten werden.

Stellen die Figuren 162 und 163 Parallelrisse dar, so ersieht man unmittelbar, wie sich die angeführten Konstruktionen räumlich erklären lassen.

Im Falle K'' die bereits konstruiert gedachte Gegenachse V'' in zwei reellen Punkten p'', q'' schneidet (Fig. 164), ist K_1'' eine *Hyperbel.* Legt man in p'', q'' die Tangenten P'', Q'' an K'', so sind ihre entsprechenden Geraden $P_1'' = [P''E'' \cdot \| s''p'']$, $Q_1'' = [Q''E'' \cdot \| s''q'']$ die Asymptoten und deren Schnittpunkt m_1'' ist der Mittelpunkt von K_1''. Er entspricht dem Punkte $m'' = [P''Q'']$ (Pol von V'' bezüglich K''), muß daher auch $[s''m'']$ angehören. Die Halbierungslinien von $\widehat{P_1''Q_1''}$ bilden die Achsen von K_1''; treffen sie E'' in e'' und f'', so sind $[m''e'']$ und $[m''f'']$ ihre entsprechenden Geraden in ε'', von denen eine (in Fig. 164 $[m''e'']$) K'' in reellen Punkten a'', b'' schneiden muß. Die ihnen in ε_1'' entsprechenden Punkte $a_1'' = [m_1''e'' \cdot s''a'']$, $b_1'' = [m_1''e'' \cdot s''b'']$ sind die Endpunkte der reellen Achse von K_1''. Aus den Asymptoten und der reellen Achse lassen sich beliebig viele Kurvenpunkte (etwa nach Nr. 86, Fig. 155) sowie die Scheitelkrümmungskreise (Fig. 156) finden. In Fig. 164 wurde bloß der auf einem Kegelmantel verlaufende Hyperbelast eingezeichnet.

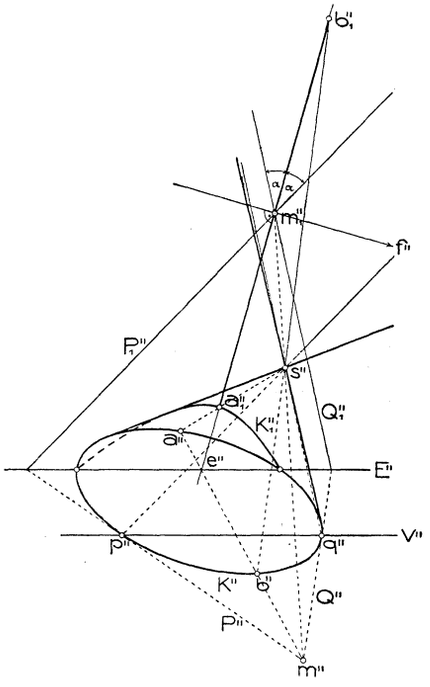


Fig. 164.

Berührt endlich K'' die Gegenachse V'' in b'' (Fig. 165), so wird K_1'' eine *Parabel* mit zu $[s''b'']$ parallelen Durchmessern (b_1'' unendlichferner Punkt von K_1''). Um zum Scheitel der Parabel zu gelangen, benutzen wir die Eigenschaft, daß seine Tangente zur Durchmesserrichtung senkrecht steht (Nr. 87). Allen zu $[s''b'']$ senkrechten Geraden des Systems ε_1'' entsprechen in ε'' Gerade, die durch den Punkt $t'' = [s'' \mid s''b'' \cdot V'']$ gehen. Zieht man also aus t'' die zweite Tangente an K'' und sucht zum Berührungspunkt a'' den entsprechenden Punkt $a_1'' = [t''a''E'' \cdot \| s''t'' \cdot s''a'']$, so ist dies der Scheitel, mithin $[a_1'' \| s''b'']$ die Achse und die schon gezogene Gerade $[a_1'' \| s''t'']$ die Scheiteltangente von K_1''. Die Umrißerzeugenden des Kegels

Hosted by Google

sind auch Tangenten von K_1''. Errichtet man daher auf einer dieser Erzeugenden in ihrem Schnitt mit der Scheiteltangente das Lot, so schneidet es (Nr. 87, Satz 2) die Achse von K_1'' im Brennpunkte f.

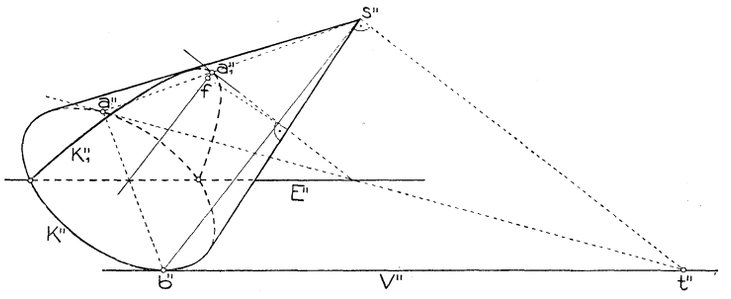


Fig. 165.

Wären die Umrißerzeugenden imaginär, so müßte man irgend eine andre Tangente von K_1'' (kollinear entsprechende Gerade zu einer Tangente von K'') benutzen. Aus Scheitel und Brennpunkt ist K_1'' konstruierbar.

Während bei den Kegeln zweiter Ordnung die Art der Leitkurve keine besondre Art der Fläche bewirkte, müssen bei den Zylindern zweiter Ordnung (Kegeln zweiter Ordnung mit unendlichferner Spitze) Unterscheidungen gemacht werden. Jenachdem nämlich die Leitlinie des Zylinders eine Ellipse (Kreis), Hyperbel oder Parabel ist, hat er

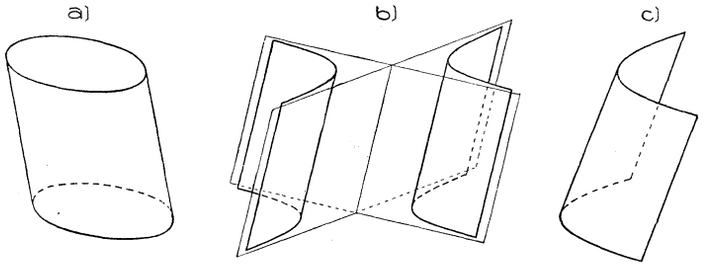


Fig. 166 a—c.

mit der unendlichfernen Ebene keine reellen, zwei reelle getrennte oder zwei zusammenfallende Erzeugende gemeinsam; jede nicht zu den Erzeugenden parallele Ebene schneidet ihn daher im ersten Fall nach einer Kurve mit imaginären unendlichfernen Punkten, also nach einer Ellipse, im zweiten Fall nach einer Hyperbel und im dritten Fall nach einer Parabel. Es gibt daher drei Arten von Zylindern zweiter Ordnung, *elliptische*, *hyperbolische* und *parabolische* (Fig. 166 a, b, c). Von einem elliptischen Zylinder wurde (Nr. 79, Satz 2) gezeigt, daß er sich nach Kreisen schneiden läßt, also mit dem schiefen

Hosted by Google

Kreiszylinder identisch ist. Der hyperbolische Zylinder besitzt zwei *Asymptotenebenen*, die Tangentialebenen längs der unendlichfernen Erzeugenden.

Soll ein ebener Schnitt eines durch zwei Normalrisse (allgemeiner: Parallelrisse) gegebenen elliptischen Zylinders ermittelt werden, so suche man wieder die Schnittlinie E der schneidenden Ebene ε_1 mit der Basisebene ε und die Schnittpunkte x, x_1 einer zu den Erzeugenden parallelen Geraden mit ε und ε_1. Die weitere Konstruktion kann dann in jedem der beiden Risse allein durchgeführt werden; Fig. 167 zeigt sie für den zweiten Riß. Die Basiskurve K'' und die Schnittkurve K_1'' sind perspektivaffin mit E'' als Affinitätsachse und x'', x_1'' als zwei entsprechenden Punkten. Entspricht dem Mittelpunkt m'' von K'' der Punkt m_1'' $(= [x''m''E''x_1'' \cdot m'' \| x''x_1'']),$ so hat man bloß zu zwei konjugierten Durchmessern $a''b''$, $c''d''$ von K'' die entsprechenden Strecken $a_1''b_1''$, $c_1''d_1''$ in ε_1'' aufzusuchen; sie sind konjugierte Durchmesser von K_1''. Insbesondre kann man zur Ersparung von Linien den einen Durchmesser von K'' in $[x''m'']$ oder $\| E''$ oder $\| [x''x_1'']$ wählen.

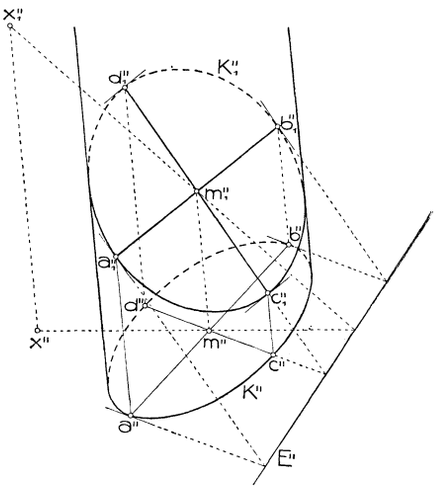


Fig. 167.

91. Ebene Schnitte von Drehkegeln und Drehzylindern in besondern Lagen. Die in Nr. 90 dargelegten allgemeinen Methoden sind natürlich in Sonderfällen ebenfalls anwendbar und führen zu ziemlich einfachen Lösungen. Es sollen jedoch für ebene Schnitte von Drehkegeln, deren Achsen zu einer Rißebene senkrecht stehen, davon unabhängige, noch etwas einfachere Konstruktionen gezeigt und einige später zur Verwendung kommende Bemerkungen daran geknüpft werden.

Wir nehmen zuerst an, die Schnittebene ε_1 stehe auf jener Rißebene senkrecht, zu der die Kegelachse parallel läuft. In den Figuren 168 a, b, c z. B. steht die Achse des im Auf- und Grundriß gegebenen Drehkegels (mit der Basis K und der Spitze s) zu Π_1, ε_1 zu Π_2 senkrecht und diese Ebene schneidet bezüglich nach einer Ellipse, Hyperbel und Parabel. Alle drei Fälle lassen sich gemeinsam betrachten.

Die Symmetrieebene der Schnittkurve K_1, $\sigma = [s \| \Pi_2]$, schneidet

Hosted by Google

den Kegel in den Umrißerzeugenden A und B, die die Endpunkte a und b (bei der Parabel einer unendlichfern) der Hauptachse von K_1 enthalten. Schreibt man dem Kegel eine beliebige Kugel ein und projiziert die Endpunkte 1 und 2 ihres zu ε_1 senkrechten Durchmessers aus s auf ε_1, so sind diese Projektionen (Nr. 81, Satz 2) die Brennpunkte f_1, f_2 des Schnittes. (Bei der Parabel f_2 unendlichfern.)

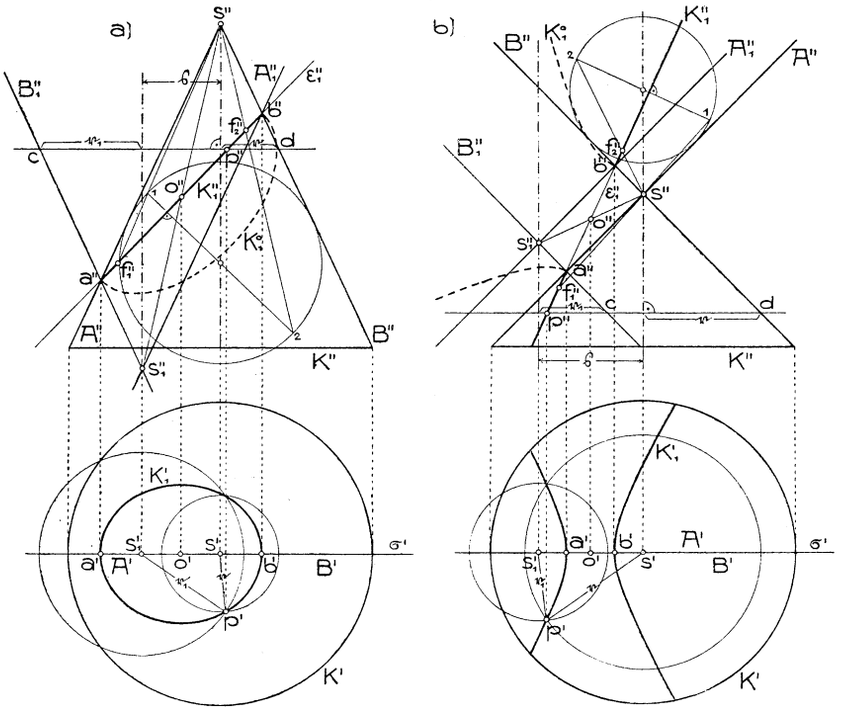


Fig. 168 a, b.

Seine Gestalt $K_1^{\,o}$ läßt sich daher sofort in allen drei Fällen zeichnen; die Figuren 168 enthalten bloß die Hälften von $K_1^{\,o}$. Der Grundriß von K_1 hat, wegen der Symmetrie bezüglich σ, $a'b'$ zur Achse bzw. in Fig. 168 c den Punkt a' zum Scheitel. Ferner wollen wir zeigen, *daß der Grundriß s' der Spitze ein Brennpunkt von K_1' ist.*

Legen wir nämlich im Falle eines Ellipsen- oder Hyperbelschnittes (Fig. 168 a, b) durch a und b die Geraden $B_1 \| B$ bzw. $A_1 \| A$ und betrachten sie als Erzeugende eines zweiten Drehkegels mit lotrechter Achse, dessen Spitze $s_1 = [A_1 B_1]$ sein wird, so ist dieser Kegel bezüglich der Mitte o von ab zu dem gegebenen Kegel zentrisch-symmetrisch; denn weil die in σ liegenden Erzeugenden beider Kegel bezüglich o zentrisch-symmetrisch sind, so entspricht jedem Kreis auf

Hosted by Google

dem einen Kegel ein bezüglich o zentrisch-symmetrischer Kreis auf dem andern Kegel. Da außerdem o Zentrum von K_1 ist, diese Kurve also in der erwähnten Symmetrie sich selbst entspricht, so gehört sie auch dem zweiten Kegel an. Legen wir ferner durch irgend einen Punkt p von K_1 die zu den Kegelachsen normale Ebene, so schneidet sie die Kegel in Kreisen von den Radien $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_1$, sodaß $\overline{s'p'} = \mathfrak{r}$ und $\overline{s_1'p'} = \mathfrak{r}_1$ ist, und die Parallelen B_1, B in den Punkten c, d. Nun sieht man aus den Aufrissen der Fig. 168 a, b, wenn $\mathfrak{s}$ den Abstand der Kegelachsen bezeichnet, daß im Fall

a)	b)
$\overline{cd} = \mathfrak{r} + \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{s}$	$\overline{cd} + \mathfrak{r}_1 = \mathfrak{s} + \mathfrak{r}$
oder	oder
$\mathfrak{r} + \mathfrak{r}_1 = \overline{cd} - \mathfrak{s}$	$\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1 = \overline{cd} - \mathfrak{s}$

ist. Weil $\overline{cd}$ als horizontal gemessene Entfernung zwischen B'' und B_1 für alle Punkte von K_1'' dieselbe Länge hat, bleiben auch die linken Seiten der beiden letzten Gleichungen konstant; der Punkt p' gehört also einer Ellipse bzw. Hyperbel mit den Brennpunkten s' und s_1' an.

Im Falle des Parabelschnittes (Fig. 168 c) legen wir durch irgend einen Punkt p von K_1 auf dem Kegel den zur Basis parallelen Kreis vom Halbmesser $\mathfrak{r}$; sein Grundriß geht durch p'. Im Aufriß dieses Kreises ist der Schnittpunkt d mit A'' zu p'' bezüglich der Parallelen zur Kegelachse durch a'' symmetrisch. Die zur Kegelachse bezüglich derselben Geraden symmetrische Gerade (durch n) hat daher von p'' ebenfalls die Entfernung $\mathfrak{r}$. Ziehen wir also im Grundriß die Gerade $S' \perp A'$ durch den zu s' bezüglich a' symmetrischen Punkt, so hat p' von S' dieselbe Entfernung wie von s', d. h. p' gehört der Parabel mit dem Brennpunkt s' und der Leitlinie S' an.

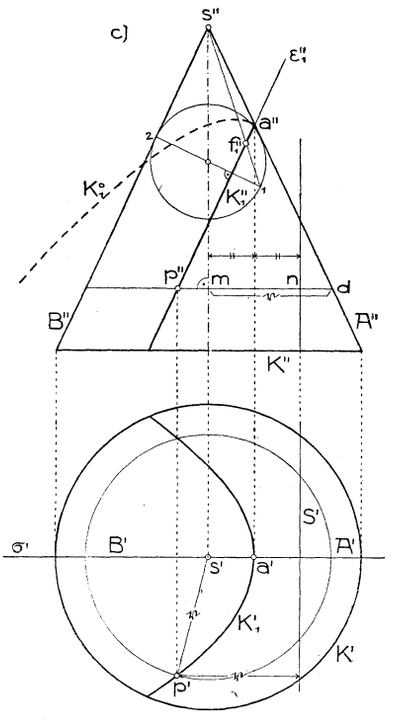


Fig. 168 c.

Da bei einer Drehung der obigen Figuren um die Kegelachsen der Grundriß seine Gestalt nicht ändert, so können wir gleich den allgemeineren Satz aussprechen:

Hosted by Google

Satz 1: *Der Normalriß jedes ebenen Schnittes eines Drehkegels auf eine zur Kegelachse senkrechte Ebene hat den Riß der Kegelspitze zum Brennpunkt.*

Zufolge dieses Satzes kennt man von K_1' außer den Scheiteln der Hauptachse auch einen Brennpunkt; die Kurve läßt sich also sofort zeichnen.

Soll ein Drehkegel mit zu Π_1 normaler Achse durch eine beliebige Ebene ε geschnitten werden, so führe man mittels eines Seitenrisses auf eine durch die Kegelachse normal zu ε gelegte Ebene Π_3 den Fall auf den früheren zurück. Der Grundriß der Schnittkurve K ergibt sich nun wie oben; der Aufriß kann daraus nach Nr. 79, 86 oder 87 konstruiert werden.

Anmerkung. Die Aufrisse sämtlicher ebenen Schnitte eines Drehkegels mit zu Π_2 paralleler Achse berühren die Umrißerzeugenden; umgekehrt bildet jede die Umrißerzeugenden berührende Kurve zweiter Ordnung den Aufriß zweier ebenen Schnitte dieses Kegels, weil der projizierende Zylinder durch die Kurve den Kegel in zwei Punkten berührt (vgl. Nr. 98, Satz 1). Da jeder Punkt in Π_2 Aufriß von zwei Punkten des Kegels ist, so gehen durch drei Punkte in Π_2 die Aufrisse von vier ebenen Schnitten des Kegels. Durch die drei zugehörigen Punktepaare des Kegels lassen sich nämlich acht ebene Schnitte legen. Denkt man sich jedoch die Kegelachse in Π_2, so sind je zwei dieser Schnitte bezüglich Π_2 symmetrisch, decken sich also im Aufriß. Da zwei beliebige Gerade der Zeichenebene als scheinbarer Umriß eines Drehkegels (bzw. Drehzylinders) betrachtet werden können, dessen Achse Π_2 angehört, so läßt sich mittels ebener Schnitte dieses Kegels die Aufgabe lösen:

Jene Kurven zweiter Ordnung zu zeichnen, die durch drei gegebene Punkte gehen und zwei gegebene Gerade berühren.

Für eine zur Symmetrieebene Σ_{12} oder Koinzidenzebene Γ_{12} parallele Ebene ε sind Auf- und Grundriß der Schnittfigur zueinander kongruent (Nr. 38, S. 76), welche Lage gegen die Rißebenen auch der Kegel besitzt.

Für Drehzylinder, deren Erzeugende zu einer Rißebene, z. B. zu Π_1, senkrecht stehen, vereinfacht sich die Konstruktion des Schnittes K mit einer Ebene ε, weil K' schon als Kreis gegeben ist. Die Achsen der Ellipse K stellen sich im Grundriß als die zu den ersten Haupt- und Fallinien von ε parallelen Durchmesser von K' dar; ihre Aufrisse sind konjugierte Durchmesser von K''. Man erhält aber auch die Achsen von K'' direkt, wenn man mittels der Achse der zwischen Auf- und Grundriß von ε bestehenden perspektiven Affinität (nach Nr. 39) jene normalen Durchmesser von K' aufsucht, die sich im Aufriß wieder als normale Strecken (die Achsen von K'') darstellen.

Steht der Drehzylinder zu Π_1 senkrecht und ist ε parallel zu Σ_{12} oder Γ_{12}, so wird K'', als kongruente Figur zu K', ein Kreis,

Hosted by Google

der seine Mitte im Aufriß des Schnittpunktes der Zylinderachse mit ε hat. Wenn man mit Π_i und Π_k irgend zwei zueinander normale Rißebenen bezeichnet, so läßt sich der Satz aussprechen:

Satz 2: *Der Schnitt eines zu Π_i normalen Drehzylinders mit einer zu Σ_{ik} oder Γ_{ik} parallelen Ebene erscheint im Normalriß auf Π_k als Kreis.*[1])

92. Allgemeines über die Eigen- und Schlagschattengrenzen krummer Flächen. Nach den allgemeinen Erörterungen in Nr. 31 haben wir die folgende geometrische Definition der Eigenschattengrenze einer krummen Fläche Φ:

Die Eigenschattengrenze einer krummen Fläche besteht aus allen Flächenpunkten, in denen der hindurchgehende Lichtstrahl die Fläche berührt oder, was dasselbe aussagt, deren Tangentenebenen zur Lichtrichtung parallel sind (allgemeiner: durch die Lichtquelle gehen).

Die durch die Punkte der Eigenschattengrenze gehenden Lichtstrahlen bilden einen (mitunter aus mehreren getrennten Teilen bestehenden) Zylinder, der Φ längs der Eigenschattengrenze berührt und der *der Fläche umschriebene Lichtzylinder* heißen soll. Sein Schnitt mit einer zweiten Fläche (oder einer Ebene) gibt (Nr. 31) den Schlagschatten der ersten Fläche auf die zweite.

Betrachtet man die Projektionsstrahlen als Lichtstrahlen, so heißt die zugehörige Eigenschattengrenze der Fläche Φ ihr *wirklicher oder wahrer Umriß* und dessen entsprechender Riß oder der Schlagschatten von Φ auf die Rißebene der *scheinbare Umriß* der Fläche. Statt Umriß ist auch das Wort *Kontur* gebräuchlich. Jener Teil des wirklichen Umrisses, in dessen Punkten die auffallenden Projektionsstrahlen die Fläche zum ersten Mal treffen, bildet die Grenze zwischen dem sichtbaren und unsichtbaren Teil der Fläche, der zugehörige scheinbare Umriß die Grenze des Bildes der Fläche.

Lassen sich nicht unmittelbar zur Lichtrichtung parallele Tangentenebenen an die gegebene Fläche legen, so folgen doch aus der obigen Definition der Eigenschattengrenze sofort zwei Methoden zu ihrer Konstruktion.

1. Methode ebener Schnitte. Wir setzen voraus, es sei für die Fläche Φ ein solches Entstehungsgesetz gegeben, daß beliebige ebene Schnitte konstruiert werden können. Schneidet man nun (Fig. 169) Φ durch Ebenen parallel zur Lichtrichtung L und legt an die Schnitt-

1) Allgemeiner lautet dieser Satz: *Der Schnitt eines beliebigen zu Π_i senkrechten Zylinders mit einer zu Σ_{ik} oder Γ_{ik} parallelen Ebene stellt sich im Π_k-Riss als eine zum Π_i-Riß des Zylinders kongruente Figur dar.*

Hosted by Google

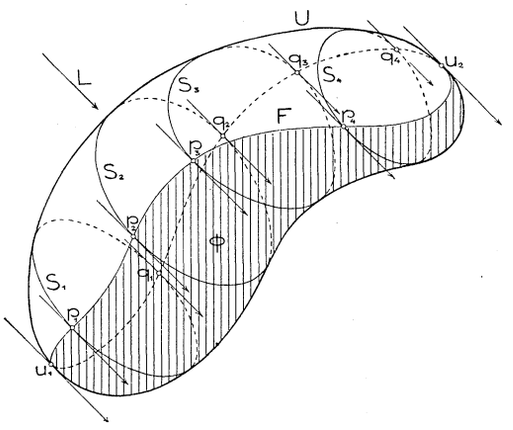


Fig. 169.

kurven $S_1, S_2, \ldots$ die zu L parallelen Tangenten, so gehören die Berührungspunkte $p_1 q_1$, $p_2 q_2$, ... der Eigenschattengrenze F an.

2. Methode ein- oder umgeschriebener Hilfsflächen. Man umschreibt Φ eine Fläche Φ_1, deren Eigenschattengrenze man zu konstruieren vermag. Berühren sich Φ und Φ_1 längs der Kurve K, so sind die Schnittpunkte der Eigenschattengrenze von Φ_1 mit K auch Punkte der Eigenschattengrenze F von Φ. Denn ist p ein solcher Schnittpunkt, so berührt der Lichtstrahl L durch p die Fläche Φ_1; da aber Φ und Φ_1 in p dieselbe Tangentialebene haben, so berührt L auch Φ in diesem Punkt, d. h. p ist ein Punkt von F.

Ferner lassen sich leicht einige sehr allgemeine Gesetze über Schattengrenzen beweisen.

Satz 1: *Wo das (parallele oder zentrale) Bild der Eigenschattengrenze einer krummen Fläche an deren scheinbaren Umriß gelangt, berührt es diesen, falls Eigenschattengrenze und wahrer Umriß sich im entsprechenden Flächenpunkt schneiden.*

Es bezeichne U den wahren Umriß und F die Eigenschattengrenze von Φ, ferner U' und F' deren Bilder (also U' den scheinbaren Umriß von Φ). Haben nun U und F einen Punkt u, also U' und F' einen Punkt u' gemein, so berühren der Lichtstrahl L und der Sehstrahl P durch u die Fläche in u; Ebene $[LP]$ ist daher die Tangentenebene von Φ in u und enthält demnach die Tangente T_1 an U und die Tangente T_2 an F. Da T_1 und T_2 einer projizierenden Ebene angehören, so fallen ihre Bilder T_1' und T_2', wenn sie gerade Linien sind, in eine Gerade zusammen, die zugleich L' ist. U' und F' berühren sich daher in u' und ihre gemeinsame Tangente ist L'. Damit ist der behauptete Satz bewiesen.

Man sieht übrigens, daß sich Satz 1 in der folgenden allgemeineren Form aussprechen läßt:

Satz 2: *Wo das Bild einer auf einer krummen Fläche verlaufenden Kurve an den scheinbaren Umriß der Fläche gelangt, berührt es diesen, falls die Kurve im Raum und der wahre Flächenumriß sich im entsprechenden Punkte schneiden.*

Hosted by Google

Denn daß die oben erwähnte Tangentenebene $[T_1 T_2]$ im Schnittpunkt u von F und U zur Lichtrichtung parallel sei, ist für den Beweis des Satzes 1 unwesentlich.

Aus dem Beweis des Satzes 1 folgt zugleich

Satz 3: *Die Umrißpunkte der Eigenschattengrenze sind im Bilde die Berührungspunkte des scheinbaren Umrisses mit tangierenden Bildern von Lichtstrahlen.*

Darnach erhält man bei gegebenem scheinbaren Umriß U' der Fläche und bei gegebener Projektion L' der Lichtrichtung die in U' liegenden Punkte des Bildes der Eigenschattengrenze, indem man die zu L' parallelen Tangenten an U' legt. (Vgl. Fig. 169—171.)

Ist umgekehrt U' und das Bild F' der an den Umriß gehenden Eigenschattengrenze gezeichnet, so geben die Tangenten in den Umrißpunkten von F' die Richtung von L' an. Auf diese Weise läßt sich in irgend einer Zeichnung das Bild der verwendeten Lichtrichtung ermitteln.

Satz 1 und 2 erleiden eine Ausnahme, wenn T_2' ein Punkt wird, F' also in u' eine Spitze besitzt (Nr. 68, Satz 3) oder aus einem doppelt (oder mehrfach) überdeckten Kurvenstück besteht. U' und F' haben dann wohl zwei benachbarte Punkte gemeinsam, berühren sich aber nicht im gewöhnlichen Sinn dieses Wortes. Wird T_1' ein Punkt, so bleibt die Berührung zwischen U' und F' in u' im allgemeinen bestehen (vgl. Nr. 131).

Auf den Fall, wenn T_1' und T_2' Punkte werden, U und F sich daher in u berühren, gehen wir seines seltenen Vorkommens wegen nicht ein.

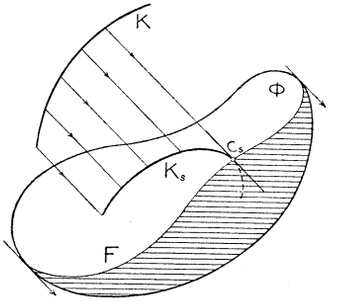


Fig. 170.

Wir nehmen jetzt an, der Schlagschatten K_s einer Kurve K auf die Fläche Φ (Fig. 170) treffe deren Eigenschattengrenze F in c_s. Da K_s die Schnittkurve des Lichtzylinders (oder Lichtkegels) durch K mit Φ ist, so erhält man (Nr. 73, Satz 3) die Tangente in c_s an K_s als Schnitt der Tangentenebenen in diesem Punkte an den Lichtzylinder und an Φ. Beide Ebenen enthalten den Lichtstrahl durch c_s, der mithin, als Schnittlinie dieser Ebenen, K_s berührt. Man hat daher den

Satz 4: *Der Schlagschatten einer Kurve auf eine krumme Fläche (für Parallel- oder Zentralbeleuchtung) wird in jedem seiner Schnittpunkte mit der Eigenschattengrenze der Fläche von dem hindurchgehenden Lichtstrahl berührt.*

Wirft irgend ein Körper auf Φ einen Schlagschatten, so ist dessen Grenze der Schlagschatten einer Linie, nämlich der Eigen-

Hosted by Google

schattengrenze des schattenwerfenden Körpers. Zufolge des Satzes 4 kann man daher sagen:

In jedem Punkt, wo eine Schlagschattengrenze auf einer krummen Fläche deren Eigenschattengrenze trifft, berührt der hindurchgehende Lichtstrahl die Schlagschattengrenze.

Diese Beziehung bleibt für die wirklichen (nicht scheinbaren) Schnittpunkte von Schlag- und Eigenschattengrenze in jeder linearen Abbildung bestehen. Sie bietet ein Mittel, um in Gemälden oder Zeichnungen die Genauigkeit der angegebenen Schatten zu prüfen.

Häufige Anwendung findet auch der folgende

Satz 5: *Schneiden sich zwei Flächen Φ und Φ_1 in einer Kurve K, die von der Eigenschattengrenze F der Fläche Φ in einem Punkte p getroffen wird, so beginnt der Schlagschatten F_s, den Φ auf Φ_1 wirft, in p und berührt in diesem Punkte K.*

Denn die Tangente an F_s in p (Fig. 171) ist (Nr. 73, Satz 3) die Schnittlinie der Tangentenebene τ_1 an Φ_1 mit der Tangentenebene τ an den Lichtzylinder durch F. Da p der Eigenschattengrenze von Φ angehört, ist τ zugleich Tangentenebene an Φ, daher $[\tau\tau_1]$ die Tangente von K im Punkte p.

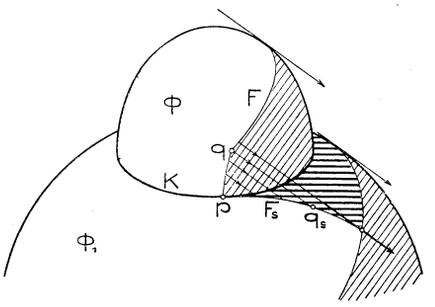


Fig. 171.

Die Berührung zwischen K und F_s in p wird durch Projektion nicht zerstört.

Häufige Verstöße findet man gegen den folgenden

Satz 6: *Ist die Eigenschattengrenze F einer Fläche Φ in einem Punkte q bezüglich der Tangente unstetig, so ist ihr Schlagschatten F_s auf eine andre Fläche Φ_1 im Punkte q_s trotzdem bezüglich der Tangente (im allgemeinen) stetig.*

Die beiden Tangenten an F im Punkte q (vgl. Fig. 171) haben nämlich die Tangentenebene des Punktes q zur gemeinsamen Lichtebene; ihre Schlagschatten auf die Tangentenebene an Φ_1 in q_s fallen also in eine Gerade zusammen. Mithin besitzt F_s in q_s nur eine Tangente.

93. Konstruktion der Eigenschattengrenze von Kegelflächen. Wir setzen in der Folge, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil vermerkt ist, stets Parallelbeleuchtung voraus.

Da jede Tangentenebene eines Kegels (oder Zylinders) diesen längs einer Erzeugenden berührt (Nr. 73, Satz 2), besteht die Eigen-

Hosted by Google

schattengrenze eines Kegels aus jenen Erzeugenden, deren Tangentenebenen zur Lichtrichtung parallel sind. Diese Ebenen enthalten den Lichtstrahl $[s \parallel L]$ durch die Kegelspitze s, ihre Spuren auf der Basisebene β des Kegels enthalten daher den Schnitt s_s dieses Lichtstrahls mit β, d. h. den (vorkommendenfalls uneigentlichen) Schatten der Spitze auf die Basisebene. Da diese Spuren (Nr. 73, Satz 4) zugleich die Basiskurve B berühren, so hat man die Regel:

Um die Eigenschattengrenze eines Kegels zu erhalten, suche man den Schatten der Spitze auf die Basisebene, lege aus diesem Punkt an die Basis die Tangenten und verbinde deren Berührungspunkte mit der Spitze.

Figur 172 zeigt diese Konstruktion für einen beliebigen Kegel in einem Bilde. Natürlich muß vorerst $s_s = [s \parallel L \cdot \beta]$, wenn s und B, mithin auch β, durch zwei Bilder gegeben sind, nach Nr. 23 ermittelt werden. Die aus s_s an B gelegten Tangenten T_1, T_2, T_3 und die Schlagschatten der Randerzeugenden begrenzen den *Schlagschatten* des Kegels auf die Basisebene. Lassen sich aus s_s keine reellen Tangenten an B legen, so ist die eine Seite des Kegels ganz beleuchtet; gehört s_s der Kurve B an, so wird ein Teil des Eigenschattens unendlich schmal.

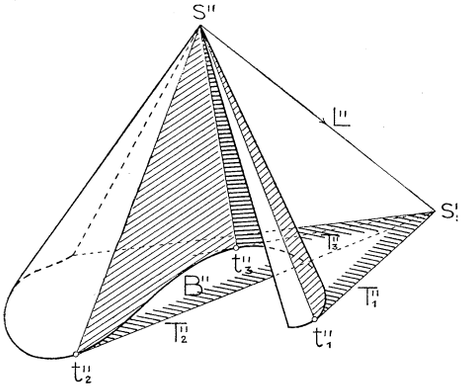


Fig. 172.

Es sei nochmals erwähnt, daß die aus s'' an B'' gelegten Tangenten den scheinbaren Umriß des Kegels in dem gezeichneten Bilde geben (Nr. 89 und 92); dieser Umriß kann ganz imaginär ausfallen.

Im technischen Zeichnen treten am häufigsten Drehkegel mit zu einer Rißebene senkrechten Achsen auf. Soll z. B. an einem im Aufriß gezeichneten Drehkegel mit zu Π_1 normaler Achse der Eigenschatten konstruiert werden, so lege man zur Vereinfachung der Konstruktion, vorerst wenigstens zur Raumersparnis, den Grundriß des Kegels, wie es Fig. 173a zeigt, in den Aufriß hinein (d. h. drehe den Basiskreis B um seinen zu Π_2 parallelen Durchmesser zu Π_2 parallel) und verfahre wie im allgemeinen Fall. Unter Voraussetzung von 45°-Beleuchtung (vgl. Fig. 173a) liegt bei obiger Anordnung s_s' auf gleicher Höhe mit s'' im Grundriß des Lichtstrahles durch s. Diese Vereinfachung ist auch bei der Ermittlung der sichtbaren Eigenschattengrenze eines Drehkegels mit nach abwärts gerichteter Spitze in Fig. 173b verwendet worden.

Hosted by Google

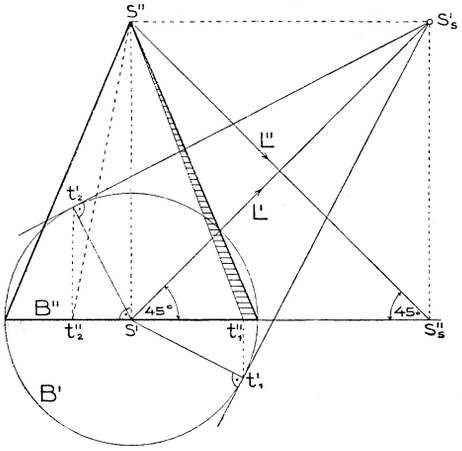


Fig. 173 a.

Es sei noch erwähnt, daß unter Voraussetzung technischer Beleuchtung die Größe des sichtbaren

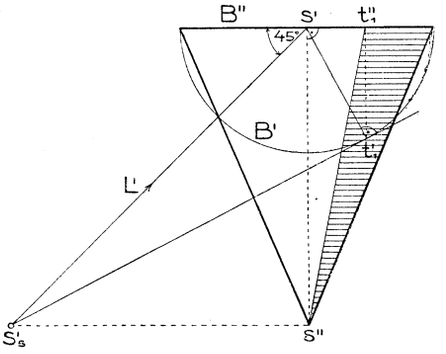


Fig. 173 b.

Eigenschattens des Kegels mit wachsender Öffnung in Fig. 173 a ab-, in Fig. 173 b zunimmt. Für Kegel, deren Erzeugende mit der Kegel-

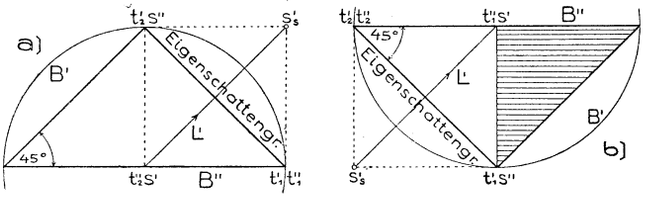


Fig. 174 a, b.

achse 45° einschließen, sind die Eigenschattengrenzen in den Figuren 174, a und b angegeben.

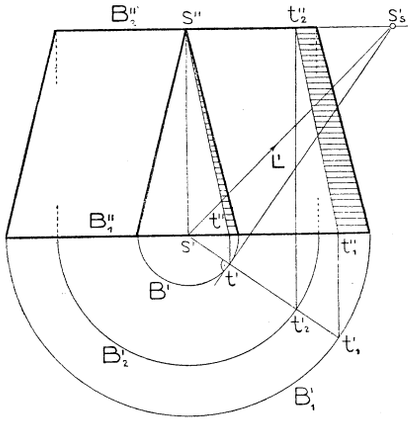


Fig. 175.

Fällt die Kegelspitze über die Zeichenfläche hinaus, wie bei dem in Fig. 175 dargestellten Kegelstumpf mit den Randkreisen B_1, B_2, so denke man sich den Kegel längs seiner Achse soweit parallel verschoben, bis seine Spitze s innerhalb des verfügbaren Zeichenraumes zu liegen kommt, und zeichne unter Verwendung seines Schnittkreises B mit der Ebene von B_1 für diesen Kegel auf obige Art die sichtbare Eigenschattengrenze $[st]$ im Auf- und Grundriß. Da $[st]' = [s't']$ mit dem Grundriß $[s't_1']$

Hosted by Google

der Schattengrenze an dem ursprünglichen Kegel zusammenfällt, so läßt sich der Aufriß $[t_1''t_2'']$ der Eigenschattengrenze an dem Kegelstutz unmittelbar zeichnen. Man kann dabei auch den Parallelismus von $[t_1''t_2'']$ und $[t''s'']$ verwerten.

Wenn die Achse des Drehkegels zu keiner Rißebene senkrecht steht, jedoch zu einer von ihnen parallel läuft, so führt man durch

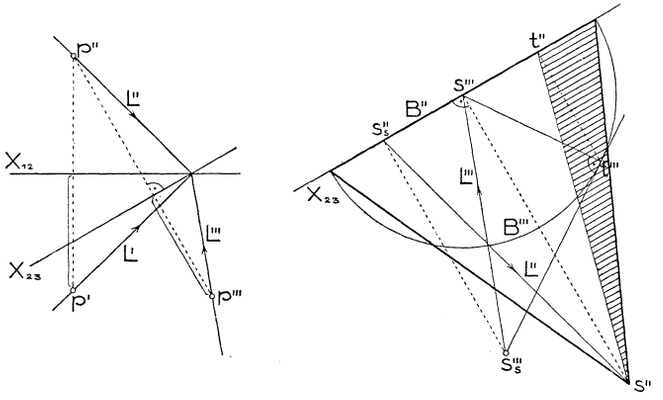


Fig. 176.

Benutzung des Seitenrisses auf die Kegelbasisebene die Konstruktion des Eigenschattens auf die frühere Aufgabe zurück. Fig. 176 zeigt die Ausführung für einen Drehkegel mit zu Π_2 paralleler Achse bei 45°-Beleuchtung. Der Seitenriß L''' des Lichtstrahles auf die Basisebene des Kegels wurde in der linken Nebenfigur aufgesucht.

94. Konstruktion der Eigenschattengrenze von Zylinderflächen. Für die Konstruktion der Eigenschattengrenze von Zylinderflächen gilt wörtlich das über Kegel Gesagte, wenn man nur berücksichtigt, daß die Spitze s unendlichfern liegt. Ist z. B. (Fig. 177) die Basis B und die Erzeugendenrichtung (d. h. s_∞) im Aufriß gegeben, so besteht der scheinbare Umriß des Zylinders aus den zu jener Richtung parallelen Tangenten an B''. Zur Konstruktion der Eigenschattengrenze lege man durch einen beliebigen Punkt p (der auch dem Zylinder angehören darf) den Lichtstrahl L sowie die zu den Zylindererzeugenden parallele Gerade E und ermittle (mit Hilfe eines zweiten

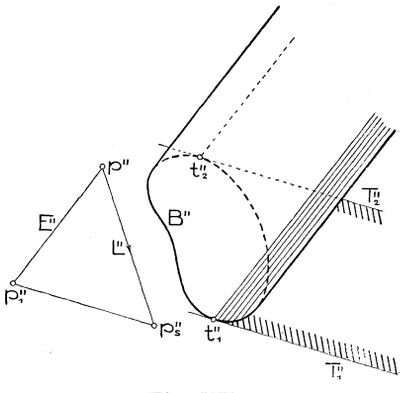


Fig. 177.

Hosted by Google

Bildes) die Spurpunkte p_s und p_1 dieser Geraden auf der Basisebene β. $[p_1 p_s]$ gibt dann die Richtung der Basisspuren der $\| L$ an den Zylinder legbaren Tangentenebenen an. Zieht man daher die zu $[p_1 p_s]$ parallelen Tangenten T_1, T_2 an B, so gehen durch deren Berührungspunkte t_1, t_2 die Eigenschattengrenzen des Zylinders und die Tangenten selbst (sowie die Schlagschatten etwa auftretender Randerzeugenden) begrenzen den Schlagschatten des Zylinders auf β. Da $[p_1 p_s]$ der Schatten der Geraden E auf β ist, so läßt sich folgende Regel aussprechen:

Um die Eigenschattengrenze eines Zylinders zu erhalten, suche man den Schatten einer zu seinen Erzeugenden parallelen Geraden (oder einer Erzeugenden selbst) auf die Basisebene oder eine dazu parallele Ebene, lege parallel hierzu an die Basis die Tangenten und ziehe durch die Berührungspunkte die Erzeugenden.

Sind die Zylindererzeugenden zu einer Rißebene, z. B. zu Π_1 senkrecht, so gehen (nach Nr. 30, g)) die Eigenschattengrenzen durch die Berührungspunkte der $\| L'$ an B' gelegten Tangenten.

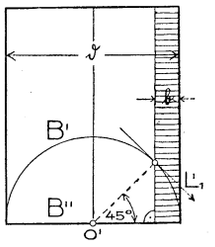


Fig. 178.

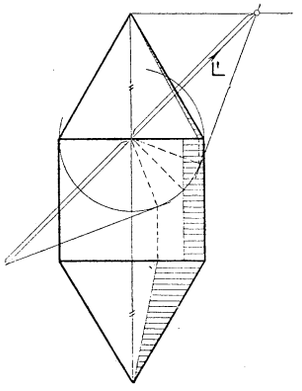


Fig. 179.

Für einen Drehzylinder in dieser Stellung und bei 45°-Beleuchtung ist es insbesondre bequem (Fig. 178), den Basiskreis B um seinen zu Π_2 parallelen Durchmesser derart parallel zu Π_2 gedreht zu denken, daß sein vorderer Teil nach oben kommt. Der entsprechende Grundriß L_1' des Lichtstrahls wird dann $\| L''$ und die Berührungspunkte der dazu parallelen Tangenten an B' sind die Endpunkte des zu L' parallelen Durchmessers von B'. Durch sie gehen auch die Aufrisse der Eigenschattengrenzen.

Aus Fig. 178 ersieht man, daß in diesem Sonderfall die Breite $\mathfrak{b}$ des sichtbaren Eigenschattens, wenn $\mathfrak{d}$ den Zylinderdurchmesser bezeichnet, durch

$$\mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{d}}{2} - \frac{\mathfrak{d}}{4}\sqrt{2} = \frac{\mathfrak{d}}{4}(2 - \sqrt{2})$$

gegeben ist. Wegen

Hosted by Google

$$2 - \sqrt{2} \doteq 2 - 1{\cdot}414 \doteq 0{\cdot}586$$

$$\tfrac{1}{4}(2 - \sqrt{2}) \doteq 0{\cdot}146 \doteq \tfrac{1}{7},$$

kann man

$$b \doteq \frac{d}{7}$$

setzen. Man wird also beim freihändigen Zeichnen (Skizzieren) näherungsweise die sichtbare Schattengrenze eines Zylinders erhalten, indem man ein Siebentel seines Durchmessers dem Augenmaße nach vom rechten Umriß nach links abträgt. Das gleiche gilt bei 45°-Beleuchtung für Zylinder $\perp \Pi_2$ oder $\perp \Pi_3$.

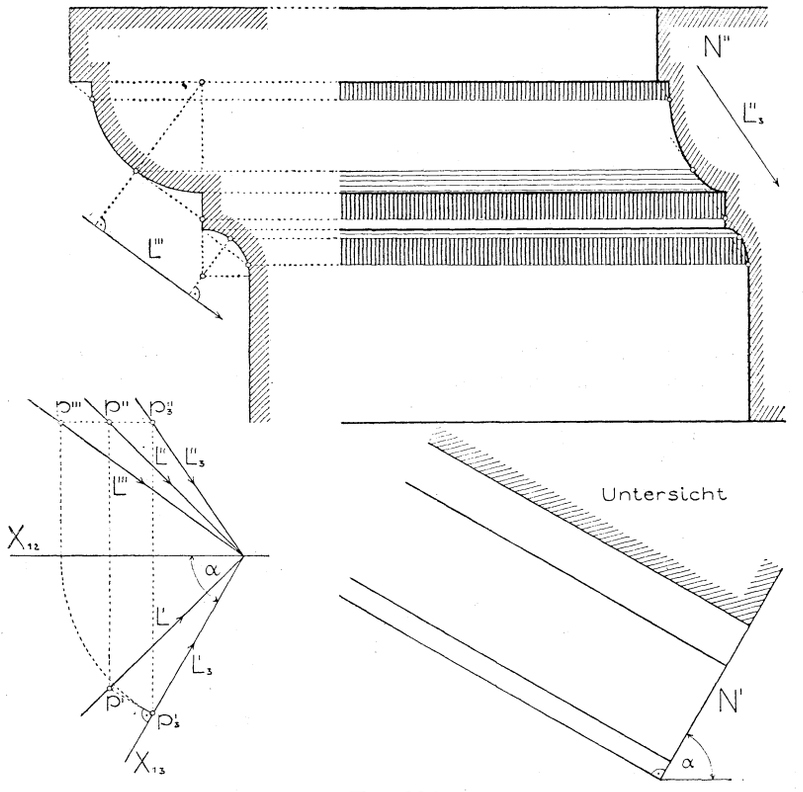


Fig. 180.

Ferner sei ausdrücklich auf die Tatsache hingewiesen, daß an einem aus Drehkegeln und Drehzylinder mit gleichen Basiskreisen zusammengesetzten Körper (Fig. 179) die Schattengrenzen der Teilkörper keine gemeinschaftlichen Punkte besitzen.

Die Schattenkonstruktion an zylindrischen Körpern, die zu keiner der Rißebenen senkrecht stehen, führt man auf den Fall des Senk-

Hosted by Google

rechtstehens durch Verwendung von Seitenrissen zurück. Besonders häufig tritt dem Zeichner bei der Darstellung praktischer Gegenstände die Aufgabe entgegen, an horizontalen, aber gegen Π_2 geneigten zylindrischen Körpern, wie einen solchen Fig. 180 zeigt, die Schatten zu ermitteln. Man geht dabei am besten wie in Nr. 34, Fig. 56 vor, benutzt nämlich neben dem Aufriß den Seitenriß auf die zu den Zylindererzeugenden senkrechte Ebene, die dann parallel zu Π_2 gedreht wird. Den Seitenriß L''' des Lichtstrahles ermittelt man in einer Nebenfigur. Fig. 180 enthält auch die an dem Körper auftretenden Schlagschatten, die alle von Geraden parallel zu den Zylindererzeugenden herrühren und deshalb wieder gerade Linien sind. Hingewiesen sei hierbei auf den Eigenschatten, der an der Hohlkehle stets neben dem Schlagschatten auftritt.

Ist der Normalschnitt des zylindrischen Körpers nicht in seiner wahren Gestalt (im Seitenriß), sondern nur durch den Aufriß N'' gegeben, so wird man diesen ebenso zur Schattenkonstruktion benutzen wie den Seitenriß. Man hat bloß in der Nebenfigur den Normalriß L_3 des Lichtstrahles auf eine zum Normalschnitt parallele Ebene im Aufriß zu zeichnen. Legt man dann die zu L_3'' parallelen Tangenten an N'', so gehen durch die Berührungspunkte die Eigenschattengrenzen des Körpers.

95. Schlagschatten einer beliebigen Kurve auf Kegel- und Zylinderflächen. Methode des Zurückführens. Die Grundaufgabe für diese Konstruktionen ist die *Ermittlung des Schattens eines Punktes p auf eine Kegelfläche Φ*, d. h. (Nr. 27) die Ermittlung der Schnittpunkte des durch p gehenden Lichtstrahls L mit Φ. Diese Schnittpunkte gehören den Erzeugenden an, die die Ebene $[Ls]$ aus Φ ausschneidet. Die Spur dieser Ebene auf der Basisebene β von Φ (Fig. 181) ist die Verbindungslinie $[p_1 s_1]$ der Spurpunkte $p_1 = [L\beta]$ und $s_1 = [s \| L \cdot \beta]$; durch die Schnittpunkte der Spur mit B gehen daher jene Erzeugenden, aus denen L die gesuchten Punkte ausschneidet. Der p nächstliegende unter ihnen ist, sobald die Richtung von p nach ihm mit der von L übereinstimmt, der eigentliche Schlagschatten p_s von p auf Φ.

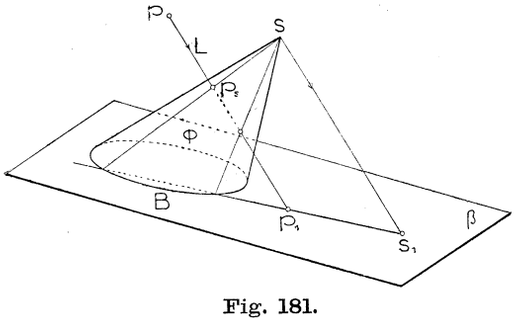


Fig. 181.

Den *Schlagschatten einer Kurve K auf eine Kegelfläche Φ* kann man nun punktweise erhalten, indem man diese Konstruktion für

Hosted by Google

eine größere Punktezahl von K wiederholt. Die den Punkten p von K entsprechenden Punkte p_1 erfüllen dann eine Kurve K_1, den Schnitt des Lichtzylinders durch K mit β oder den Schlagschatten von K auf diese Ebene. Ist K_1 in einem Bilde einmal gezeichnet (Fig. 182), so läßt sich die Konstruktion des Schlagschattens K_s von K auf Φ auch folgendermaßen auffassen.

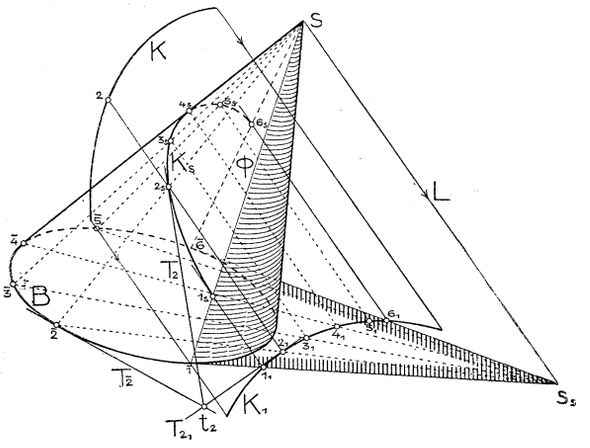


Fig. 182.

Irgend eine Kegelerzeugende, z. B. $[\bar{2}s]$ wirft auf β den Schatten $[\bar{2}s_s]$. Legt man durch den Schnittpunkt 2_1 dieser Geraden mit K_1 den Lichtstrahl, so trifft er $[\bar{2}s]$ in einem Punkt 2_s von K_s. Durch Wiederholung dieser Konstruktion mit andern Erzeugenden gelangt man zu beliebig vielen Punkten von K_s. In den der Eigenschattengrenze $[\bar{1}s]$, $[\bar{6}s]$ angehörigen Punkten 1_s und 6_s wird K_s von den Lichtstrahlen berührt (Nr. 92, Satz 3); in dem dem scheinbaren Umriß $[\bar{4}s]$ angehörigen Punkt 4_s ist diese Gerade Tangente von K_s (Nr. 92, Satz 2). Faßt man K_s als Schnittkurve von Φ mit dem Lichtzylinder durch K auf, so ergibt sich die Tangente an K_s in irgend einem Punkte, z. B. in 2_s, als Schnittlinie der Tangentenebenen an die eine und andre Fläche in diesem Punkt (Nr. 73, Satz 3). Die Basisspur der Tangentenebene an den Lichtzylinder ist die Tangente T_{2_1} an K_1 im Punkte 2_1 und die Basisspur der Tangentenebene an Φ die Tangente $T_{\bar{2}}$ an B in $\bar{2}$. Setzt man $[T_{\bar{2}}T_{2_1}] = t_2$, so ist $[t_2 2_s = T_2]$ die gesuchte Tangente an K_s in 2_s. — Fig. 182 kann als Normalriß oder als Parallelriß aufgefaßt werden.

Ganz analog verführe man, wenn Φ eine Zylinderfläche wäre.

Der Grundgedanke der an zweiter Stelle benutzten Methode zur Konstruktion des Schlagschattens einer Kurve K auf eine Kegelfläche, die man zuweilen als *„Methode des Zurückführens“* bezeichnet, läßt sich allgemeiner stets dann anwenden, wenn eine Fläche Φ durch eine Schar von Kurven C_1, C_2, C_3, ... definiert ist, deren Schlagschatten C_{11}, C_{21}, C_{31}, ... auf eine Ebene leicht zeichenbar sind. Man konstruiert nämlich dann auch den Schatten K_1 der Kurve K auf diese Ebene. Schneidet nun K_1 die Kurve C_{i1} $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ in einer

Hosted by Google

Anzahl von Punkten, so treffen die durch sie gelegten Lichtstrahlen die Kurve C_i in Punkten des gesuchten Schlagschattens von K auf Φ.

Diese Methode läßt sich übrigens auch zur *Konstruktion der Eigenschattengrenze* F der beliebigen Fläche Φ verwenden. Schneidet nämlich C_i die Kurve F in x_i, so wird C_{i1} den Schlagschatten F_1 von F im Punkte x_{i1} berühren, da ja die Tangenten an C_i und F in x_i der zur Lichtrichtung parallelen Berührungsebene dieses Punktes angehören. Gibt es also eine die Kurvenschar $C_{11}, C_{21}, C_{31}, \ldots$ berührende reelle Kurve F_1 und führt man die Berührungspunkte durch Lichtstrahlen in die Kurven $C_1, C_2, C_3, \ldots$ zurück, so erhält man Punkte von F.

96. Schlagschatten eines Kreises auf Kreiskegel und Kreiszylinder. Die Methode des Zurückführens wendet man z. B. mit Vorteil an, wenn es sich um die Ermittlung des Schattens eines horizontalen Kreises auf einen Drehkegel mit vertikaler Achse handelt, wie in dem in Fig. 183 im Aufriß dargestellten Beispiel. Der Körper, an dem die Schatten ermittelt werden sollen, besteht hier aus der Hälfte eines Kegelstutzes und einer ihn bedeckenden kreisförmigen Platte und ragt aus einer zu Π_2 parallelen und die Achse A des Körpers enthaltenden Mauer hervor. Nachdem an der Platte und dem Kegelstutz (nach Nr. 94 u. 93) die Eigenschattengrenzen gefunden sind, handelt es sich vorerst um die Konstruktion des Schlagschattens des unteren Halbkreises K der Platte auf den Kegelstutz Φ. Auf diesem gibt es eine Schar horizontaler Kreise $C_1, C_2, \ldots$. Wir wählen nun die Ebene von K als jene feste Ebene, auf die wir, der allgemeinen Methode entsprechend, die Schatten C_{i1} der Kreise C_i ermitteln, und betrachten sie für die Schattenkonstruktion zugleich als Grundrißebene Π_1, die Mauerebene als Π_2, sodaß sich also X_{12} mit K'' deckt, K' der Halbkreis über der Strecke K'' ist und der Schatten K_1 von K auf Π_1 mit K identisch wird. Der Schatten des beliebig gewählten Kreises C_1 auf Π_1 ist ein kongruenter

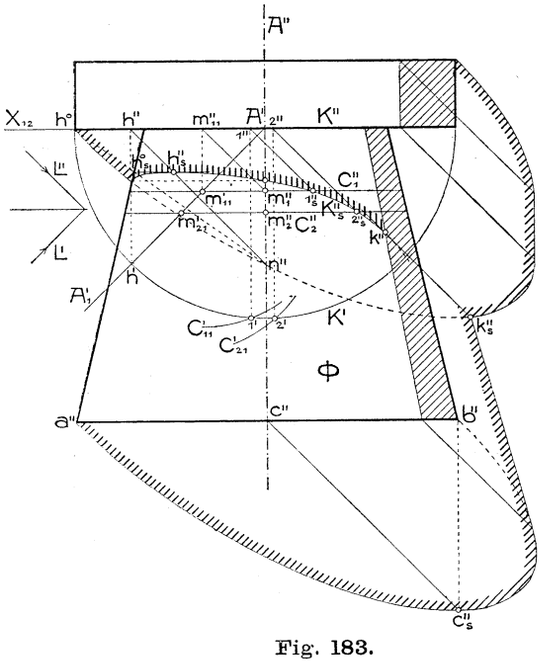


Fig. 183.

Hosted by Google

Kreis C_{11}. Um ihn im Grundriß zeichnen zu können, hat man bloß den Schatten der Mitte m_1 von C_1, d. h. den Schnittpunkt m_{11} des Lichtstrahls durch m_1 mit Π_1 aufzusuchen ($m_{11}'' = [m_1'' \| L'' \cdot X_{12}]$, $m_1' = A'$, $m_{11}' = [[A' \| L'] [m_{11}'' | X_{12}]]$). Der mit dem Halbmesser von C_1 um m_{11}' beschriebene Halbkreis C_{11}' schneidet $K' = K_1$ in unserer Figur in einem einzigen Punkt $1'$, dessen Aufriß $1''$ in X_{12} liegt. Der Lichtstrahl durch 1 schneidet C_1 in dem gesuchten Schattenpunkt 1_s, $[1'' \| L'']$ daher C_1'' in $1_s''$. Durch Verwendung verschiedener Kreise C_i erhält man auf dieselbe Art weitere Punkte $2_s''$, $3_s''$, ... von K_s''. Die Punkte m_{11}', m_{21}', ... gehören der zu L' parallelen Geraden A_1', dem Schlagschatten der Körperachse A auf Π_1, an. Bei 45°-Beleuchtung liegt m_{i1}' (vgl. Fig. 183) auf C_i''; man hat also gar nicht nötig, vorerst m_{i1}'' zu zeichnen, was die Konstruktion bedeutend vereinfacht. Auch bei andrer Lichtrichtung ist eine Vereinfachung möglich, weil wegen $\overline{A' m_i''} : \overline{A' m_{i1}'} = \text{konst.}$ die Geraden $[m_i'' m_{i1}']$ untereinander parallel sind.

Hat man C_i'' zu hoch gewählt, so werden die Schnittpunkte von C_{i1} mit K imaginär. Der höchste Kreis, der noch einen reellen Punkt oder, genauer gesagt, zwei zusammenfallende Punkte liefert, ist jener, dessen Schatten auf Π_1 den Kreis K berührt und zwar in dem A_1 angehörigen Punkt h. Der Schlagschatten h_s dieses Punktes ist daher der höchste Punkt von K_s. Da der Lichtstrahl durch h A in n schneidet, so wird h_s der Schnitt dieses Lichtstrahls mit jener Mantellinie von Φ sein, die die Ebene $[Ah]$ ausschneidet. Um diese Mantellinie nicht besonders zeichnen zu müssen, drehen wir $[Ah]$ in Π_2 hinein. Dadurch gelangt h nach h^0, $[hn]$, da n fest bleibt, nach $[h^0 n]$ und die Kegelerzeugende in die linke Umrißerzeugende; deren Schnitt mit $[h^0 n]$ ist also schon die gedrehte Lage h_s^0 von h_s. Dreht man wieder zurück, so muß h_s'' in der Horizontalen durch h_s^0 auf $[h'' n'']$ liegen. Die Tangente an K_s'' in h_s'' ist horizontal. Ferner sei neuerdings darauf hingewiesen, daß im Schnittpunkt k'' von K_s'' mit der Eigenschattengrenze von Φ die Tangente $\| L''$ ist.

Fig. 183 enthält auch die vom Körper auf die Mauerfläche Π_2 geworfenen Schlagschatten. Der Schatten des untern Grenzhalbkreises acb ist eine halbe Ellipse mit ab als Durchmesser und dem Schatten des Kreisradius durch c als konjugiertem Halbmesser. Da in der Figur 45°-Beleuchtung angenommen worden, konnte Punkt c_s'' mittels der Bemerkung gefunden werden, daß er um den Kreisradius rechts von c'' liegen muß (Nr. 32, Fußn.). Der Schatten von K auf die Mauer ist zu $a'' c_s'' b''$ kongruent, weil in Fig. 183 der Halbkreis acb mit K kongruent gewählt wurde. Sein Schnitt mit der linken Umrißerzeugenden von Φ liefert den Umrißpunkt des Schattens K_s''.[1])

1) Bei 45°-Beleuchtung befindet sich (nach Nr. 121, c)) dieser Punkt mit dem A'' angehörigen Punkt von K_s'' auf gleicher Höhe.

Hosted by Google

Man erkennt hieraus, *daß dieser Punkt nicht im Aufriß des Lichtstrahls durch h^0 liegt* (wie es der Anfänger fälschlich meint), sondern von diesem Lichtstrahl umsomehr abweicht, je weiter die Platte über dem Kegelstutz vorspringt.

Zuweilen ist eine kleine Abänderung der obigen Methode vorteilhafter. Statt nämlich die Schatten der Kreise C_i auf die Ebene

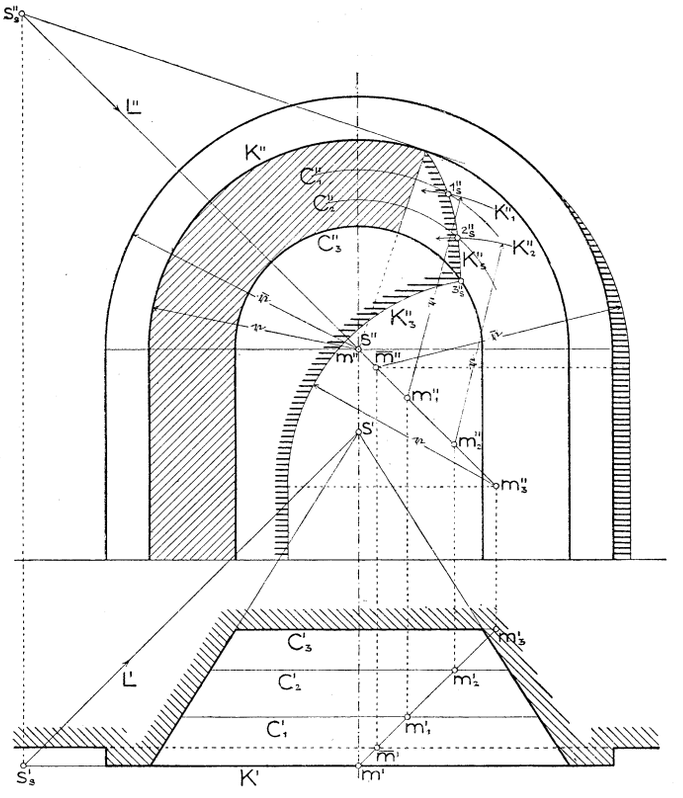


Fig. 184.

des schattenwerfenden Kreises K aufzusuchen, kann man auch die Schatten K_i von K auf die Ebenen der C_i aufsuchen; die Schnittpunkte von K_i und C_i gehören dem Schlagschatten von K auf Φ an. Auf diese Weise wurde an der in Fig. 184 im Auf- und Grundriß (Untersicht) dargestellten kegelförmig überdeckten Mauernische die Schattenkonstruktion durchgeführt, die wohl keiner weiteren Erläuterung bedarf.

Handelt es sich jedoch um die *Konstruktion des Schlagschattens einer Kurve K auf einen zu einer Rißebene senkrechten Zylinder*, so wird man direkt die Schnittpunkte der von K ausgehenden Licht-

Hosted by Google

strahlen mit dem Zylinder aufsuchen. Vgl. hierzu Fig. 185, wo der Schlagschatten der kreisförmigen Platte auf den zu Π_3 senkrechten Drehzylinder punktweise unmittelbar mittels Auf- und Kreuzriß gefunden wurde. Letzterer ist, um das Zeichnen längerer Ordnungslinien und zugleich Raum zu ersparen, in den Aufriß hineingelegt worden. Der in der Lichtebene durch die Zylinderachse befindliche Punkt h des schattenwerfenden Kreises K gibt den am weitesten links liegenden Punkt von K_s (Tangente in h_s'' an K_s'' parallel K'').

Für einen zu einer Rißebene parallelen Zylinder läßt sich der Schlagschatten auf die gleiche Weise konstruieren, wenn man den Seitenriß auf eine zu den Zylindererzeugenden senkrechte Ebene be-

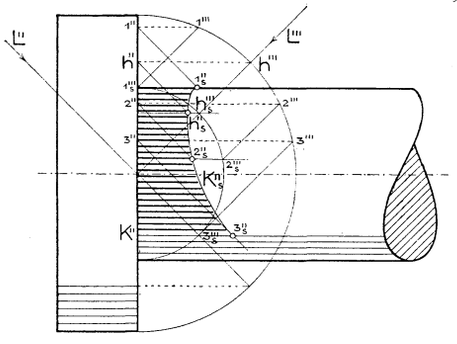


Fig. 185.

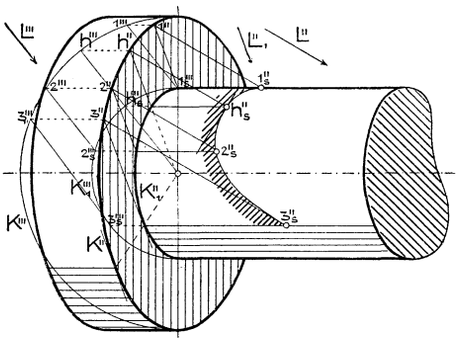


Fig. 186.

nutzt. Fig. 186 zeigt die Durchführung auf die beiden schon bei Fig. 180 erwähnten Arten, daß nämlich der Seitenriß auf die Ebene des schattenwerfenden Kreises K entweder zu Π_2 parallel gedreht oder unmittelbar im Aufriß gezeichnet wird. Der Seitenriß der Lichtrichtung ist im ersten Fall mit L''', im zweiten mit L_1'' bezeichnet.

97. Schlagschatten von Geraden auf Kegel- und Zylinderflächen. Im Fall die schattenwerfende Linie K gerade ist, bleibt die obige allgemeine Methode ebenfalls anwendbar. Die Konstruktion des Schlagschattens wird dann im Grunde identisch mit der in Nr. 89, Fig. 161 gezeigten Konstruktion der Schnittlinie des Kegels Φ mit der Lichtebene durch K. Häufig wird sich durch Einführung eines Seitenrisses auf eine zur Schnittebene normale Ebene die Arbeit vereinfachen lassen.

Für einen Kegel oder Zylinder 2. O. wird der Schlagschatten der Geraden eine nach Nr. 90, 91 konstruierbare Kurve 2. O. sein.

Aufgabe: *Es soll der Schlagschatten einer horizontalen quadratischen Platte mit zu Π_2 paralleler Vorderkante K auf einen mit der Spitze nach abwärts gerichteten lotrechten Drehkegel Φ für eine beliebige*

Hosted by Google

Lichtrichtung L′, L″ ermittelt werden (Fig. 187). Nachdem die Eigenschattengrenze von Φ auf bekannte (in der Figur eingezeichnete) Weise gefunden, führe man eine zu K senkrechte Seitenrißebene Π_3 durch die Kegelachse A ein und lasse A''' mit A'' zusammenfallen. Der Seitenriß von Φ deckt sich dann mit seinem Aufriß, der Seitenriß K''' der Kante K mit dem linken Endpunkt f''' von K''. Sucht man, etwa in einer Nebenfigur, L''', so ist $[K'''\|L''']$ der Seitenriß der Lichtebene durch K und ihr Schnitt K_s mit Φ stellt sich als die Strecke $a'''b'''$ dar. K_s ist im vorliegenden Fall eine Ellipse mit den Achsen ab und cd, von denen letztere sich im Seitenriß als die Mitte

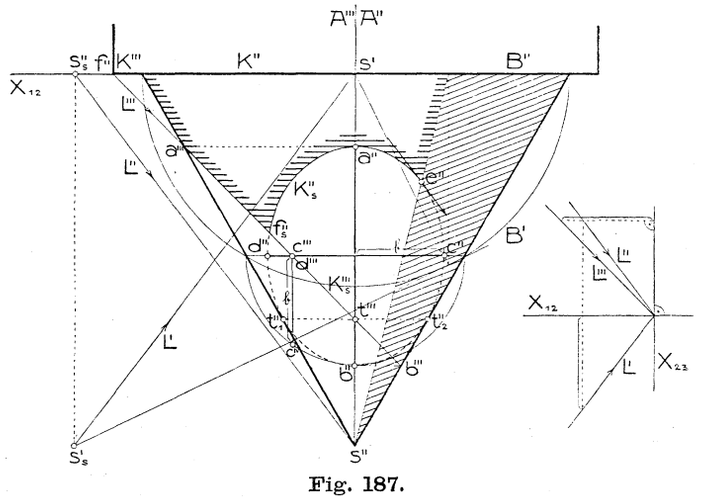


Fig. 187.

von $a'''b'''$ darstellt. Die Aufrisse der Punkte a und b fallen nach A'', die der Punkte c und d sind um den Abstand $\mathfrak{b} = \overline{\Pi_3 c}$ von A'' entfernt. $\mathfrak{b}$ ergibt sich aus der Umklappung des durch c und d gehenden Kreises von Φ in die Seitenrißebene ($\mathfrak{b} = \overline{c'''c^{IV}}$). Von der Ellipse K_s'' mit den Achsen $a''b''$ und $c''d''$ ist nur jener Teil wirklicher Schatten, der von der Eigenschattengrenze des Kegels, also vom Punkte e'' an bis zum Schlagschatten f_s'' des Punktes f reicht. Von letzterem Punkt an wirft die linke untere, zu Π_2 senkrechte Plattenkante einen Schatten, der eine Ellipse ist, sich aber im Aufriß als gerade Linie darstellt (Nr. 30, h)). Die Berührungspunkte t_1'', t_2'' von K_s'' mit dem scheinbaren Umriß von Φ sind die Aufrisse der Schnittpunkte von K_s mit den wirklichen Umrißerzeugenden. Da diese Geraden, als Parallele zu Π_2, ihre Seitenrisse in A''' haben, so ist $[A'''K_s'''] = t'''$ der Seitenriß von t_1 und t_2, also t_1'', t_2'' hierdurch gegeben.

Bei 45°-Beleuchtung oder allgemeiner bei einer Lichtrichtung, die zur Symmetrieebene Σ_{12} oder zur Koinzidenzebene Γ_{12} parallel ist,

Hosted by Google

wird (nach Nr. 38, S. 76) K_s'' mit K_s' kongruent. Aus Nr. 91, Satz 1 folgt, daß dann der dem Punkte t''' der Fig. 187 entsprechende Punkt Brennpunkt von K_s'' ist.

Die aus Nr. 38, S. 76 folgende, eben verwendete Bemerkung wollen wir in etwas allgemeinerer Form aussprechen als

Satz 1: *Wirft eine zu den zugeordneten Rißebenen Π_i und Π_k parallele Gerade für eine zur Ebene Σ_{ik} oder Γ_{ik} parallele Lichtrichtung auf irgend eine Fläche einen Schatten, so sind dessen Normalrisse auf die Ebenen Π_i und Π_k kongruent.*

Von Wichtigkeit ist dieser Satz für die Konstruktion des Schattens einer zur Rißachse $[\Pi_i \Pi_k]$ parallelen Kante auf einen zu einer der Ebenen Π_i, Π_k senkrechten Zylinder. *Für einen Drehzylinder stellt sich*

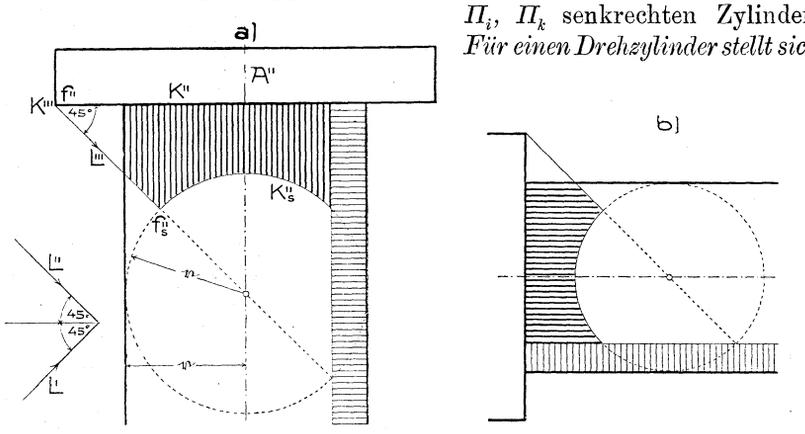


Fig. 188 a, b.

bei 45°-Beleuchtung (nach Nr. 91, Satz 2) *dieser Schatten als Kreis dar*, läßt sich daher, wie die Fig. 188, a und b zeigen, unmittelbar zeichnen. Mittelpunkt des Kreises ist der betreffende Riß des Schnittpunktes der Lichtebene durch die Kante mit der Zylinderachse. Dieser Punkt hat vom Riß der Kante denselben Abstand wie die Kante im Raum von der Zylinderachse.

Diese Tatsache ist beim Zeichnen von Schatten an praktischen Objekten sehr häufig verwertbar. Sollen z. B. an dem in Fig. 189 im Auf- und Grundriß (Untersicht) dargestellten architektonischen Detail die bei 45°-Beleuchtung auftretenden Schatten konstruiert werden, so kann man, unter vorzugsweiser Benutzung des Aufrisses, etwa so verfahren. Man zeichnet zuerst den Schlagschatten der obersten horizontalen Kante K auf den vertikalen Drehzylinder Φ_1 mit der Achse A_1, indem man den Abstand $a = \overline{K'A_1'}$ auf A'' von K'' aus bis m'' abträgt und um diesen Punkt mit dem Radius r von Φ_1 den Kreis schlägt. Vom Schnittpunkte a'' mit der im Aufriß als

Hosted by Google

Gerade erscheinenden Schnittkurve zwischen Φ_1 und Φ_2 aus geht dann der Schlagschatten von K auf Φ_2 horizontal weiter.

Sieht man den kreisförmigen Teil von K_s'' zugleich als Grundriß von Φ_1 an, so kann man mit seiner Hilfe auch die Eigenschattengrenze des Zylinders Φ_1 sowie dessen Schlagschatten und den der Kante K auf die Mauer μ_1 ermitteln (siehe Fig. 189).

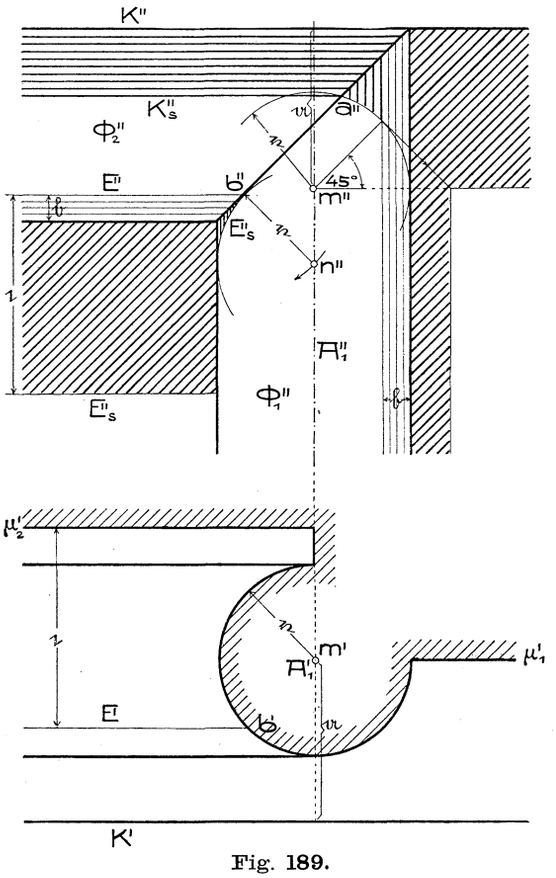


Fig. 189.

Die Breite $\mathfrak{b}$ des sichtbaren Eigenschattens von Φ_2 ist der von Φ_1 gleich, daher die Eigenschattengrenze E an Φ_2 im Aufriß bekannt. Ihr Schlagschatten E_s auf Φ_1 erscheint im Aufriß wieder als Kreis vom Halbmesser $\mathfrak{r}$. Da der Schnittpunkt b von E mit Φ_1 E_s angehört, so schneidet ein um b'' mit dem Halbmesser $\mathfrak{r}$ beschriebener Bogen aus A_1'' den Mittelpunkt n'' jenes Kreises aus. Dieser Kreis berührt übrigens nach Nr. 92, Satz 5 die als Gerade sich darstellende Schnittlinie zwischen Φ_1 und Φ_2, hätte also auch unmittelbar gezeichnet werden können; sein Berührungspunkt b'' mit jener Schnittlinie hätte dann E'' bestimmt. Der Schlagschatten von E auf die Mauer μ_2 ist im Abstand $\mathfrak{r} = \overline{\mu_2' b'}$ zu E'' parallel.

Eine Anwendung des Satzes 1 auf beliebige Zylinder zeigt Fig. 190, wo der Aufriß des Schlagschattens der vertikalen Mauerkante A auf das horizontale Gesims mit dessen Kreuzriß kongruent ist. An Gesimsen, deren Kanten (Erzeugenden) gegen die Aufrißebene geneigt sind, konstruiert man wie in Nr. 94, Fig. 180, die Schlagschatten mit Hilfe eines Seitenrisses auf eine zu jener Kantenrichtung senkrechten Ebene. Treten Verkröpfungen auf, so müssen mehrere Seitenrisse verwendet werden.

Hosted by Google

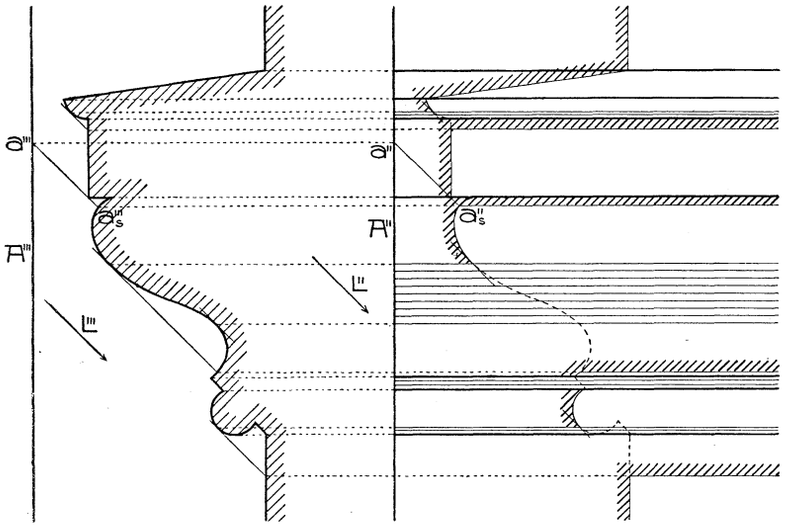


Fig. 190.

Ein lehrreiches Beispiel für die Art der Benutzung von Seitenrissen bildet Fig. 191, wo die sichtbaren Zylinder der dargestellten architektonischen Einzelheit kongruente Normalschnitte aber von drei verschiedenen Stellungen ν_1, ν_2, ν_3 besitzen. Diese Ebenen werden für die betreffenden Zylinder als Seitenrißebenen verwendet und um die Körperachse A parallel zu Π_2 gedreht und zwar ν_1 und ν_2 etwa rechtsum, ν_3 linksum; die Seitenrisse aller Zylinder fallen dann mit dem Umriß des Körpers in der zweiten Projektion zusammen. Zur Konstruktion der Schatten braucht man noch die Seitenrisse L_1''', L_2''', L_3''' des Lichtstrahls $L(L', L'')$ auf die Ebenen ν_1, ν_2, ν_3 (siehe Nebenfigur). Man erkennt unmittelbar, daß in dem vorliegenden Fall bei 45^0-Beleuchtung L_1''' der parallel Π_2 (rechtsum) gedrehte Lichtstrahl L und $L_3''' \perp X_{12}$ ist, während L_2''' sich mit L'' deckt. Die Eigenschattengrenzen der Zylinder Φ_1, Φ_2, Φ_3 (vgl. Fig. 191) sowie ihre bezüglichen Schlagschatten auf die Zylinder Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 ergeben sich dann wie früher. Zur Ermittlung des Schlagschattens des Stückes bd der Eigenschattengrenze von Φ_2 auf Ψ_3 suchen wir die Schlagschatten einiger Punkte dieser Strecke mittels ihres Seitenrisses auf ν_3. Um z. B. den Seitenriß des Punktes c zu erhalten, beachten wir, daß $cd = c''d''$ horizontal und gegen ν_3 unter 45^0 geneigt ist. Die Länge ihres Seitenrisses auf ν_3 ist mithin Kathete eines rechtwinkelig-gleichschenkeligen Dreiecks mit der Hypotenuse $= \overline{c''d''}$. Trägt man diese (irgendwo konstruierte) Kathete von dem im Umriß gelegenen Punkt d''' aus nach links hin

Hosted by Google

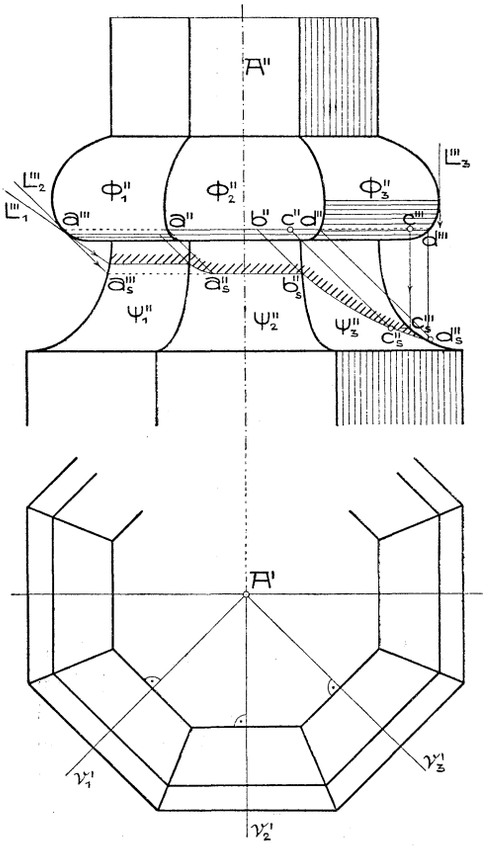
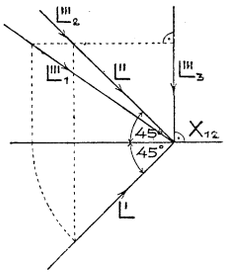


Fig. 191.

auf, so gelangt man zu c''' In allgemeineren Fällen würde



man diesen Seitenriß mittels des Grundrisses konstruieren. Aus c''' erhält man mittels L_3''' den Punkt c_s''' und daraus in $[c'' \mid L'']$ den gesuchten Punkt c_s''. Auf analoge Weise ließe sich von dem letzten Teile der Eigenschattengrenze von Φ_1 der Schlagschatten auf Ψ_2 ermitteln.

98. Über das Zerfallen der Schnittkurve zweier Flächen zweiter Ordnung in zwei Kurven zweiter Ordnung. Zufolge Nr. 73, Satz 5 hat die Schnittkurve zweier sich in einem Punkte berührenden Flächen in diesem Punkt einen Doppelpunkt. Wenn nun zwei Flächen zweiter Ordnung Φ_1 und Φ_2 sich in zwei Punkten p_1 und p_2 berühren, so hat ihre Schnittkurve vierter Ordnung K (Nr. 71, Satz 4) sowohl in p_1 als in p_2 einen Doppelpunkt. Wir wollen nun zeigen, *daß jede Raumkurve vierter Ordnung K mit zwei Doppelpunkten p_1, p_2 in zwei Kurven zweiter Ordnung zerfällt.* Jede durch p_1, p_2 und irgend einen andern Kurvenpunkt gelegte Ebene hat, weil sowohl p_1 als p_2 doppelt zählen, mit K fünf Punkte gemeinsam, enthält daher (Nr. 65, Satz 3) einen Teil K_1 von K. K_1 als ebene und zugleich einer Fläche zweiter Ordnung angehörige Kurve ist gewiß von zweiter Ordnung. K muß als Kurve vierter Ordnung noch weitere, K_1 nicht angehörige Punkte besitzen. Legt man durch einen solchen Punkt und p_1, p_2 die Ebene, so hat sie wieder fünf Punkte mit K gemeinsam, enthält also ebenfalls eine Teilkurve zweiter Ordnung K_2. Einen weiteren weder K_1 noch K_2 angehörigen Punkt kann es auf K nicht geben, da sonst

Hosted by Google

jede durch ihn gelegte Ebene die Kurve vierter Ordnung K in mehr als vier Punkten schnitte. Damit ist bewiesen:

Satz 1: *Berühren sich zwei Flächen zweiter Ordnung in zwei Punkten, so zerfällt ihre Schnittkurve in zwei durch die Berührungspunkte gehende Kurven zweiter Ordnung.*

Von diesem Satz gilt auch die Umkehrung:

Satz 2: *Zerfällt die Schnittkurve zweier Flächen zweiter Ordnung in zwei Kurven zweiter Ordnung, so berühren sich die Flächen in zwei (reellen oder imaginären) Punkten.*

Denn da die Kurven K_1, K_2 einer Fläche zweiter Ordnung angehören, so schneiden sie sich in zwei Punkten. Die Tangenten in diesen Punkten an K_1 und K_2 bestimmen aber Ebenen, die sowohl Φ_1 als Φ_2 berühren.

Ferner besteht der häufig zur Anwendung kommende

Satz 3: *Haben zwei Flächen zweiter Ordnung eine Kurve zweiter Ordnung gemeinsam, so schneiden sie sich noch in einer zweiten Kurve zweiter Ordnung.*

Denn ist K_1 die den beiden Flächen Φ_1, Φ_2 gemeinsame Kurve zweiter Ordnung, so hat jede Ebene mit der Schnittkurve $[\Phi_1 \Phi_2]$ noch zwei weitere, außerhalb K_1 gelegene Punkte gemeinsam. Alle diese Schnittpunktepaare gehören also einer andern Kurve zweiter Ordnung K_2 an.

Fällt letztere mit ersterer zusammen, so berühren sich die Flächen längs eines ebenen Schnittes.

Von den in den obigen Sätzen auftretenden Flächen zweiter Ordnung dürfen selbstverständlich eine oder beide Kegel- oder Zylinderflächen sein. Betrachten wir nun einen durch einen ebenen Schnitt K begrenzten Teil einer Fläche zweiter Ordnung Φ, so wird K bei gegebener Lichtrichtung L einen Schlagschatten K_s auf Φ werfen, der natürlich ganz oder teilweise uneigentlich (Nr. 27) sein kann. K_s gehört dem Schnitt von Φ mit dem Lichtzylinder durch K an; da dieser Zylinder, als durch K gehend, von zweiter Ordnung ist und K schon einen Teil der Schnittkurve beider Flächen bildet, so muß zufolge Satz 3 der andre Teil K_s ebenfalls von zweiter Ordnung sein. Wir haben somit den bei Schattenkonstruktionen oft verwendbaren

Satz 4: *Der Schlagschatten eines ebenen Schnittes einer Fläche zweiter Ordnung auf diese ist eine Kurve zweiter Ordnung.*

99. Schlagschatten der ebenen Randkurve einer Kegel- oder Zylinderfläche zweiter Ordnung auf diese. Nach dem letzten Satz wird der Schlagschatten B_s, den die Basiskurve B eines hohlen Kegels

Hosted by Google

zweiter Ordnung Φ in dessen Inneres wirft, eine Kurve zweiter Ordnung sein. Wir denken uns den beliebig im Raume liegenden Kegel in einem Normalriß, etwa im Aufriß (Fig. 192), dargestellt und schon den Schatten s_1 der Spitze s auf die Basisebene β gefunden; die weitere

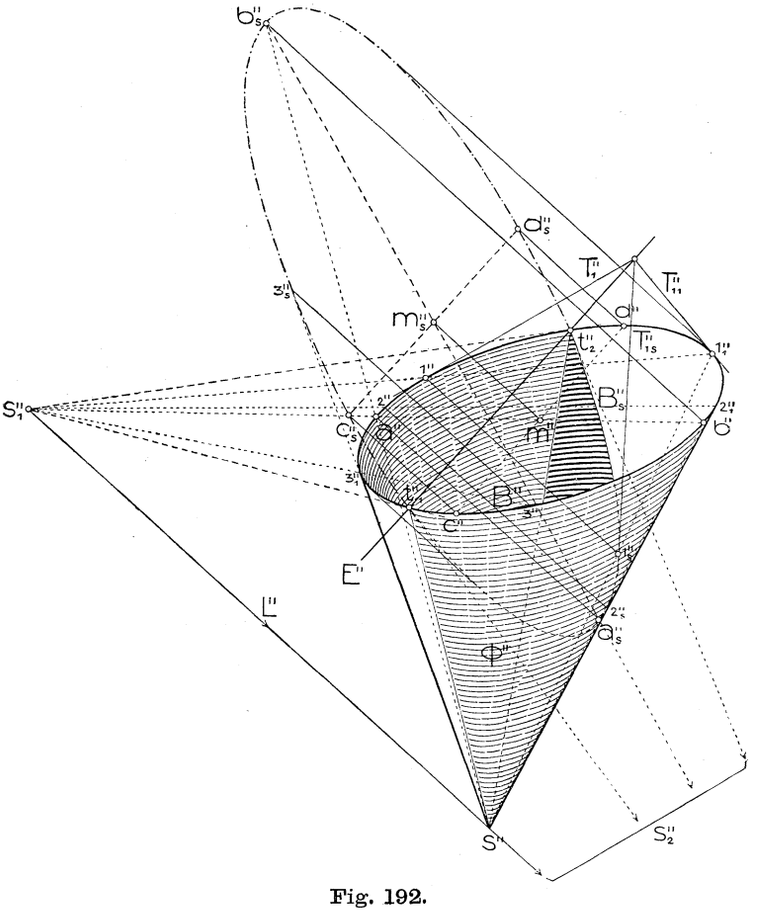


Fig. 192.

Schattenkonstruktion kann nun ohne Benutzung eines zweiten Bildes durchgeführt werden. Berühren die aus s_1 an B gelegten Tangenten B in t_1 und t_2, so sind $[st_1]$ und $[st_2]$ die Eigenschattengrenzen des Kegels und zwar ist der s_1 zugewendete zwischen diesen Erzeugenden befindliche Teil von Φ auf der Außenseite im Licht, auf der Innenseite im Eigenschatten.

Um von irgend einem Punkt 1 der Basis B den Schlagschatten zu erhalten, legen wir den Lichtstrahl $[1 \parallel L]$ und suchen dessen zweiten Schnittpunkt 1_s mit Φ. Die zu diesem Zweck durch $[1 \parallel L]$

Hosted by Google

und s gelegte Ebene enthält s_1, schneidet mithin β in $[s_1 1]$ und, wenn diese Gerade B nochmals in 1_1 trifft, den Kegel in $[1_1 s]$. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit $[1 \mid L]$ ist 1_s. Die Tangente T_{1s} an B_s in 1_s ist die Schnittlinie der Tangentenebenen in diesem Punkt an den Lichtzylinder durch B und an Φ. Da die Basisspuren dieser Ebenen die Tangenten T_1 und T_{11} in 1 bzw. 1_1 an B sind, so ist $[T_1'' T_{11}'' 1_s''] = T_{1s}''$. Nach Nr. 85 liegt übrigens $[T_1 T_{11}]$ auf $E = [t_1 t_2]$, der Polaren von s_1 bezüglich B. Auf diese Weise können beliebig viele Punkte und Tangenten von B_s gefunden werden. Um insbesondere die in den Umrißerzeugenden $[s 2_1]$ und $[s 3_1]$ des Bildes liegenden Punkte zu erhalten, ziehe man $[s_1 2_1]$, $[s_1 3_1]$ und suche von deren Schnittpunkten 2 und 3 mit B die Schlagschatten auf Φ.

Setzt man B als Ellipse voraus, so ist die Kurve zweiter Ordnung B_s, als dem Lichtzylinder durch B angehörend, eine Ellipse. Man wird daher trachten, konjugierte Durchmesser von B_s'' zu erhalten. Indem man B_s als Schnitt des Lichtzylinders durch B mit einer Ebene ε (Basisspur E) ansieht, kann dies nach Nr. 90, Fig. 167 geschehen. Man wähle zu diesem Zweck in B zwei konjugierte Durchmesser ab und cd (von denen in Fig. 192 der eine $\parallel E$ ist), lege durch ihre Endpunkte die Lichtstrahlen und suche deren Schnittpunkte a_s, b_s, c_s, d_s mit ε. Von einem dieser Lichtstrahlen, z. B. $[a \parallel L]$, muß man auf die oben erklärte Art den zweiten Schnittpunkt a_s mit Φ ermitteln; die Bilder der übrigen Punkte ergeben sich aus der perspektiven Affinität zwischen B'' und B_s'' mit E'' als Affinitätsachse und L'' als Richtung der Affinitätsstrahlen.

Ordnet man jedem Punkte von β seinen Schlagschatten auf ε zu, so sind diese Ebenen affin aufeinander bezogen (Nr. 38, S. 76). Dem Punkt s_1 in β wird dann ein Punkt s_2 in ε zugeordnet sein, der sich z. B. als Schnitt von $[s_1 s]$ mit $[a_s b_s]$ ergibt. Fassen wir das Trapez $a a_s b b_s$ ins Auge, so sind s_1 und s_2 die Schnittpunkte seiner Diagonalen mit $[s \parallel a a_s]$ und es bestehen daher die Proportionen:

$$\overline{a a_s} : \overline{s_1 s} = \overline{b a_s} : \overline{b s},$$
$$\overline{a a_s} : \overline{s s_2} = \overline{b_s a} : \overline{b_s s},$$
$$\overline{b a_s} : \overline{b s} = \overline{b_s a} : \overline{b_s s}.$$

Aus ihnen folgt $\overline{s_1 s} = \overline{s s_2}$. Darnach ist s_2 sofort angebbar. *Die Geraden* $[s_2 t_1]$ *und* $[s_2 t_2]$, als entsprechende zu $[s_1 t_1]$ und $[s_1 t_2]$, *sind die Tangenten an* B_s *in den Punkten* t_1 *und* t_2. *Diese Bemerkung ist insbesondere für das freihändige Zeichnen solcher Schatten verwertbar.*

Sie läßt sich auch noch in einfacherer Form ausdrücken. Der Lichtstrahl durch t_1 schneidet $[s_1 s]$ im Unendlichen oder in dem zu s bezüglich s_1 und s_2 harmonischen Punkt (Nr. 83). Die Geraden $[t_1 s_1]$ und $[t_1 s_2]$ werden demnach von $[t_1 s]$ und $[t_1 \parallel L]$ harmonisch

Hosted by Google

getrennt (Nr. 83). Da dasselbe für den Punkt t_2, ferner, wie wir sofort sehen werden, auch für Zylinderflächen zweiter Ordnung gilt, so hat man den

Satz 1: *Eine ebene Randkurve einer Kegel- oder Zylinderfläche zweiter Ordnung wirft auf diese einen Schlagschatten, der von den Schnittpunkten der Randkurve mit der Eigenschattengrenze ausgeht; in jedem solchen Punkte werden die Tangenten an die Randkurve und an den Schlagschatten harmonisch getrennt vom Lichtstrahl und von der Eigenschattengrenze.*

Um von dem Schlagschatten B_s der Basiskurve B eines hohlen Zylinders zweiter Ordnung in dessen Inneres (Fig. 193) konjugierte Durchmesser zu erhalten, verfährt man vollkommen analog wie beim Kegel. Nachdem wie in Nr. 94 (Fig. 177) der Schlagschatten $[q_1 q_s]$ der Erzeugendenrichtung auf die Basisebene β und damit die B angehörigen Punkte t_1 und t_2 der Eigenschattengrenze gefunden sind, suche man von den Endpunkten a und b des zu $t_1 t_2$ konjugierten, also zu $[q_1 q_s]$ parallelen Durchmessers von B die Schlagschatten a_s und b_s auf den Zylinder. $t_1 t_2$ und $a_s b_s$ sind dann schon konjugierte Durchmesser von B_s.

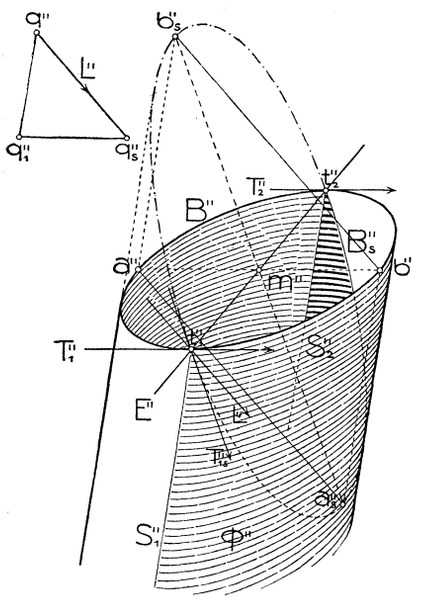


Fig. 193.

Die Diagonalen des Parallelogramms $a a_s b b_s$ werden von den durch seine Mitte m gezogenen Parallelen zu den Seiten harmonisch getrennt. Nun sind diese vier Geraden parallel zu den Tangenten T_1 und T_{1s} an B und B_s in t_1, sowie zum Lichtstrahl und zur Zylindererzeugenden durch diesen Punkt. Mithin sind die letzten vier Geraden ebenfalls harmonisch. Damit ist die Gültigkeit des Satzes 1 auch für Zylinderflächen zweiter Ordnung bewiesen.

Satz 1 ist übrigens nur ein Sonderfall des allgemeineren Satzes 6 in Nr. 120.

Der elliptische Schatten, den ein ebener Rand einer Kegel- oder Zylinderfläche zweiter Ordnung ins Innere wirft, geht durch die beiden Schnittpunkte des Randes mit der Eigenschattengrenze; demnach *muß die konkave Seite des Schlagschattens in dem einen Punkt stets dem*

Hosted by Google

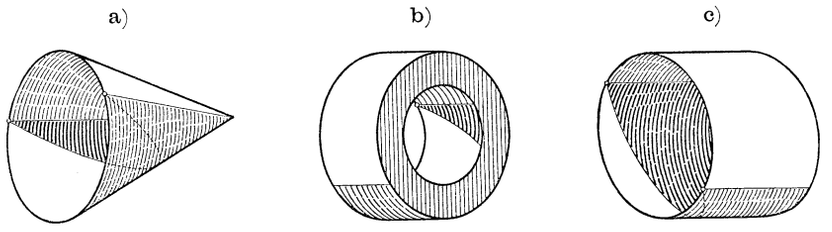


Fig. 194 a—c.

andern Punkt zugewendet sein. Diese Bemerkung ist besonders beim freihändigen Zeichnen wohl zu beachten. Vgl. diesbezüglich außer den Fig. 184, 192, 193 noch 194 a, b, c. Fig. 195 zeigt endlich noch die Schattenkonstruktion an einem halben Drehzylinder, der senkrecht zu Π_1 steht. Sowohl ab und $c_s d_s$ als auch $e_s f_s$ und $g_s h_s$ sind Paare konjugierter Durchmesser des Schlagschattens B_s des Randes B auf den Halbzylinder.

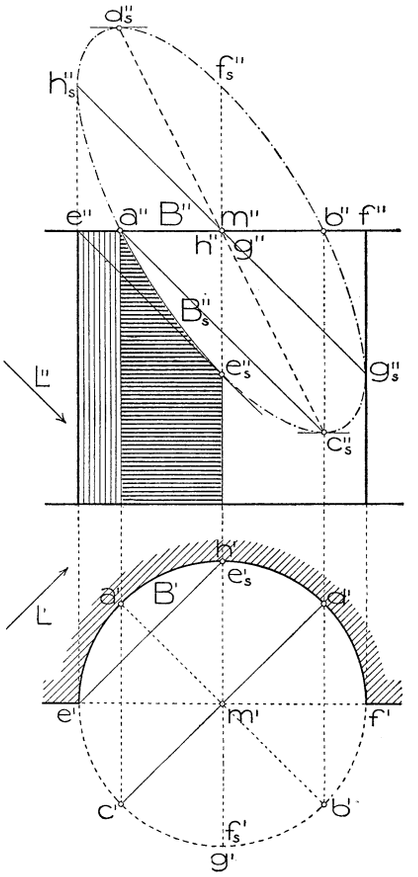


Fig. 195.

100. Durchdringung von Kegel- und Zylinderflächen im allgemeinen und solchen zweiter Ordnung im besondern. Die gewöhnlich angewandte allgemeine Methode, die Durchdringungskurve zweier krummen Flächen Φ_1 und Φ_2 zeichnerisch zu ermitteln, besteht darin, daß man beide Flächen durch eine Schar passend gewählter Hilfsebenen schneidet. In jeder solchen Ebene erhält man zwei Kurven, deren gemeinsame Punkte der Durchdringungs- oder Schnittkurve angehören. Die Hilfsebenen wählt man derart, daß die Schnittlinien mit Φ_1 und Φ_2 möglichst einfach ausfallen oder sich doch möglichst einfach zeichnen lassen. In manchen Fällen erzielt man dies besser durch Verwendung von Hilfsflächen statt Hilfsebenen.

Sind Φ_1 und Φ_2 Kegelflächen, so legt man die Hilfsebenen durch die Verbindungslinie S der Spitzen s_1 und s_2, da sie dann jeden der Kegel in Geraden schneiden. Die Fälle des Auftretens von Zylinder-

Hosted by Google

flächen sind darin inbegriffen; die Hilfsebenen gehen dann durch die unendlichfernen Kegelspitzen, d. h. sind zu den betreffenden Zylindererzeugenden parallel.

Da es sich hier um eine Aufgabe über Lagenbeziehungen handelt, kann die zeichnerische Durchführung in der allgemeinen linearen Ab-

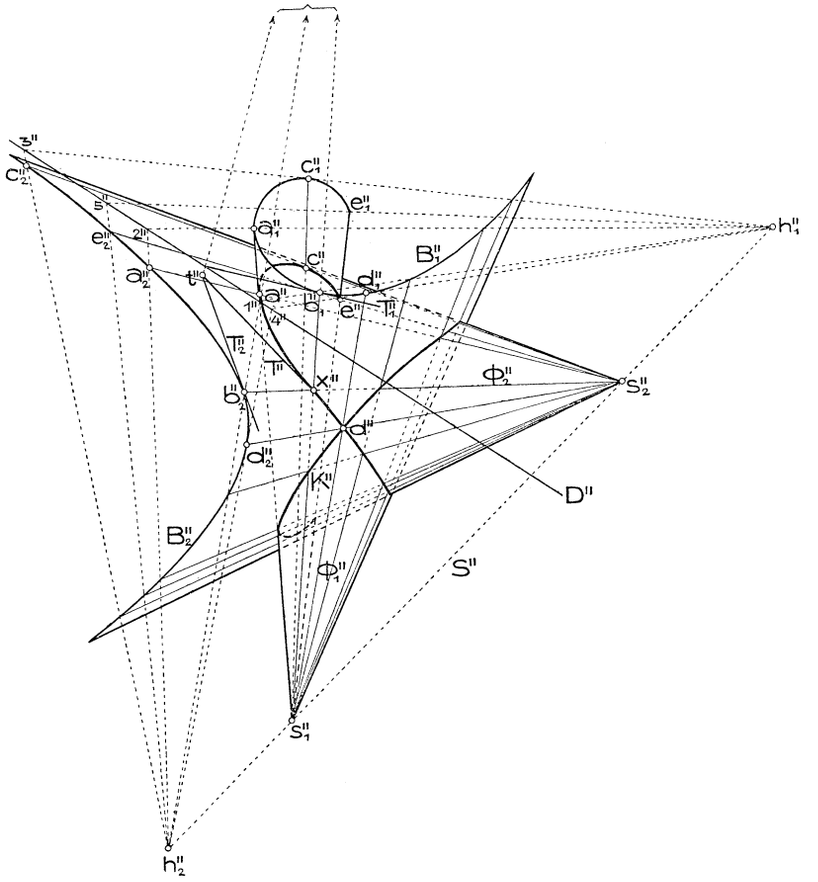


Fig. 196.

bildung (Nr. 25) geschehen. Wir setzen voraus, Φ_1 und Φ_2 seien durch die Bilder ihrer Spitzen s_1, s_2 und der den Ebenen β_1 bzw. β_2 angehörigen Basiskurven B_1, B_2 gegeben. Sucht man unter Verwendung beider Bilder die Geraden $S = [s_1 s_2]$, $D = [\beta_1 \beta_2]$ sowie die Punkte $h_1 = [S\beta_1]$, $h_2 = [S\beta_2]$, so lassen sich die weiteren Konstruktionen in jedem der beiden Bilder allein ausführen, etwa wie in Fig. 196 im zweiten Bilde.

Zieht man durch h_1 in β_1 irgend eine D in 1 schneidende Gerade und verbindet 1 mit h_2, so sind $[h_1 1]$ und $[h_2 1]$ die Spuren einer

Hosted by Google

Hilfsebene durch S auf β_1 und β_2. Wird B_1 von $[h_1 1]$ in b_1, B_2 von $[h_2 1]$ in b_2 getroffen, so sind $[s_1 b_1]$ und $[s_2 b_2]$ Schnittlinien dieser Hilfsebene mit Φ_1 und Φ_2, $x = [s_1 b_1 \cdot s_2 b_2]$ ist daher ein Punkt der Schnittkurve K. Jede solche Hilfsebene liefert natürlich, wenn sie B_1 in n_1 und B_2 in n_2 Punkten schneidet, $n_1 \cdot n_2$ Punkte von K.

Die Tangente T an K in x ist die Schnittlinie der Tangentenebenen τ_1 und τ_2 an Φ_1 bzw. Φ_2 in diesem Punkt (Nr. 73, Satz 3). τ_1 schneidet β_1 in der Tangente T_1 an B_1 in b_1 und schneidet β_2 in der Verbindungslinie des Punktes $[T_1 D]$ und des Spurpunktes $[s_1 b_1 \cdot h_2 1]$ der Erzeugenden $[s_1 b_1]$ auf β_2. Wird diese Gerade von der Spur T_2 der Ebene τ_2 auf β_2, d. h. von der Tangente an B_2 in b_2, im Punkte t getroffen, so ist $T = [tx]$.

Berührt eine Hilfsebene, wie $[h_1 3 h_2]$, den Kegel Φ_1 längs $[s_1 c_1]$, so schneidet sie Φ_2 in Erzeugenden, wie z. B. $[s_2 c_2]$, die K berühren. Dies folgt aus der eben erwähnten Tangentenkonstruktion oder aus der Bemerkung, daß die Berührungserzeugende $[s_1 c_1]$ für zwei benachbarte Erzeugende gilt und diese auf $[s_2 c_2]$ benachbarte Punkte von K ausschneiden.

Gibt es eine beide Kegel gleichzeitig berührende Hilfsebene, wie in Fig. 196 $[h_1 4 h_2]$, so ist der Schnittpunkt d der Berührungserzeugenden $[s_1 d_1]$ und $[s_2 d_2]$ (Nr. 73, Satz 5) Doppelpunkt von K.

Für das Bild K'' sind noch die den Kegelumrissen angehörigen Punkte von K, wie a, von Wichtigkeit, weil in deren Bildern K'' den scheinbaren Umriß berührt, ferner die Punkte in etwaigen Randerzeugenden, wie z. B. e in $[s_1 e_1]$.

Die Konstruktion von K vereinfacht sich natürlich, wenn B_1 und B_2 derselben Ebene angehören, weil sich dann h_1 mit h_2 deckt und von jeder Hilfsebene nur eine Spur zu zeichnen ist. Als Beispiel hierfür kann schon Fig. 182 dienen, wo eigentlich in einem linearen Bilde die Schnittkurve K_s des Kegels $[Bs]$ mit dem Zylinder $[K_1 \| L]$ ermittelt wurde. Ein zweites Beispiel zeigt Fig. 197.

Sind die beiden Kegel Φ_1, Φ_2 von zweiter Ordnung, B_1 und B_2 also Kurven zweiter Ordnung, so ist die Schnittkurve K von vierter Ordnung. Sie besteht, wenn man von ihrem Zerfallen (Nr. 101) absieht, entweder aus einem einzigen geschlossenen Zug oder aus zwei geschlossenen Zügen. Im ersten Fall dringen Φ_1 und Φ_2 ineinander ein (Fall der Eindringung), im zweiten dringt der eine der beiden Kegel durch den andern (Fall der eigentlichen Durchdringung). Ein solcher geschlossener Kurvenzug kann aber mehrmals durch das Unendliche gehen, ähnlich wie eine ebenfalls aus einem Zuge bestehende Hyperbel zweimal durch das Unendliche geht. Die Kurve vierter Ordnung besitzt vier unendlichferne Punkte, von denen entweder alle oder bloß zwei reell oder auch alle imaginär sind; die reellen Punkte z. B. können noch in verschiedener Weise zusammen-

Hosted by Google

fallen. Ein unendlichferner Punkt von K entsteht als Schnitt paralleler Erzeugenden von Φ_1 und Φ_2. Man erhält diese Erzeugenden, wenn man etwa durch s_1 den zu Φ_2 parallelen Kegel $\overline{\Phi}_2$ legt und ihn mit Φ_1 zum Schnitt bringt. Gehören B_1 und B_2 derselben Ebene β an, so wird die Basis $\overline{B}_2$ von $\overline{\Phi}_2$ eine zu B_2 in bezug auf $h = [s_1 s_2 \beta]$ zentrisch-ähnliche Kurve sein. Die Schnittpunkte von $\overline{B}_2$ und B_1 geben, mit s_1 verbunden, die nach den unendlichfernen Punkten von K gehenden Erzeugenden von Φ_1. Die zu einem solchen Punkte gehörige Asymptote (Tangente) ist der Schnitt der Tangentenebenen in den parallelen Erzeugenden von Φ_1 und Φ_2. Fällt diese Schnittlinie selbst ins Unendliche, so heißt der betreffende Kurvenast parabolisch.

Besitzen zwei beliebige Kegel Φ_1 und Φ_2 eine gemeinsame Berührungsebene, so hat K einen Doppelpunkt (Nr. 73, Satz 5). Sind Φ_1, Φ_2 von zweiter Ordnung, so entsteht ein solcher jedoch auch, wenn der Scheitel des einen Kegels dem andern Kegel angehört, weil jede Ebene durch diesen Scheitel mit K zwei hier zusammenfallende Punkte gemeinsam hat. Liegt z. B. s_2 auf Φ_1, so erkennt man aus der Durchführung der Konstruktion der Schnittkurve K, daß die Tangenten im Doppelpunkt s_2 jene Erzeugenden sind, welche die Tangentenebene an Φ_1 in diesem Punkt aus Φ_2 ausschneidet. Werden sie imaginär oder fallen sie zusammen, so ist s_2 ein *isolierter* bzw. ein *stationärer Punkt* (Nr. 66) von K.

101. Das Zerfallen der Schnittkurve von Kegel- und Zylinderflächen zweiter Ordnung. Die Raumkurven dritter Ordnung. Besitzen die Kegelflächen zweiter Ordnung Φ_1 und Φ_2 zwei gemeinsame Tangentialebenen, so zerfällt ihre Schnittlinie K in zwei Kurven zweiter Ordnung (Nr. 98, Satz 1).

K kann aber auch in eine Gerade und eine *Raumkurve dritter Ordnung* zerfallen. Dies tritt ein, wenn Φ_1 und Φ_2, bei verschiedenen Scheiteln, eine Erzeugende gemeinsam haben. Fig. 197 zeigt in einer Parallelprojektion die Konstruktion der Schnittkurve für den Fall, als die Basiskurven der beiden Kegel in einer Ebene β liegen, B_1 sich als Ellipse und B_2 als Kreis darstellt. Der Punkt $h = [s_1 s_2 \beta]$ gehört jetzt B_1 und B_2 an. Aus der Figur ist die Auffindung der Punkte *I*, *II*, *III*, *IV* von K zu ersehen, von denen *II* und *IV* dem wahren Umriß von Φ_1 angehören. Die Kurve geht durch die Scheitel beider Kegel. Die Tangentenebene längs $[s_1 s_2]$ an Φ_1 schneidet aus Φ_2 die Tangente $[s_2 t_2]$ von K im Punkte s_2 und ebenso schneidet die Tangentenebene längs $[s_1 s_2]$ an Φ_2 aus Φ_1 die Tangente des Punktes s_1 aus. Legt man zur Ermittlung der unendlichfernen Punkte von K durch s_1 den Parallelkegel zu Φ_2, so ist dessen Basis ein zu B_2 bezüglich h zentrisch-

Hosted by Google

ähnlicher Kreis $\overline{B_2}$, dessen Mitte $\overline{m}$ auf $[hm]$ so liegt, daß $[s_1\overline{m}] \| [s_2 m]$ ist. $\overline{B_2}$ schneidet in Fig. 197 B_1 außer in h nur noch in einem reellen Punkt u_1. Bezeichnet u_2 seinen entsprechenden Punkt auf B_2, so sind $[s_1 u_1]$ und $[s_2 u_2]$ jene zwei Erzeugenden, die den reellen unendlichfernen Punkt u von K liefern. Die Tangenten in u_1 an B_1 und in u_2 an B_2 schneiden sich in a; dann ist $A = [au] = [a \| s_1 u_1]$ die zu u gehörige *Asymptote* von K. Das Bild K' von K ist eine Kurve dritter Ordnung mit der Asymptote $A' = [a' \| s_1' u_1']$; K' besitzt, wie nebenbei erwähnt werden soll, stets einen (reellen oder imaginären) Doppelpunkt.

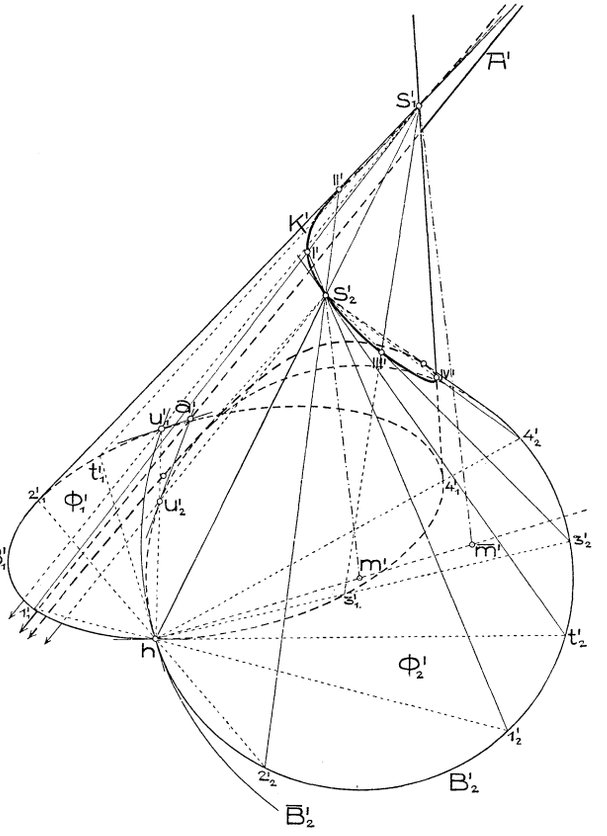


Fig. 197.

Die Raumkurven dritter Ordnung spielen in der Geometrie des Raumes eine ähnliche Rolle wie die Kegelschnitte in der Geometrie der Ebene; sie werden zuweilen auch als *kubische Kegelschnitte* bezeichnet. Projiziert man eine Raumkurve dritter Ordnung K aus einem ihrer Punkte s, so erhält man eine Kegelfläche zweiter Ordnung (Nr. 68, zweiter Absatz nach Satz 6). Denn jede Ebene durch s schneidet K noch in zwei Punkten, mithin den projizierenden Kegel in zwei Erzeugenden. Eine Raumkurve dritter Ordnung gehört demnach unendlich vielen Kegelflächen zweiter Ordnung an und schneidet die Erzeugenden einer jeden von ihnen außer der Spitze noch in je einem Punkt; die Kurve besteht mithin aus einem einzigen geschlossenen Zug. Aus jedem ihrer unendlichfernen Punkte wird K durch einen Zylinder zweiter Ordnung projiziert. Da K mindestens einen reellen unendlichfernen Punkt besitzt, so liegt sie stets auf mindestens einem Zylinder zweiter Ordnung.

Hosted by Google

Die Raumkurven dritter Ordnung teilt man, ähnlich wie die Kegelschnitte, nach Zahl und gegenseitiger Lage ihrer reellen unendlichfernen Punkte in Arten ein. Man nennt K:

a) *Kubische Ellipse*, wenn sie nur einen reellen unendlichfernen Punkt hat (Fig. 197). Sie gehört einem elliptischen Zylinder an.

b) *Kubische Hyperbel*, wenn sie drei getrennte reelle unendlichferne Punkte hat. Sie gehört drei hyperbolischen Zylindern an (Fig. 198 a).

c) *Kubische hyperbolische Parabel*, wenn von den drei reellen unendlichfernen Punkten zwei zusammenfallen. Sie gehört einem hyperbolischen und einem parabolischen Zylinder an (Fig. 198 b).

d) *Kubische Parabel*, wenn die drei reellen unendlichfernen Punkte in einen zusammenfallen oder, anders ausgedrückt, wenn die unendlichferne Ebene Schmiegebene der Kurve ist. Sie gehört einem parabolischen Zylinder an (Fig. 198 c).

Die Fig. 198 a, b, c zeigen die letzten drei Arten der kubischen Kegelschnitte in Parallelprojektion auf je einem Zylinder; sie wurden erhalten, indem man den betreffenden Zylinder mit einem Kegel zweiter Ordnung zum Schnitt brachte, der eine Erzeugende mit ihm gemein hat.

Berühren sich zwei Kegel zweiter Ordnung längs einer Erzeugenden, ohne daß die Scheitel zusammenfallen, so zerfällt ihre Schnittkurve in die doppeltzählende Erzeugende und eine Kurve zweiter Ordnung. Dieser Fall ergäbe sich in Fig. 197, wenn die Basiskurven B_1 und B_2 einander in h berührten.

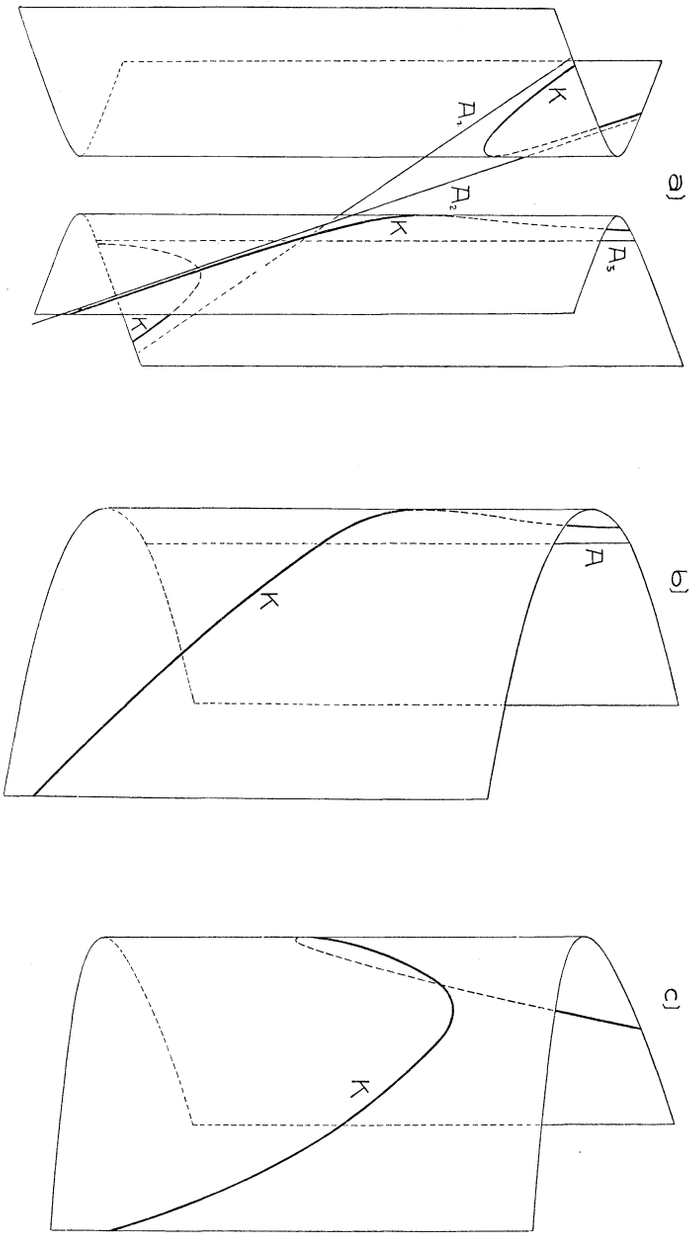
Haben Φ_1 und Φ_2 die Spitzen gemeinsam, so zerfällt ihre Schnittlinie in vier Gerade, die wieder auf verschiedene Arten zusammenfallen können.

102. Konstruktion der Schnittkurve von Kegel- und Zylinderflächen zweiter Ordnung, insbesondre von Drehkegeln und Drehzylindern bei speziellen Lagen gegen die Rißebenen. Bei speziellen Lagen der sich schneidenden Kegel- und Zylinderflächen zweiter Ordnung gegen die Rißebenen lassen sich Vereinfachungen der allgemeinen Konstruktionsmethode erzielen oder sogar andre Methoden bequemer anwenden. Sollte z. B. ein Drehkegel mit vertikaler Achse mit einem horizontalen Zylinder zum Schnitt gebracht werden, so kann man statt der Hilfsebenen durch die Spitze des Kegels parallel zu den Erzeugenden des Zylinders auch solche parallel zu Π_1 verwenden, da sie den Zylinder nach Erzeugenden und den Kegel nach Kreisen schneiden, die sich im Grundriß wieder als Kreise darstellen.

Im technischen Zeichnen tritt sehr häufig die Aufgabe auf:

Die Schnittkurve zweier Drehzylinder Φ_1 und Φ_2 mit zu Π_1 parallelen sich schneidenden Achsen zu ermitteln (Fig. 199).

Hosted by Google



Kubische Hyperbel. Kubische hyperbolische Parabel. Kubische Parabel.

Fig. 198 a—c.

Hosted by Google

Wir wählen dann die Ebene der Zylinderachsen A_1 und A_2 als Π_1. Da beide Flächen bezüglich Π_1 orthogonal-symmetrisch liegen, so gilt das gleiche auch für ihre Schnittkurve K; im Grundriß wird sich daher der oberhalb Π_1 liegende Teil von K mit dem unterhalb Π_1 liegenden decken. Weil nun jeder Punkt von K' doppelt zu zählen ist und der Grundriß der Raumkurve von vierter Ordnung sein soll, so kann eine beliebige Gerade in Π_1 K' nur in zwei Punkten schneiden; *K' ist daher eine (doppelt überdeckt zu denkende) Kurve zweiter Ordnung.* Da sich diese Schlußweise ebenso auf beliebige Flächen zweiter Ordnung anwenden läßt, so gilt der

Satz 1: *Haben zwei Flächen zweiter Ordnung eine gemeinsame Symmetrieebene, so ist der Normalriß ihrer Schnittlinie auf die Symmetrieebene eine Kurve zweiter Ordnung.*

Aus diesem Grunde genügt es, den Schnitt der beiden oberhalb Π_1 liegenden Halbzylinder in Betracht zu ziehen. In dieser Form gerade tritt die Aufgabe als *Durchdringung zweier zylindrischen Tonnengewölbe* auf.

Wir nehmen vorerst an, die Radien r_1 und r_2 der beiden Zylinder wären verschieden, etwa $r_2 < r_1$.

Um den Grundriß der Schnittkurve K nach der allgemeinen Methode (Nr. 100) zu erhalten, haben wir Hilfsebenen parallel Π_1 zu legen. Wählen wir die Normalschnittebenen von Φ_1 und Φ_2 mit den bezüglichen ersten Spuren X_{13} und X_{14} als Seitenrißebenen Π_3 und Π_4, so stellt sich eine Hilfsebene mit dem ersten Tafelabstand z in jedem der Seitenrisse als eine Gerade dar, die im Abstand z zu X_{13} bzw. X_{14} parallel läuft. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Seitenrissen B_1''' und B_2^{IV} der betreffenden Zylinder sind die Seitenrisse der Schnitterzeugenden unserer Hilfsebene mit Φ_1 und Φ_2. Die Grundrisse dieser Erzeugenden schneiden sich in den vier Punkten $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ von K'. Da B_1''' und B_2^{IV} zugleich die Seitenrisse der Schnittkurve sind, stellt sich deren Tangente T im Punkt 1 in den Seitenrissen als die Tangente T''' an B_1''' im Punkt $1'''$ und als die Tangente T^{IV} an B_2^{IV} im Punkt 1^{IV} dar. $t''' = [T''' X_{13}]$ und $t^{IV} = [T^{IV} X_{14}]$ sind dann die Seitenrisse von $t = [T \Pi_1]$, welcher Punkt also im Schnitt der Ordnungslinien durch t''' und t^{IV} liegt. $[t1'] = T'$ ist mithin die Tangente von K' im Punkt $1'$.

Zu den Hilfsebenen gehört auch, $z = 0$ entsprechend, Π_1 selbst, die die Punkte a, b, c, d von K liefert. Die Tangenten an K in diesen Punkten stehen zu Π_1 senkrecht, projizieren sich daher als Punkte. Sie bilden die Grenzpunkte für den Grundriß des reellen Teils von K. Eine andre ausgezeichnete Hilfsebene ist die $z = r_2$ entsprechende Tangentialebene von Φ_2. Sie liefert die Punkte 5, 6 und zugleich in den Schnitterzeugenden mit Φ_1 die Tangenten an K

Hosted by Google

in diesen Punkten (vgl. Nr. 100). Für Hilfsebenen, deren $\varrho > r_2$ ist, ergeben sich keine reellen Punkte von K. Da demnach das Punktepaar *V VI* unter allen auf den Erzeugenden von Φ_2 befindlichen Punktepaaren von K die kürzeste Strecke begrenzt, kann K', als Kurve zweiter Ordnung, nur ein Teil einer *Hyperbel* sein.

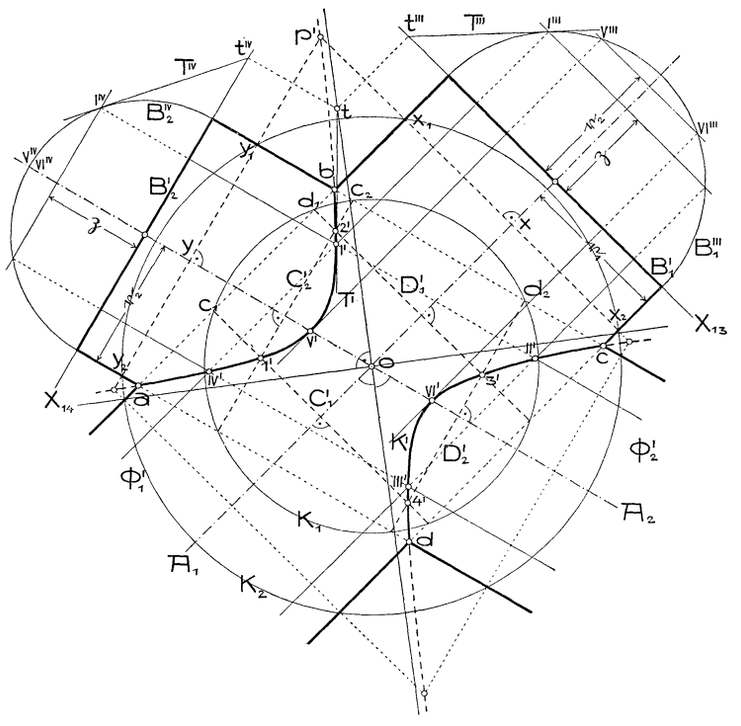


Fig. 199.

Diese Konstruktionsmethode bleibt auch dann anwendbar, wenn A_1 und A_2 sich nicht schneiden oder, noch allgemeiner, wenn die Normalschnitte in Π_3 und Π_4 beliebige Kurven sind.

Bleiben wir jedoch bei der obigen Voraussetzung zweier Drehzylinder mit sich schneidenden Achsen, so läßt sich K' rascher unter Benutzung von *Hilfskugeln um den Schnittpunkt der Zylinderachsen konstruieren.* Es sei ein beliebig um den Achsenschnittpunkt o geschlagener Kreis K_1 der Schnitt einer solchen Hilfskugel $\varkappa_1$ mit Π_1. Trifft K_1 die Mantellinie $[ab]$ von Φ_1 in c_1 und d_1, die Mantellinie $[bc]$ von Φ_2 in c_2 und d_2, so schneidet $\varkappa_1$ den Zylinder Φ_1 in den durch c_1 und d_1 gehenden Normalschnitten C_1 und D_1[1]), ferner den

1) Denn denkt man sich K_1 und gleichzeitig $[ab]$ um A_1 rotieren, so be-

Zylinder Φ_2 in den durch c_2 und d_2 gehenden Normalschnitten C_2 und D_2. Da diese vier Kreise auf einer Kugel liegen, so schneiden sie sich und die Grundrisse ihrer Schnittpunkte sind die gemeinsamen Punkte der Kreisgrundrisse, also die Schnittpunkte $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ des Geradenpaares $C_1' = [c_1 | A_1]$, $D_1' = [d_1 | A_1]$ mit dem Geradenpaar

$$C_2' = [c_2 | A_2],\ D_2' = [d_2 | A_2].$$

Diese Methode liefert noch reelle Punkte von K', wenn man den Halbmesser der Hilfskugel beliebig vergrößert. Betrachtet man z. B. die Kugel $\varkappa_2$, die Π_1 in K_2 schneidet, so haben ihre Schnittkreise mit Φ_1 und Φ_2 keine reellen Punkte gemeinsam. Die Ebenen dieser Kreise schneiden sich aber in vier reellen außerhalb $\varkappa_2$ verlaufenden zu Π_1 normalen Geraden. Jede von ihnen schneidet $\varkappa_2$ in zwei der Schnittkurve $[\Phi_1 \Phi_2]$ angehörigen konjugiert imaginären Punkten, deren Grundriß mit dem der Geraden zusammenfällt, d. h. einen reellen Punkt von K' liefert.

Faßt man diese Erzeugungsweise von K' rein planimetrisch auf, so läßt sich daraus leicht die Gleichung von K', bezogen auf A_1 und A_2 als Koordinatenachsen ableiten. Bezeichnen p' einen der mittels des Kreises K_2 erhaltenen Punkte von K', $\mathfrak{x} = \overline{xp'}$ und $\mathfrak{y} = \overline{yp'}$ seine Normalabstände von A_1 und A_2, ferner x_1x_2 und y_1y_2 die Schnittpunktepaare von K_2 mit $[p' | A_1]$ bzw. $[p' | A_2]$, dann ist (Nr. 84, a))

$$\overline{p'x_1} \cdot \overline{p'x_2} = \overline{p'y_1} \cdot \overline{p'y_2}$$

und

$$\overline{p'x_1} \cdot \overline{p'x_2} = \mathfrak{x}^2 - \mathfrak{r}_1^2$$
$$\overline{p'y_1} \cdot \overline{p'y_2} = \mathfrak{y}^2 - \mathfrak{r}_2^2,$$

demnach die gesuchte Gleichung

$$\mathfrak{y}^2 - \mathfrak{x}^2 = \mathfrak{r}_2^2 - \mathfrak{r}_1^2 = \text{konst.}$$

Führt man darin statt der Normalabstände von A_1 und A_2 die parallel A_2 bzw. A_1 gemessenen Abstände ein, so ändert sich bloß die Konstante. Die Gleichung stellt demnach eine *Hyperbel* dar; da deren Asymptoten, wie aus der Gleichung unmittelbar zu entnehmen, die Winkel zwischen A_1 und A_2 halbieren, also aufeinander senkrecht stehen, ist sie *gleichseitig*.

Diese Methode der Hilfskugeln[1]) *läßt sich allgemein zur Konstruktion der Durchdringungskurve zweier Drehflächen mit sich schnei-*

schreibt K_1 die Kugel $\varkappa_1$, $[ab]$ den Zylinder Φ_1 und c_1 den Kreis C_1, der sowohl $\varkappa_1$ als Φ_1 angehört.

1) Sie findet sich zuerst bei *G. Monge,* Géométrie descriptive, 1re éd., Paris 1798—99, Art. 83. Vgl. die deutsche Ausgabe von *R. Haussner,* Leipzig 1900 (Ostwalds Klassiker, Nr. 117), S. 116. Bezüglich der Deutung der ganzen Kurve K' vgl. *J. V. Poncelet,* Traité des propriétés projectives des figures, 2e éd., Paris 1865, t. I, p. 34 und Fußnote.

Hosted by Google

denden Achsen anwenden, indem man die Ebene dieser Achsen als Rißebene benutzt. Insbesondre kann auf diese Weise die Schnittlinie zweier Drehkegel oder eines Drehzylinders und Drehkegels mit sich schneidenden Achsen ermittelt werden.

Haben die beiden Drehzylinder mit sich schneidenden Achsen gleiche Radien, so besitzen sie zwei zu Π_1 parallele gemeinsame Tangentenebenen. Ihre Schnittkurve zerfällt demnach (Nr. 98, Satz 1) in zwei Kurven zweiter Ordnung, deren Ebenen wegen der symmetrischen Lage der Flächen gegen Π_1 zu dieser Ebene senkrecht stehen. Der Grundriß der Schnittkurve besteht also aus zwei geraden Linien durch den Achsenschnittpunkt o. Dies folgt übrigens, ohne Benutzung jenes allgemeinen Satzes, auch unmittelbar aus der Konstruktion. Sucht man in Fig. 200 (Bezeichnung wie in Fig. 199, nur $r_1 = r_2 = r$) mittels einer zu Π_1 im Abstande ξ parallelen Hilfsebene den Punkt p' von K', so sieht man, daß $x = \overline{A_1 p'}$ und $y = \overline{A_2 p'}$ einander gleich sind, p' also einer der Geraden $[ac]$ oder $[bd]$ angehört, die $\widehat{A_1 A_2}$ halbieren.

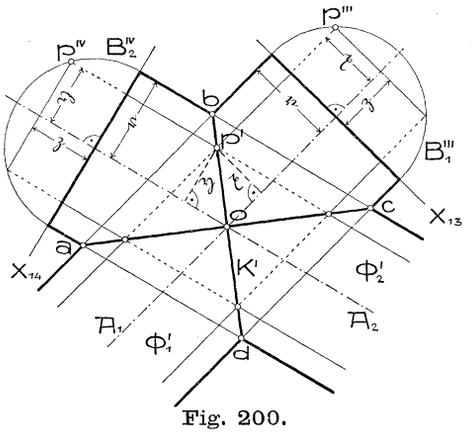


Fig. 200.

103. Gewölbeformen und Stichkappen. Wir wollen jetzt annehmen, die Achsen der beiden gleichgroßen halben Kreiszylinder schneiden sich rechtwinkelig, und betrachten bloß die über dem Quadrat $abcd$ befindlichen Zylinderteile, die also diese Fläche doppelt überdecken. Behält man nun von jedem der Zylinder bloß jene Teile bei, die sich innerhalb des andern befinden, so entsteht ein das Quadrat $abcd$ einfach überdeckendes Gewölbe, das man *Kloster-* oder *Kappengewölbe* nennt (Fig. 201 a). Behält man hingegen von jedem der Zylinder jene Teile bei, die sich außerhalb des andern befinden, so entsteht das *Kreuzgewölbe* (Fig. 201 b). Bei beiden Gewölben heißen die halben Ellipsen, in denen sich die Zylinder durchschneiden, *Gratlinien*, ihr gemeinsamer Punkt s *Gewölbescheitel*. Beim Kreuzgewölbe heißen ferner die die zylindrischen Teile nach außen begrenzenden Bögen $(\widehat{ab}, \widehat{bc}, \widehat{cd}, \widehat{da})$ *Schildbögen* und die Punkte a, b, c, d, in denen das Gewölbe unterstützt wird, *Kämpfer*.

Zerschneidet man ein Tonnengewölbe (einen halben Zylinder) auf die in Fig. 201 c angegebene Art in *Stirnteile* (an der Stirnseite des

Hosted by Google

Tonnengewölbes gelegen) und *Wangen-* oder *Widerlagerteile* (an der Widerlagerseite des Tonnengewölbes gelegen), so können vier Wangenteile zu einem Klostergewölbe, vier Stirnteile zu einem Kreuzgewölbe vereinigt werden. Schneidet man aus der Tonne Wangen- und Stirnteile so aus, daß am Scheitel s Winkel von $\frac{360^0}{n}$ auftreten, dann bilden erst n solche Teile ein Kloster- bzw. Kreuzgewölbe und zwar überdecken sie dann einen regelmäßigen n-seitigen Grundriß. Aus einer Tonne mit elliptischem, spitzbogigem oder noch anders geformtem

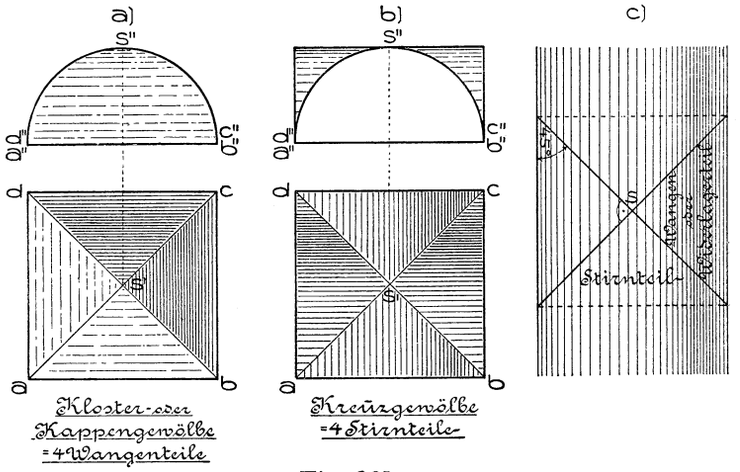


Fig. 201 a—c.

Normalschnitt entstehen auf dieselbe Weise andre Arten von Kloster- oder Kreuzgewölben.

Durchdringungen von Kegel- und Zylinderflächen treten im Hochbau häufig bei den sogenannten *Stichkappen* auf, das sind kleinere Gewölbe, die in ein Hauptgewölbe eindringen und meistens den Zweck haben, den Lichtzutritt zu ermöglichen. Die Fig. 202—204 stellen im Auf- und Kreuzriß (letzterer als Ansicht von rechts) die geometrischen Gerippe zylindrischer und kegelförmiger Stichkappen in Tonnengewölbe dar, nämlich bloß die Innenflächen der sich durchdringenden Gewölbe.

In Fig. 202 dringt in die zu Π_2 senkrechte halbkreisförmige Tonne mit dem Normalschnitt B_1 auf der Widerlagerseite eine schiefzylindrische (fallende) Stichkappe, mit dem zu Π_3 parallelen Halbkreis B_2 als Leitlinie, ein. Diese Kappe setzt sich nach unten in die zwei lotrechten Tangentialebenen fort. Punkte der Schnittkurve K beider Zylinder lassen sich nun nach verschiedenen Methoden finden. Entweder legt man Hilfsebenen $\| \Pi_3$; jede solche schneidet die Tonne nach einer Erzeugenden, die Stichkappe nach einem mit B_2 kongruenten

Hosted by Google

Kreis, dessen Zentrum der durch die Mitte m von B_2 parallel zu den Erzeugenden gezogenen Achse A_2 angehört. Auf diese Art wurden die

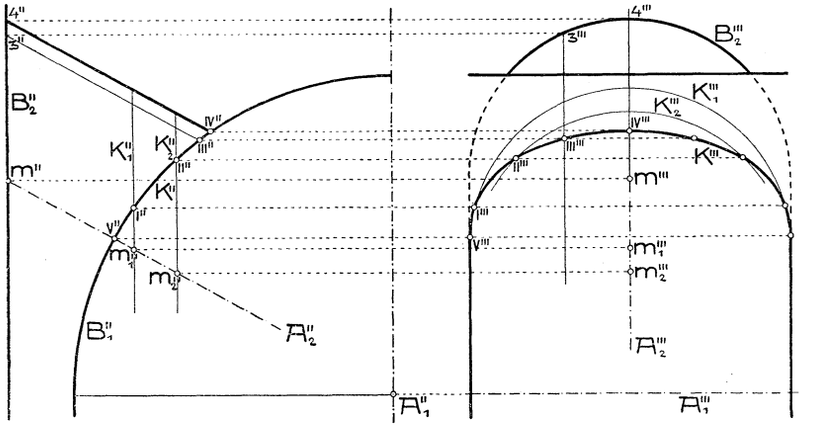


Fig. 202.

Punkte *I* und *II* erhalten. Oder man legt Hilfsebenen $\| \Pi_2$; jede solche schneidet die Stichkappe nach einer Erzeugenden, die Tonne nach einem Kreis, dessen Aufriß sich mit B_1'' deckt. Auf diese Art

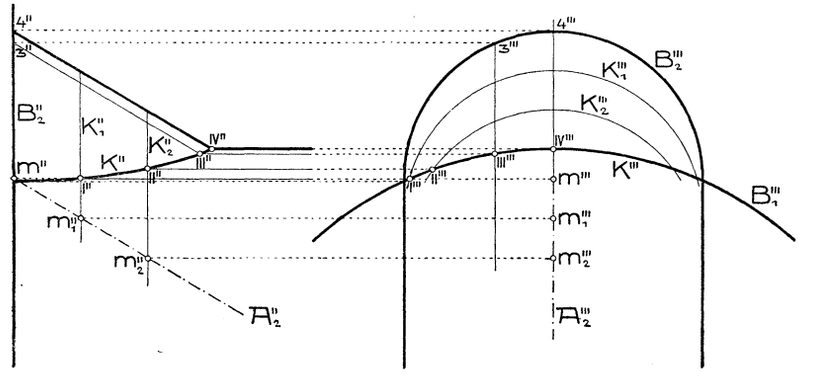


Fig. 203.

wurde *III* erhalten. Dieselben Hilfslinien ergeben sich, wenn man Hilfsebenen parallel zu den Erzeugenden beider Zylinder legt. Man kann aber die Aufgabe auch so auffassen, daß von einer dem schiefen Zylinder durch B_2 angehörigen Kurve K der Aufriß $K'' = B_1''$ gegeben, der Kreuzriß zu suchen ist. Die Hilfslinien ändern sich auch bei dieser Auffassung nicht.

In Fig. 203 dringt in eine zu Π_3 senkrechte flache Tonne mit dem Normalschnitt B_1 auf deren Stirnseite eine schiefzylindrische

Hosted by Google

(fallende) Stichkappe mit dem zu Π_3 parallelen Halbkreis B_2 als Basis ein. Die Punkte *I* und *II* wurden mittels Hilfsebenen $\| \Pi_3$, die Punkte *III* und *IV* mittels Hilfsebenen $\| \Pi_2$ erhalten.

Fig. 204 unterscheidet sich von Fig. 202 nur darin, daß statt einer zylindrischen eine kegelförmige Stichkappe (aus dem Punkt s) durch den Halbkreis B_2 gelegt wurde, die sich nach unten in die lotrechten Tangentenebenen an diesen Kegel fortsetzt. Punkt *I* der Durchdringungskurve K wurde mittels einer Hilfsebene $\| \Pi_3$, die

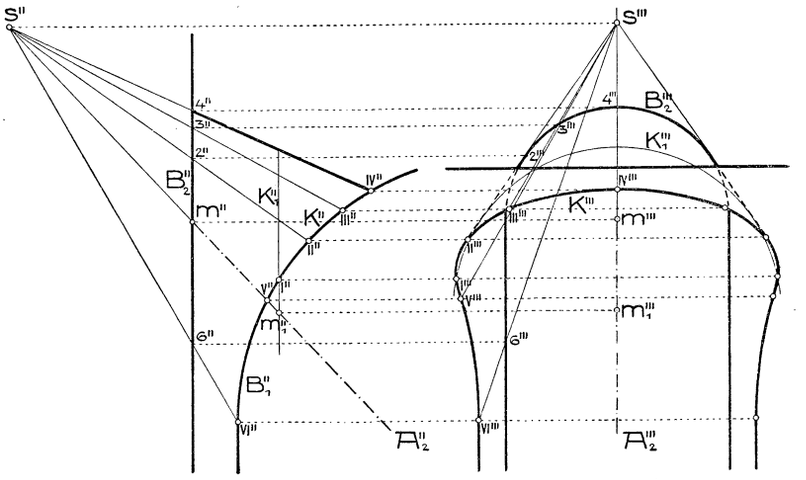


Fig. 204.

übrigen Punkte wurden dadurch erhalten, daß man verschiedene Kegelerzeugende mit der Tonne zum Schnitt brachte, wobei die Aufrisse der Schnittpunkte schon B_1'' angehörten. Auf diese Weise ergaben sich auch die (elliptischen) Schnitte der ebenen Fortsetzungen der Stichkappe mit der Tonne.

Übungsaufgaben. Man zeichne, ähnlich wie bei den auf S. 69 angeführten Übungsaufgaben, architektonische Einzelheiten, an denen Kegel- und Zylinderflächen auftreten (wie Gesimse, Tür- und Fensterumrahmungen, Stichkappen und Gewölbeformen), oder Maschineneinzelheiten in größerem Maßstabe und konstruiere außer den etwa auftretenden Durchdringungskurven die Schatten für Parallelbeleuchtung.

104. Einige Konstruktionen für abwickelbare Flächen. Jede (nicht kegelförmige oder zylindrische) abwickelbare Fläche Φ ist (Nr. 72, Satz 1) die Tangentenfläche einer Raumkurve K, ihrer Gratlinie oder Rückkehrkante. Ist diese durch zwei Normalrisse etwa K'' und K' gegeben (Fig. 205), *so läßt sich zu dem einen Riß eines jeden der Fläche Φ angehörigen Punktes p der andre Riß finden.* Nehmen

Hosted by Google

wir p'' als gegeben an, so ist jede aus ihm an K'' legbare Tangente, wie E_1'', E_2'', der Aufriß einer Flächenerzeugenden, der p angehören kann. Auf den mittels der Berührungspunkte e_1, e_2 zu konstruierenden Grundrissen von E_1 und E_2 liegen in der Ordungslinie durch p'' die gesuchten Grundrisse p_1' und p_2'. Die Aufgabe läßt soviele Lösungen zu, als aus p'' Tangenten an K'' legbar sind.

Die Schnittkurve von Φ mit einer ebenen oder krummen Fläche Ψ ist die stetige Verbindungslinie der Schnittpunkte von Ψ mit einer hinreichenden Anzahl Erzeugender von Φ. Die Kurve hat in den Schnittpunkten mit der Gratlinie Spitzen (Nr. 72, Abschnitt nach Satz 1).

Die *Tangentialebene an Φ in einem Punkte p* enthält die Erzeugende E durch p und die Tangente einer beliebig auf Φ gezogenen Kurve C in ihrem Schnittpunkt mit E. C kann z. B. als ein ebener Schnitt von Φ, insbesondre auch als der Schnitt mit der unendlichfernen Ebene Ω gewählt werden. Legt man durch einen beliebigen Punkt s die Parallelen zu den Erzeugenden, so erfüllen sie einen Kegel φ, den *Richtkegel* von Φ, der Ω nach derselben Kurve wie Φ schneidet; die Tangentialebenen in entsprechenden, d. h. parallelen Erzeugenden von Φ und φ sind demnach parallel.

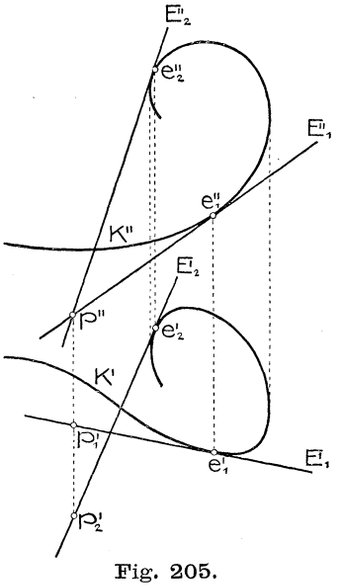


Fig. 205.

Wird φ als bekannt vorausgesetzt, so besteht die *Eigenschattengrenze von Φ* für Parallelbeleuchtung aus jenen Erzeugenden (Nr. 73, Satz 2), die zur Eigenschattengrenze von φ parallel sind. Die Grenze des Schlagschattens von Φ auf eine Ebene besteht also aus einer Anzahl (mitunter imaginärer) gerader Linien. Den Schlagschatten irgend einer Kurve auf die Fläche Φ wird man mit Hilfe des Schlagschattens der Kurve und einer Anzahl Erzeugender von Φ auf eine passend gewählte Ebene nach der Methode des Zurückführens (Nr. 95) konstruieren.

Die Ermittlung der Eigenschattengrenze ist identisch mit der Aufgabe, parallel zu einer Geraden (oder aus einem unendlichfernen Punkt) die Tangentenebenen an Φ zu legen. Um *aus einem endlichfernen, außerhalb Φ gelegenen Punkt l die Tangentenebenen an die Fläche zu legen,* schneidet man Φ mit einer beliebigen Ebene ε durch l und zieht an die Schnittkurve aus l die Tangenten. Jede von ihnen bestimmt mit der Erzeugenden durch den Berührungspunkt eine Tangentenebene von Φ.

Hosted by Google

Häufig ist eine abwickelbare Fläche nicht durch ihre Gratlinie, sondern als Hüllfläche einer sich im Raume gesetzmäßig bewegenden Ebene gegeben (Nr. 73). Nach dieser Definition erkennt man in der abwickelbaren Fläche das duale Gebilde zur Raumkurve als Punktort (Nr. 73, S. 145). Das Gesetz für die Bewegung der Ebene kann dadurch gegeben sein, daß sie beständig zwei Flächen (*Leitflächen*) oder zwei ebene oder unebene Kurven L und M (*Leitlinien*) berühren soll. Sind l und m die Berührungspunkte einer Ebene ε mit L und M, so ist $[lm]$ eine Erzeugende der abwickelbaren Fläche Φ. Denn die benachbarte Lage von ε enthält die Tangenten in den zu l und m benachbarten Punkten von L bzw. M; diese Tangenten enthalten aber wieder l bzw. m, ihre Verbindungsebene schneidet also ε in $[lm]$. Die Tangenten in l und m schneiden sich; mithin sind die Erzeugenden von Φ die Verbindungslinien der Berührungspunkte solcher Tangenten von L und M, die sich schneiden. Für ebene Kurven L und M braucht man bloß aus den Punkten der Schnittlinie ihrer Ebenen die Tangenten an L und M zu ziehen und die Verbindungsebenen zu legen, um Tangentialebenen von Φ zu erhalten. Diese Konstruktion der abwickelbaren Fläche ist dual zur Konstruktion der Durchdringungskurve zweier Kegelflächen.

105. Schraubenlinie und abwickelbare Schraubenfläche. Als erstes Beispiel für eine abwickelbare Fläche soll die Tangentenfläche einer Schraubenlinie dienen. Aus diesem Grunde wollen wir uns kurz mit dieser technisch wichtigen Raumkurve beschäftigen.

Bewegt sich ein Punkt p gleichförmig auf einer Geraden G, während diese sich gleichförmig um eine parallele Achse A dreht, so beschreibt p eine *Schraubenlinie*. Sie liegt also stets auf einem Drehzylinder, dem *Schraubenzylinder*; seine Achse A heißt auch *Achse der Schraubenlinie*. Steht A zu einer Rißebene, etwa Π_1, senkrecht, so ist die Schraubenlinie leicht darstellbar. Wir nehmen an, es sei außer dem Schraubenzylinder noch die Strecke $\mathfrak{h}$ gegeben, um die sich p auf G fortbewegt, während G eine ganze Umdrehung um A vollführt, die sogenannte *Ganghöhe* der Schraubenlinie. Ist nun (Fig. 206) K_1 der durch die Anfangslage 1 des Punktes p gehende Kreis des Schraubenzylinders, so teile man im Grundriß seinen Umfang in n ($= 12, 16, \ldots$) gleiche Teile und trage im Aufriß auf einer lotrechten Geraden von K_1'' aus $\frac{\mathfrak{h}}{n}$ wiederholt auf. Kommt G bei der Drehung um A nach dem Teilpunkt $2'$ von K_1, so wird sich p um $\frac{\mathfrak{h}}{n}$ erhoben haben, kommt G nach $3'$, so wird p wieder um $\frac{\mathfrak{h}}{n}$ höher liegen usw. Dadurch sind die Aufrisse $2''$, $3''$, ... der verschiedenen Lagen von p gegeben. Eine leichte Rechnung zeigt, daß der Aufriß der Schraubenlinie eine *Sinuslinie* ist.

Hosted by Google

Die Darstellung einer Schraubenlinie bei allgemeiner Lage ihrer Achse kann mittels Seitenrissen auf die eben behandelte Aufgabe zurückgeführt werden.

Denkt man sich eine menschliche Figur der Länge nach in die Schraubenachse gestellt, so wird ein auf der Schraubenlinie nach abwärts (d. h. in der Kopf-Fußrichtung) sich bewegender Punkt für die Figur eine Drehung „rechtsum“ oder „linksum“ um die Achse ausführen. Diese Beziehung bleibt ungeändert, wenn man die menschliche Figur umgekehrt in die Achse stellt. Jenachdem nun das eine oder andre eintritt, nennt man die Schraubenlinie *rechtsgängig* oder *linksgängig*. Sie ist dann nach Nr. 67 in allen Punkten rechts- bzw. linksgewunden. Die in Fig. 206 dargestellte Schraubenlinie ist rechtsgängig.

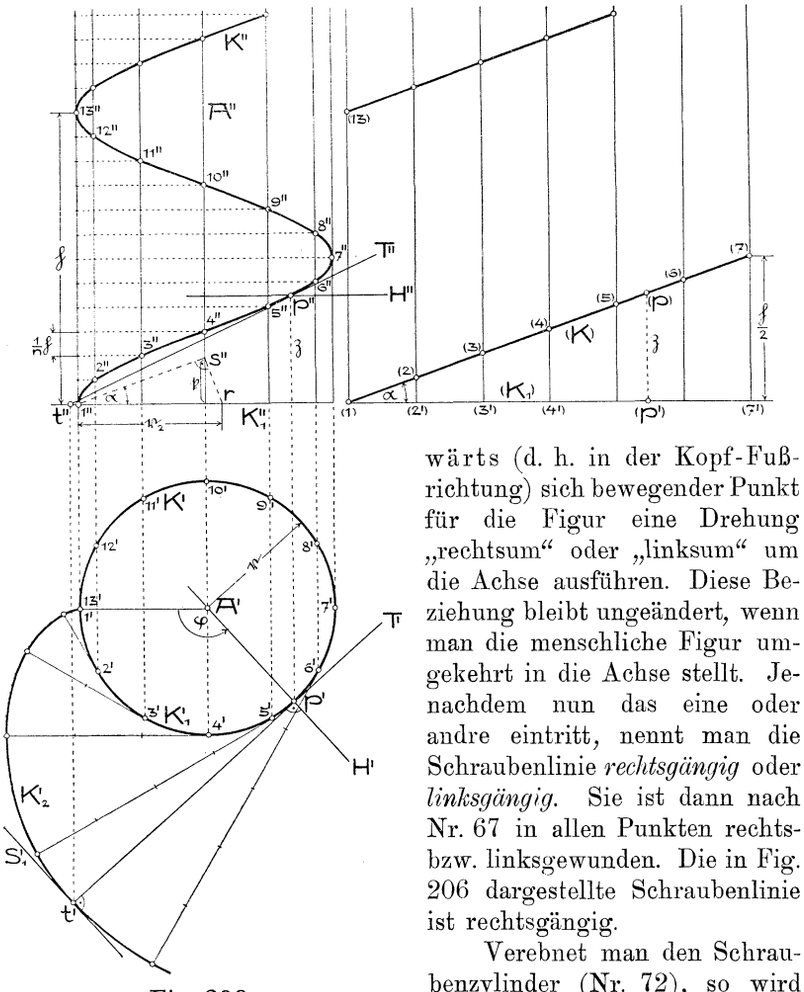


Fig. 206.

Verebnet man den Schraubenzylinder (Nr. 72), so wird aus K_1 eine gerade Linie (K_1), deren Länge man näherungsweise erhält, wenn man die zum n^{ten} Teil des Umfangs gehörige Sehne n-mal abträgt, oder genauer, wenn man den halben Umfang nach *Kochansky* ermittelt (Nr. 62). Wird diese Strecke in n Teile geteilt, so gehen durch die Teilpunkte $(2')$, $(3')$, ... die Erzeugenden des abgewickelten Zylinders, auf denen die Abstände

Hosted by Google

der Punkte der Schraubenlinie von K_1 ungeändert aufzutragen sind. Sei p irgend ein Punkt der Schraubenlinie K, φ der zum Bogen $1p'$ von K_1 gehörige Zentriwinkel (im Bogenmaß) und $\mathfrak{z} = \overline{p'p} = \overline{(p')(p)}$ die Höhe von p über K_1, so ist nach der Definition von K

$$\frac{\mathfrak{z}}{\varphi} = \mathfrak{k} \tag{a}$$

eine Konstante, also auch $\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{r}\varphi} = \frac{\mathfrak{z}}{\overline{(1)(p')}}$ konstant. Dies sagt aber aus, daß die Schraubenlinie bei obiger Abwicklung in eine Gerade (K) oder genauer, wenn man die ganze Schraubenlinie in Betracht zieht, in eine Schar paralleler Strecken übergeht. Diese Strecken schließen mit (K_1) den durch

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{r}\varphi} = \frac{\mathfrak{h}}{2\mathfrak{r}\pi} \tag{b}$$

gegebenen Winkel α ein. Zieht man umgekehrt auf dem verebneten Schraubenzylinder eine beliebige unter dem Winkel α gegen (K_1) geneigte Gerade, so wird daraus bei der Aufwicklung eine Schraubenlinie mit der Horizontalneigung (dem *Steigwinkel* oder auch *Fallwinkel*) α, d. h. alle Linienelemente, mithin auch alle Tangenten der Schraubenlinie, schließen mit den zu A normalen Ebenen den Winkel α ein. *Die Schraubenlinien sind daher* (Nr. 74, Satz 2) *die geodätischen Linien der Drehzylinder.*[1]) Den Grenzwerten $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ entsprechen die Kreise und die Zylindererzeugenden. Durch zwei gegebene Punkte eines Drehzylinders läßt sich auf diesem nur eine Schraubenlinie ziehen, sobald noch deren Sinn (rechts- oder linksgängig) und Windungszahl zwischen den Punkten gegeben sind.

Die oben (Gl. (a)) erwähnte Konstante $\mathfrak{k}$ heißt der *Parameter* der Schraubenlinie. Zufolge der Gleichung (b) ist

$$\mathfrak{k} = \frac{\mathfrak{h}}{2\pi} \tag{c}$$

oder auch

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{r}\operatorname{tg}\alpha. \tag{d}$$

Die Größe $\operatorname{tg}\alpha$ wollen wir entweder die *Steigung* oder den *Fall der Schraubenlinie* nennen.

Kennt man aus der Verebnung den Winkel α, so läßt sich nach Gl. (d) $\mathfrak{k}$ leicht als Strecke konstruieren. Zieht man nämlich (in Fig. 206) durch $1''$ eine unter α gegen K_1'' geneigte Gerade bis zum Schnitt s'' mit

1) Die geodätischen Linien beliebiger Zylinder nennt man zum Unterschied von den im Text behandelten *gewöhnlichen Schraubenlinien* auch *allgemeine Schraubenlinien*. Es sind dies jene Raumkurven, deren Elemente (oder Tangenten) gegen eine feste Ebene dieselbe Neigung haben. Manche Eigenschaften der gewöhnlichen Schraubenlinien gelten auch für die allgemeinen.

Hosted by Google

A'', so ist $\mathfrak{k} = \overline{K_1''s''}$. Diese Strecke heißt die *reduzierte Ganghöhe* der Schraubenlinie. Sie ist zufolge Gl. (a) die zum Drehungswinkel $\varphi = 1$ gehörige Steighöhe eines Punktes der Schraubenlinie.

Die Gerade $[1''s'']$ ist übrigens auch parallel zur Tangente an K'' im Punkte $4''$.

Man denke sich den Schraubenzylinder doppelt, einmal fest und einmal beweglich, und auf beiden die Schraubenlinie gezeichnet; bewegt man dann letzteren Zylinder derart um A, daß ein Punkt die feste Schraubenlinie beschreibt, so verbleibt jeder Punkt der beweglichen Schraubenlinie auf der festen. Mit andern Worten, *die Schraubenlinie ist in sich selbst verschiebbar.* Sie teilt diese Eigenschaft nur mit der Geraden und dem Kreise. Daraus folgt, daß die Schraubenlinie in jedem ihrer Punkte gleich gestaltet ist, z. B. überall dieselbe Krümmung und Torsion hat, daß ferner ihre Tangenten und Schmiegebenen gleiche Lage gegen A haben.

Trifft die Tangente des Punktes p der Schraubenlinie K die Ebene Π_1, der K_1 angehört, in t, so ist, wegen $\widehat{p't}p = \alpha$,

$$\overline{p't} = \frac{\mathfrak{k}}{\operatorname{tg}\alpha} = \mathfrak{r}\varphi,$$

also gleich dem zum Zentriwinkel φ gehörigen Bogen $1p'$ von K_1, der aus der Verebnung entnommen werden kann $(= \overline{(1)(p')})$. Mittels t läßt sich die Tangente $T = [pt]$ im Aufriß zeichnen.

Der Ort der Punkte t ist zufolge der eben gefundenen Eigenschaft die Evolvente K_2 des Kreises K_1 (Nr. 62). K_2 ist zugleich der Schnitt der Tangentenfläche von K, d. h. der zu K gehörigen *abwickelbaren Schraubenfläche*, mit Π_1.

Weil K geodätische Linie des Schraubenzylinders ist, *sind die Schmiegebenen von K Normalebenen des Schraubenzylinders in den Berührungspunkten* (Nr. 74). Die Schmiegebene σ des Punktes p enthält daher außer der Tangente T an K die Zylindernormale H in p. H ist erste Hauptlinie, T also erste Fallinie von σ und die Horizontalneigung dieser Ebene $= \alpha$. Die Spur S_1 von σ auf der Ebene Π_1 berührt K_2 in t und ist zu T' normal. In Fig. 206 stehen die Schmiegebenen von K in den Punkten 4 und 10 zur Aufrißebene senkrecht; K'' besitzt deshalb in $4''$ und $10''$ Wendepunkte (Nr. 68, Satz 5).

σ schneidet den Schraubenzylinder in einer Ellipse E, die in p mit der Schraubenlinie drei benachbarte Punkte, mithin auch den Krümmungskreis gemeinsam hat. Da die durch p gehende Hauptlinie H von σ die Zylinderachse A schneidet, ist p Endpunkt der kleinen Achse von E und, da die Halbachsen dieser Ellipse die Längen $\mathfrak{b} = \mathfrak{r}$, $\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{r}}{\cos\alpha}$ haben, ist der Krümmungsradius $\mathfrak{r}_2$ der Ellipse, mithin auch der Schraubenlinie, in p (Nr. 77, S. 156)

Hosted by Google

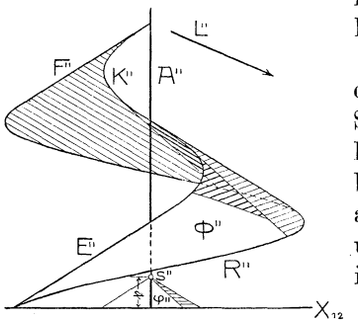
$$\mathfrak{r}_2 = \frac{\mathfrak{a}^2}{\mathfrak{b}} = \frac{\mathfrak{r}}{\cos^2 \alpha}.$$

Man hat also

Satz 1: *Der Krümmungsradius einer Schraubenlinie ist gleich dem Radius des Schraubenzylinders, dividiert durch das Quadrat des Kosinus ihres Steigwinkels (d. i. jenes Winkels, unter dem die Schraubenlinie gegen die Normalebene ihrer Achse geneigt ist).*

Zur zeichnerischen Ermittlung von $\mathfrak{r}_2$ hat man in Fig. 206 bloß $[s'' \; 1'' s'']$ bis zum Schnitt r mit K_1'' zu ziehen; dann ist $\mathfrak{r}_2 = \overline{1'' r}$.

Die Mittelpunkte der Krümmungskreise von K gehören einer koachsialen Schraubenlinie von gleicher Ganghöhe an, deren Zylinder den Radius $\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}$ besitzt. Dies folgt sofort aus der Bemerkung, daß bei der Verschiebung einer Schraubenlinie in sich selbst jeder mit ihr starr verbunden gedachte Punkt eine koachsiale Schraubenlinie beschreibt.



Aus dieser Bemerkung folgt auch, daß die zu K gehörige abwickelbare Schraubenfläche Φ von jedem mit K koachsialen Drehzylinder in einer Schraubenlinie geschnitten wird (Fig. 207). Diese abwickelbare Schraubenfläche besteht aus unendlich vielen Gängen, deren jeder sich ins Unendliche erstreckt. Je zwei Gänge

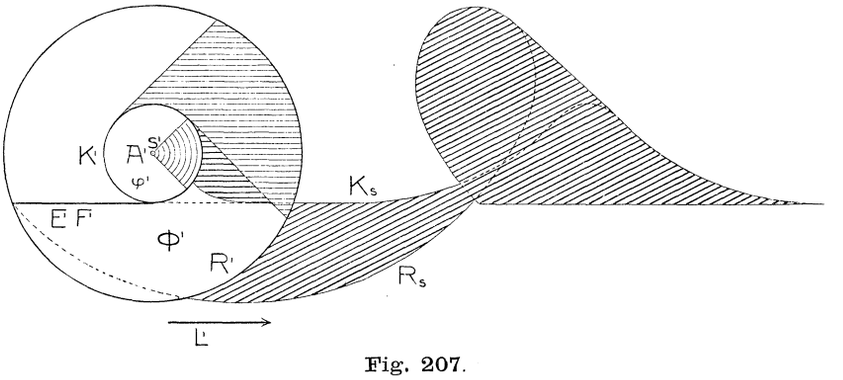


Fig. 207.

durchschneiden sich in einer *Doppelkurve*, die wieder eine Schraubenlinie sein muß.

Der Richtkegel von Φ ist ein Drehkegel φ mit zu A paralleler Achse, dessen Mantellinien mit Π_1 den Winkel α einschließen. *Wählt man seine Spitze s auf A im Abstande* $\mathfrak{k}$ *oberhalb* Π_1, *so ist* K' *sein Schnittkreis mit* Π_1, wie aus Gl. (d) unmittelbar hervorgeht.

Hosted by Google

Mit Hilfe dieses Richtkegels lassen sich die Asymptoten der Schnittkurve von Φ mit einer beliebigen Ebene ε leicht ermitteln. Legt man nämlich durch s die Parallelebene zu ε, so schneidet sie φ in jenen Erzeugenden, deren entsprechende auf Φ die Ebene ε in unendlichfernen Punkten treffen. Die Tangentenebenen an Φ längs dieser Erzeugenden sind zu den entsprechenden Tangentenebenen an φ parallel und schneiden ε in den gesuchten Asymptoten (Nr. 73, Satz 4 samt Nachsatz). Der Schnitt von Φ mit der zu Π_2 parallelen Ebene durch A heißt die *Meridiankurve* der Schraubenfläche. Sie besteht aus unendlich vielen kongruenten, sich ins Unendliche erstreckenden Zügen, die in den Schnittpunkten mit K Spitzen besitzen.

Die Eigenschattengrenze von Φ bei Parallelbeleuchtung besteht aus Erzeugenden, die sich im Grundriß als die zur Eigenschattengrenze von φ parallelen Tangenten an K' darstellen. Zeichnet man bloß einen Mantel von Φ, diesen noch durch eine Schraubenlinie R und zwei Erzeugende E, F begrenzt (Fig. 207), so werfen die Randkurven K, R, E, F Schlagschatten auf Φ, die nach der in Nr. 95 besprochenen Methode des Zurückführens konstruiert werden können; Π_1 wird man dabei als die Hilfsebene benutzen, auf die man die Schlagschatten aufsucht. Die Schlagschatten K_s und R_s der Schraubenlinien K und R sind dabei *Zykloiden*.

Zum Beweise dieses Satzes denken wir uns die Schraubenlinie K, in Übereinstimmung mit der früheren Definition, dadurch entstanden, daß (Fig. 208) Punkt p einen Kreis M gleichförmig durchläuft, der seine Mitte m in A hat und dessen Ebene zu A senkrecht steht, während M selbst sich gleichförmig parallel zu A verschiebt. Der Schatten p_s von p auf Π_1 bewegt sich dann auf dem Schattenkreis M_s mit derselben Geschwindigkeit wie p auf M, während sich M_s parallel zur Geraden A_s (Schatten von A) mit einer konstanten Geschwindigkeit verschiebt, die von der Horizontalneigung λ der Lichtstrahlen abhängt. Einer Verschiebung von M um die Ganghöhe $\mathfrak{h}$ entspricht eine Verschiebung von M_s um

$$\mathfrak{h}_s = \mathfrak{h} \cot \lambda .$$

Bezeichnet wie oben α den Steigwinkel von K, $\mathfrak{r}$ den Halbmesser des Schraubenzylinders, so hat man die drei Fälle $\lambda = \alpha$, $\lambda > \alpha$, $\lambda < \alpha$ zu unterscheiden.

a) Für $\lambda = \alpha$, ist $\mathfrak{h}_s = \mathfrak{h} \cot \alpha = 2\mathfrak{r}\pi$ (nach Gl. (b)). Während also p_s auf dem Kreis M_s eine Umdrehung vollführt, verschiebt sich dessen Mitte m_s um die Länge des Umfanges von M_s. Beide Bewegungen zusammen lassen sich als Rollen von M_s auf einer seiner zu A_s parallelen Tangenten auffassen, wobei p_s auf M_s seine Lage beibehält. Der Schatten K_s ist daher in diesem Fall eine *gespitzte* (oder *gemeine*) *Zykloide*. Die Spitzen sind (Nr. 68, Satz 3) die Schatten jener Punkte der Schraubenlinie, deren Tangenten Lichtstrahlen sind.

b) Für $\lambda > \alpha$ ist, wegen $\cot \lambda < \cot \alpha$, $\mathfrak{h}_s < 2\mathfrak{r}\pi$. Setzt man $\mathfrak{h}_s = 2\mathfrak{r}_1\pi$, wo jetzt $\mathfrak{r}_1 < \mathfrak{r}$ ist, und nimmt einen mit M_s fest verbundenen konzen-

Hosted by Google

trischen Kreis N_1 vom Halbmesser $\mathfrak{r}_1$ an, so ergeben sich die verschiedenen Lagen von p_s durch Rollen von N_1 auf einer seiner zu A_s parallelen Tangenten. Der Schatten K_s ist die Bahn eines Punktes des mit N_1 fest

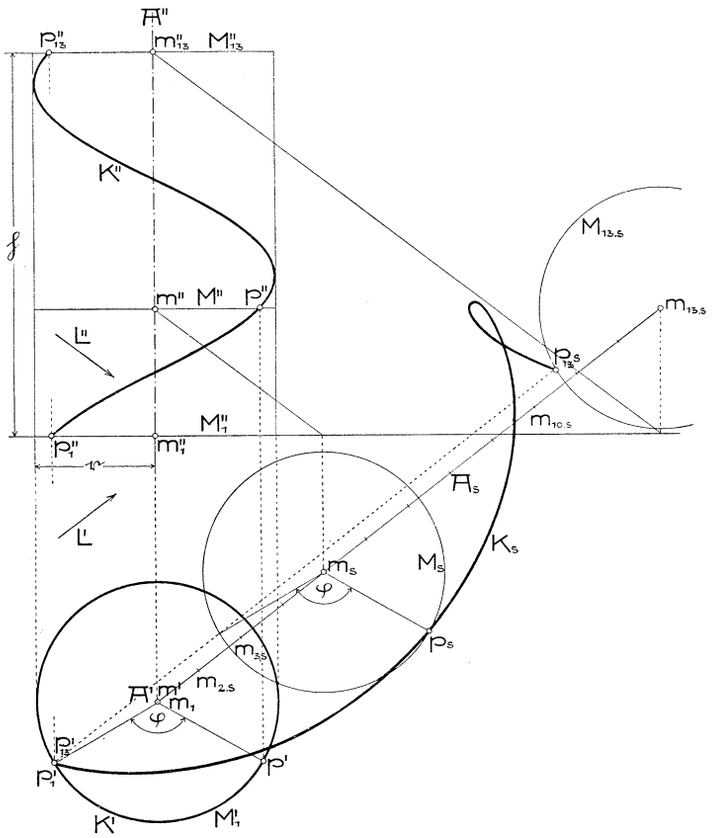


Fig. 208.

verbundenen Kreises M_s, also eine *verschlungene Zykloide.* Diesen Fall zeigt K_s in Fig. 208 und R_s in Fig. 207.

c) Für $\lambda < \alpha$ findet man analog einen mit M_s fest verbundenen rollenden Kreis N_2, dessen Halbmesser $\mathfrak{r}_2 \left(= \frac{\mathfrak{h}_s}{2\pi}\right) > \mathfrak{r}$. K_s ist die Bahn eines Punktes von M_s also eine *gestreckte Zykloide.* Diesen Fall zeigt K_s in Fig. 207.

Allgemein kann man daher den Satz aussprechen:

Satz 2: *Der Schlagschatten einer Schraubenlinie für Parallelbeleuchtung auf eine zur Schraubenachse senkrechte Ebene ist eine Zykloide.* Daraus folgt weiter

Satz 3: *Der Schlagschatten einer Schraubenlinie für Parallelbeleuch-*

Hosted by Google

tung auf eine beliebige Ebene (also auch jede Parallelprojektion der Schraubenlinie) ist eine zu einer Zykloide affine Kurve.

106. Böschungsflächen. Die abwickelbare Schraubenfläche (Nr. 105) besitzt die Eigenschaft, daß ihre sämtlichen Tangentenebenen gleiche Horizontalneigung (gleichen Fall, gleiche Böschung) besitzen. *Man nennt* nun *jede abwickelbare Fläche, deren Tangentenebenen gleiche Horizontalneigung haben, eine Fläche gleichen Falles oder gleicher Böschung* oder kurz eine *Böschungsfläche.*[1]) Diese Flächen treten, wie wir später sehen werden, bei Straßen- und Eisenbahnbauten häufig auf; die Kenntnis ihrer Haupteigenschaften ist also für den Ingenieur wichtig.

Bewegt sich eine Ebene ohne Änderung ihrer Horizontalneigung nach irgend einem Gesetz, so umhüllt sie (Nr. 73) eine Böschungsfläche Φ. Das Bewegungsgesetz läßt sich z. B. durch die Forderung festlegen, die Ebene solle beständig eine vorgegebene Kurve oder Fläche berühren. Mithin kann man sagen:

Satz 1: *Eine Böschungsfläche wird von allen Ebenen umhüllt, die eine gegebene Kurve oder Fläche (die Leitkurve oder Leitfläche) berühren und gegen eine Horizontalebene (allgemeiner: gegen eine feste Ebene) unter konstantem Winkel geneigt sind.*

Legt man durch einen Punkt s zu den Hüllebenen von Φ die parallelen Ebenen, so umhüllen sie einen Drehkegel[2]); seine Erzeugenden, als Schnittlinien benachbarter Tangentialebenen, sind zu den Erzeugenden der Fläche Φ, als Schnittlinien benachbarter Lagen der einhüllenden Ebene, parallel. Die Erzeugenden von Φ haben daher dieselbe konstante Horizontalneigung wie ihre Tangentenebenen oder:

Satz 2: *Die Erzeugenden einer Böschungsfläche haben konstante Horizontalneigung und sind Fallinien ihrer Tangentenebenen.*

Jede Schnittkurve K der Fläche Φ mit einer Horizontalebene Π_1 nennt man eine *Niveau- oder Schichtenlinie* der Fläche. Die Tangente T an K in einem Punkt a ist die Π_1-Spur der Tangentenebene des

1) *G. Scheffers*, Einführung in die Theorie d. Kurven, Leipzig 1901, S. 293. Die Böschungsflächen untersuchte bereits *G. Monge*, Appl. de l'analyse à la géométrie, 4e éd., Paris 1809, § VIII.

2) Dieser Kegel schneidet die unendlichferne Ebene in einer Kurve 2. Ordnung K_u. Die Böschungsfläche kann daher als abwickelbare Fläche definiert werden, die K_u und eine beliebige Kurve oder Fläche zu Leitgebilden (vgl. Nr. 104) hat (beiden gleichzeitig umschrieben ist). Wählt man einen Kegelschnitt als die im Endlichen gelegene Leitkurve, so ist die abwickelbare Fläche zur Schnittkurve zweier Kegelflächen 2. Ordnung dual, daher im allgemeinen von der 4. Klasse. Näheres über diese Böschungsflächen findet man bei *J. de la Gournerie*, Traité de Géométrie descriptive, 2e éd., Paris 1880, Nr. 566 f.

Hosted by Google

Punktes an Φ (Nr. 73, Satz 4). Weil diese Ebene die Erzeugende E durch a zur Fallinie hat, ist $E \perp T$, mithin auch $E' \perp T$. Daraus folgen die Sätze:

Satz 3: *Die Schichtenlinien einer Böschungsfläche schneiden die Erzeugenden rechtwinkelig.*

Satz 4: *Die Grundrisse der Schichtenlinien einer Böschungsfläche sind Parallelkurven* (Nr. 62), *die zur gemeinsamen Evolute den Grundriß der Gratlinie*[1]) *der Fläche haben.*

Durch eine Schichtenlinie K und die Horizontalneigung α der Erzeugenden ist die Böschungsfläche Φ bestimmt (Fig. 209). Die Normalen von K bilden die Grundrisse der Erzeugenden. Legt man im Abstande $\mathfrak{d}$ zu Π_1 (Ebene von K) die Parallelebene σ, so schneiden Π_1 und σ auf allen Erzeugenden Strecken von der gleichen Länge l ab, deren Grundrisse die Länge $l' = \mathfrak{d} \cot \alpha$ haben, die sich unmittelbar zeichnen läßt (vgl. Fig. 209). Die Kurve S, nach der σ Φ schneidet, stellt sich im Grundriß als Parallelkurve von K im Abstande l', im Aufriß als Gerade $|K''$ im Abstande $\mathfrak{d}$ dar. Mittels S', S'' lassen sich die Erzeugenden von Φ auch im Aufriß zeichnen. Die Gratlinie G von Φ hat als Grundriß die Evolute von K'; aus ihr folgt dann G'' (in Fig. 209 unzugänglich).

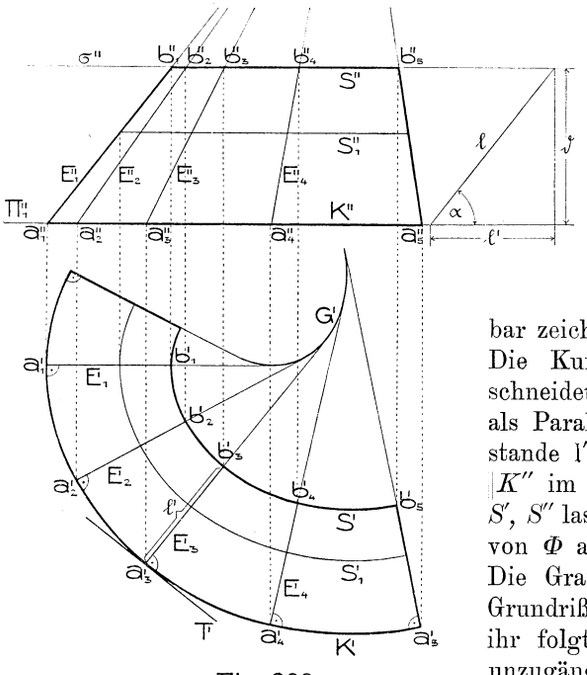


Fig. 209.

Mit Hilfe des Richtkegels der Fläche ist deren Eigenschattengrenze leicht erhältlich.

Um durch eine Raumkurve K (oder eine ebene Kurve in schräger Ebene) die Böschungsfläche von der Neigung α zu zeichnen, lege man aus einer Anzahl Punkte von K die Drehkegel mit der Horizontalneigung α. Da diese Kegel von den beiden durch K möglichen Böschungsflächen eingehüllt werden, so liefern die Hüllkurven ihrer

1) Diese Gratlinie ist eine allgemeine Schraubenlinie im Sinne der Fußnote auf S. 242.

Hosted by Google

Basiskreise auf der Horizontalebene Π_1 die Spurkurven der gesuchten Böschungsflächen.

Abwickelbare Flächen treten auch bei der Beleuchtung einer Fläche Φ durch eine leuchtende Fläche (Scheibe oder Kurve) Ψ auf. Es gibt dann auf Φ Teile im *vollen Licht*, solche im *Halbschatten* und andre im *vollen Schatten (Kernschatten)*. Die Grenzen zwischen ihnen bilden die Berührungskurven von Φ mit der Φ und Ψ gemeinsam umschriebenen Developpablen.

107. Verebnen abwickelbarer Flächen. Der allgemeine Begriff des Verebnens abwickelbarer Flächen sowie einige dafür geltende Gesetze wurden schon in Nr. 72 und 74 besprochen, die Verebnung eines Drehzylinders in Nr. 105 ausgeführt. Handelt es sich um die *Verebnung eines beliebigen*, etwa durch zwei parallele ebene Schnitte K_1 und K_2 begrenzten *Zylinders* Φ, so zeichne man vorerst (unter Benutzung eines Seitenrisses auf eine zu den Erzeugenden parallele Ebene) einen seiner Normalschnitte N und ermittle dessen Gestalt. Da bei der Abwicklung die Zylindererzeugenden in eine Schar paralleler Geraden übergehen und (nach Nr. 72) die Winkel, unter denen eine Kurve die Erzeugenden schneidet, sich bei der Verebnung nicht ändern, so wird sich N in eine zu den Erzeugenden normale Gerade N_0 verwandeln. Auf ihr trage man dann die näherungsweise aus der gefundenen Gestalt des Normalschnittes entnommenen Bogenlängen zwischen einer Anzahl auf N gewählter Punkte auf, ziehe durch die erhaltenen Punkte die Normalen zu N_0 und trage auf ihnen von N_0 aus die zwischen N und K_1 befindlichen Erzeugendenstücke ab; die Endpunkte bilden die Verwandelte $K_{1,0}$ von K_1. Schneidet man schließlich auf den Erzeugenden in der verebneten Figur von $K_{1,0}$ aus die zwischen K_1 und K_2 liegenden Erzeugendenstrecken ab, so gelangt man zur Verwandelten $K_{2,0}$ von K_2. Analog wird zu irgend einer auf Φ verlaufenden Kurve K (durch Abtragen der zwischen N und K befindlichen Erzeugendenstrecken von N_0 aus) die entsprechende Kurve in der Verebnung gefunden. Für diese auf einem Zylinder verlaufende Kurve gilt ebenfalls der allgemeine

Satz 1: *Geht eine auf einer beliebigen abwickelbaren Fläche Φ verlaufende Kurve K bei der Verebnung von Φ in K_0 über, so besitzt diese Kurve dort und nur dort einen Wendepunkt, wo im entsprechenden Punkt von K die Schmiegebene zu Φ senkrecht steht.*

Denn die beiden der Schmiegebene angehörigen Elemente von K sind (Nr. 74) aufeinanderfolgende Elemente einer geodätischen Linie von Φ, verwandeln sich also nach der Verebnung in die Elemente einer geraden Linie und umgekehrt (Nr. 74). Für eine ebene Kurve K auf Φ vertritt in dem Satz 1 die Kurvenebene die Schmiegebene.

Hosted by Google

Fig. 210 zeigt das *Verebnen eines durch zwei Halbkreise* K_1, K_2 *begrenzten halben schiefen Kreiszylinders* Φ mit zu Π_1 parallelen Erzeugenden, wie er etwa an Durchlässen durch Eisenbahndämme auftritt. Auf K_1 wurden die voneinander gleich weit entfernten

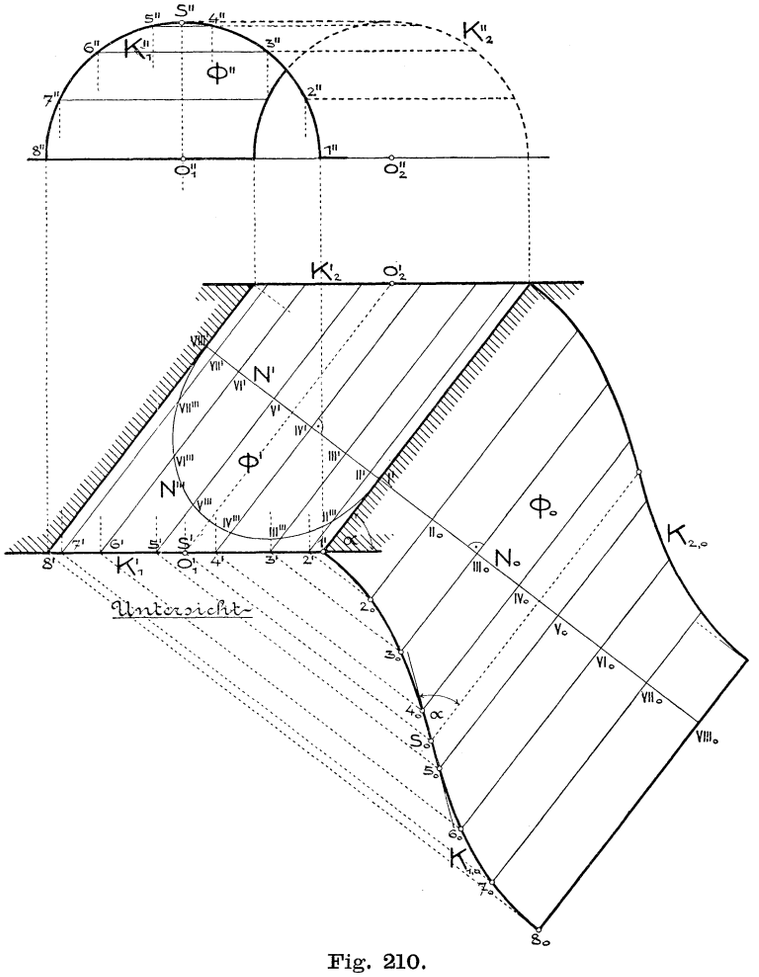


Fig. 210.

Punkte 1, 2, ... 8 angenommen, die Erzeugenden durch sie mit einer Normalebene in *I*, *II*, ... *VIII* zum Schnitt gebracht, die Gestalt N''' des Normalschnittes ermittelt und dessen Bogenstücke zwischen I''', II''', ... $VIII'''$ auf der Geraden N_0 abgetragen. Die nach obiger Erläuterung konstruierte Kurve $K_{1,0}$ besitzt nach Satz 1 in dem dem Scheitel s von K_1 entsprechenden Punkt s_0 einen Wendepunkt. Die Tangente an $K_{1,0}$ in s_0 schließt mit den verwandelten Erzeugenden den-

Hosted by Google

selben Winkel α ein, wie die durch s gehende Erzeugende von Φ mit der Tangente an K_1.

Eine durch einen Kreis K begrenzte *Drehkegelfläche* geht bei der Verebnung in einen *Kreisausschnitt* über, dessen Halbmesser die Erzeugendenstrecke des Kegels ist und dessen dem Umfang von K gleiche Bogenlänge durch wiederholtes Abtragen eines hinreichend kleinen Teils von K näherungsweise erhalten wird.

Das *Verebnen eines schiefen Kreiskegels* zeigt Fig. 211. Der Kegel ist durch seinen Basiskreis K (Mitte m), den Normalriß s' seiner Spitze s auf die Basisebene Π_1 und die Höhe $\overline{s's} = h$ gegeben. Die Ebene $\sigma = [sm\,|\,\Pi_1]$ ist Symmetrieebene des Kegels. Den auf einer Seite von $S = [s'm]$ befindlichen Halbkreis von K teile man in eine größere Anzahl — etwa 8 — gleiche Teile, so daß die Bogenlänge von K zwischen zwei Teilpunkten angenähert der Sehne gleichgesetzt werden kann. Nun ermittle man die Längen der von s aus nach jenen Teilpunkten 1, 2, ... 9 reichenden Erzeugendenstrecken, indem man sie um $[ss']$ in σ hineindreht und diese Ebene dann nach Π_1 umklappt. Wird z. B. in Fig. 211 $\overline{s'3_1} = \overline{s'3}$ gemacht und h auf $[s'\,|\,S]$ von s' aus bis s''' abgetragen, so ist $\overline{s'''3_1} = \overline{s3}$. Verlegt man für die Verebnung die Kegelspitze s_0 nach s''' und zieht um diesen Punkt durch $1 = 1_1$, 2_1, 3_1, ... $9_1 = 9$ Kreise, so müssen ihnen bzw. die Punkte 1_0, 2_0, ... 9_0 angehören. Läßt man noch 9_0 mit 9 zusammenfallen, nimmt $\overline{98}$ in Zirkel, setzt in 9 ein und schneidet den Kreis durch 8_1 in 8_0, setzt hierauf in 8_0 ein und schneidet den Kreis durch 7_1 in 7_0 und fährt so fort, so gelangt man zu den 8, 7, ... 1 entsprechenden Punkten der Verebnung. Ihre Verbindungslinie liefert die eine Hälfte von K_0, deren andre hierzu bezüglich $[s_0 9]$ symmetrisch ist.

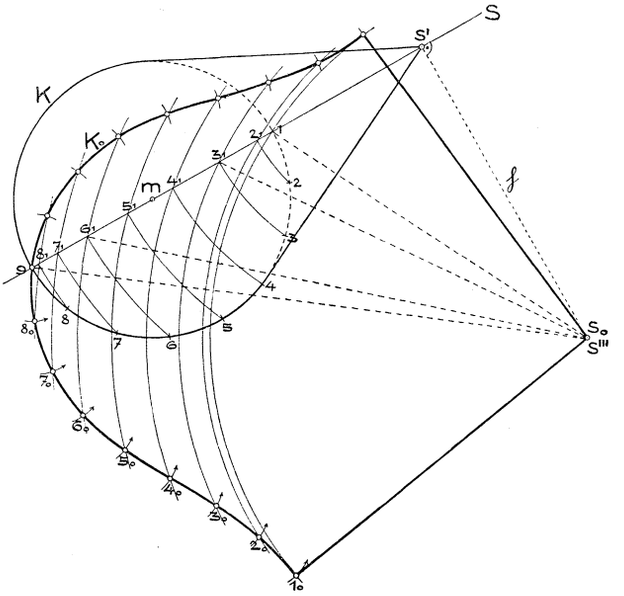


Fig. 211.

Die Berührungspunkte von K mit den Tangenten aus s' gehen

Hosted by Google

bei der Verebnung in die Wendepunkte von K_0 über (Satz 1), da die Tangentialebenen in jenen Punkten an den Kegel zur Ebene von K senkrecht stehen.

Nach Nr. 72, Satz 3 wird beim Verebnen einer beliebigen abwickelbaren Fläche die erste Krümmung ihrer Gratlinie nicht geändert. Verebnet man daher die Tangentenfläche Φ der in Fig. 206 dargestellten Schraubenlinie K, so verwandelt sich diese in eine ebene Kurve mit dem konstanten Krümmungsradius r_2, d. h. in einen Kreis K_0 vom Halbmesser r_2. Man hat also den

Satz 2: *Bei der Verebnung einer abwickelbaren Schraubenfläche verwandelt sich die Gratlinie in einen Kreis, dessen Radius mit dem der ersten Krümmung der Gratlinie identisch ist.*

Fig. 212 zeigt die Verebnung jenes Teiles von Φ, der in Fig. 206 zwischen den Horizontalebenen durch die Punkte 1 und 13 liegen würde.[1])

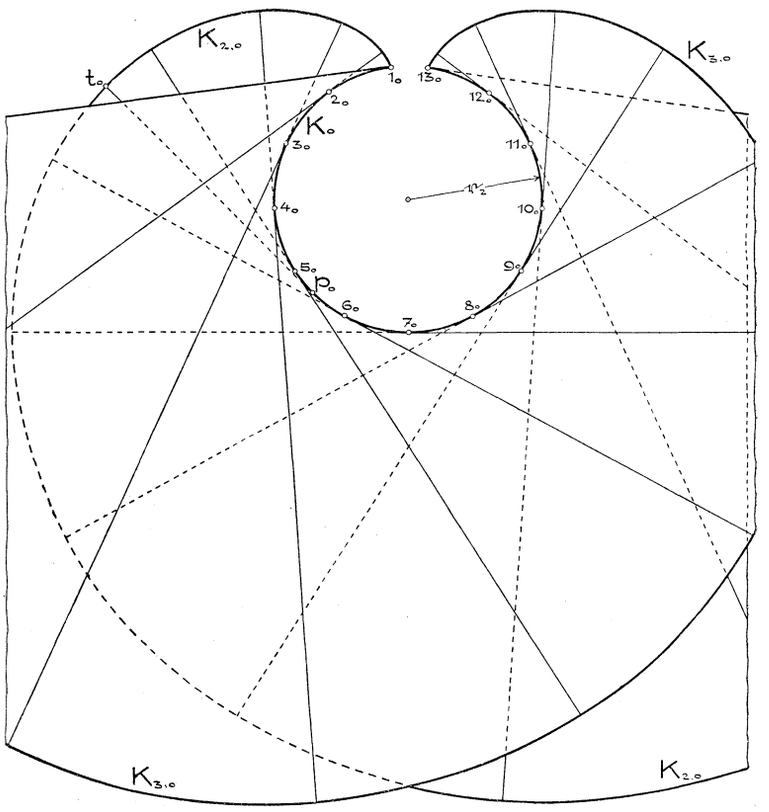


Fig. 212.

1) Wegen Raummangels mußte diese Verebnung gegenüber Fig. 206 etwas verkleinert gezeichnet werden.

Hosted by Google

Aus der Nebenfigur zu Fig. 206 wurde die Länge $\overline{(1)(2)}$ der Schraubenlinie K zwischen zwei der aufeinanderfolgenden Punkte 1, 2, ... 13 entnommen und in Fig. 212 auf K_0 von 1_0 bis 13_0 aufgetragen. Die Tangenten an K_0 in diesen Punkten bilden die verebneten Erzeugenden von Φ. Die Schnittkurve von Φ mit Π_1 verwandelt sich in die Evolvente $K_{2,0}$ von K_0, da ja $\overline{p_0 t_0} = \overline{pt}$ die Länge von K zwischen 1 und p, mithin die Länge von K_0 zwischen 1_0 und p_0 ist. Ebenso verwandelt sich die Schnittkurve K_3 von Φ mit der Horizontalebene durch 13 in die von 13_0 ausgehende Evolvente $K_{3,0}$. Irgend eine andre auf Φ verlaufende und im Auf- und Grundriß gegebene Kurve kann in die Verebnung eingezeichnet werden, indem man die Entfernungen ihrer Schnittpunkte mit den Erzeugenden durch 1, 2, 3 ... von diesen Punkten in die Abwicklung überträgt. Die mit K koachsialen Schraubenlinien auf Φ verwandeln sich in die mit K_0 konzentrischen Kreise. Umgekehrt läßt sich jede in der Verebnung gegebene Kurve im Auf- und Grundriß zeichnen. Auf diese Art wird man z. B. die Risse der geodätischen Verbindungslinie zweier Punkte von Φ erhalten können, weil ihr in der Verebnung eine Gerade entspricht.

V. Kapitel.

Kugelfläche.

108. Darstellung der Kugel, Grundaufgaben, ebene Schnitte. Der wirkliche Umriß einer Kugel für ein im Endlichen oder Unendlichen befindliches Projektionszentrum, d. h. der Ort der Berührungspunkte der aus diesem Zentrum an die Kugel legbaren Tangenten, ist ein Kreis, der scheinbare Umriß daher, als Bild dieses Kreises, im allgemeinen ein Kegelschnitt. In einer Normalprojektion ist der wirkliche Umriß der Kugel der zur Bildebene parallele Hauptkreis, ihr scheinbarer Umriß mithin ein mit jenem kongruenter Kreis.

Der erste und zweite scheinbare Umriß einer Kugel mit dem Zentrum m und Halbmesser $\mathfrak{r}$ sind bzw. die Kreise $K_1' = (m', \mathfrak{r})$, $K_2'' = (m'', \mathfrak{r})$. Sie sind die Bilder der zu Π_1 bzw. Π_2 parallelen Hauptkreise K_1 und K_2; K_1'' und K_2' sind demnach die zu den Ordnungslinien senkrechten Durchmesser von K_2'' und K_1' (Fig. 213). Jeder Punkt a (b), dessen Aufriß (Grundriß) dem scheinbaren Umriß $K_2''(K_1')$ angehört, hat seinen Grundriß (Aufriß) in $K_2'(K_1'')$.

Die bei Benutzung von Auf- und Grundriß am leichtesten darzustellenden Linien auf der Kugel sind die zu Π_1 oder Π_2 parallelen Kreise. Ihrer bedient man sich zur Lösung der Hauptaufgabe:

Aus einem Riß eines auf der Kugel liegenden Punktes seinen zugeordneten Riß zu finden.

Hosted by Google

Fig. 213 zeigt die Konstruktion der Grundrisse p_1', p_2' aus dem gegebenen Aufriß p'' mittels des durch $p \parallel \Pi_1$ gelegten Kreises P und der Aufrisse q_1'', q_2'' aus dem gegebenen Grundriß q' mittels des durch $q \parallel \Pi_2$ gelegten Kreises Q. Durch Angabe eines Risses ist also ein Punkt der Kugel zweideutig bestimmt, wenn nicht hinzugefügt wird, ob er auf dem sichtbaren oder unsichtbaren Teil der Kugel liegen soll. Um aus p_1' den zugehörigen Aufriß p'' zu finden, kann übrigens auch der durch p_1 gehende Horizontalkreis P verwendet werden. Man hat dann bloß den Aufriß c'' oder c_1'' eines Schnittpunktes c von P mit K_2 zu suchen und die P'' enthaltende Horizontale durch c'' bzw. c_1'' mit der Ordnungslinie durch p_1' zu schneiden.

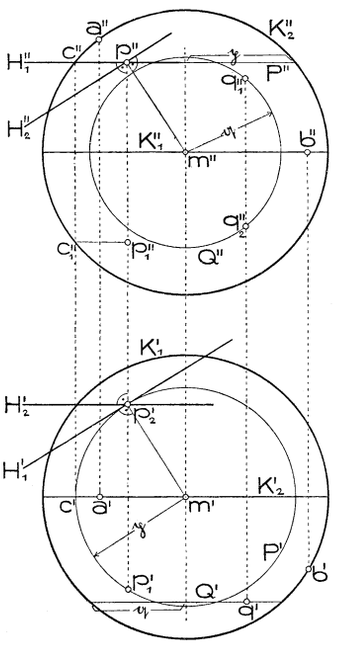


Fig. 213.

Die *Tangentialebene* an die Kugel in einem ihrer Punkte, etwa $p_2(p_2', p'')$, steht zum Halbmesser $[m p_2]$ senkrecht, läßt sich daher nach Nr. 44 durch ihre Hauptlinien H_1 und H_2 sofort festlegen.

Jeder *ebene Schnitt einer Kugel* ist ein Kreis[1]), dessen Mitte der Fußpunkt des aus dem Kugelmittelpunkt auf die Ebene gefällten Lotes ist und dessen Halbmesser sich als Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks ergibt, das jenes Lot zur andern Kathete und den Kugelradius zur Hypotenuse hat. Die Aufgabe, den ebenen Schnitt einer Kugel zu zeichnen, führt also auf die in Nr. 75 besprochene Darstellung eines Kreises zurück.

Es sei z. B. *der Schnitt K einer Kugel um m mit der durch eine erste Hauptlinie H_1 und einen Punkt q gegebenen Ebene ε zu zeichnen* (Fig. 214). Um K' zu erhalten, benutzen wir den Seitenriß auf die durch m senkrecht zu H_1 gelegte Ebene $\Pi_3 (X_{13} = [m' \mid H_1'])$, wobei wir m''' mit m' zusammenfallen lassen. ε stellt sich im Seitenriß als die Verbindungsgerade ε''' der Punkte q''' und H_1''', die Kugel als der mit K_1' zusammenfallende Kreis und K als die ε''' angehörige Strecke $a''' b'''$ dar. $a' b'$ gibt dann die kleine Achse der Ellipse K', deren halbe große Achse $\mathfrak{r}$ die Länge $\frac{1}{2}\overline{a''' b'''}$ hat. K' und K_1' berühren sich (Nr. 92, Satz 2) in den Grundrissen der Schnittpunkte e, f von K und K_1. Weil K_1''', als Seitenriß eines zu Π_1 parallelen Kreises

1) Demnach kann es auf einer Kugel keine eigentliche Ellipse geben, weil diese als ebene Kurve der Schnitt der Kugel mit einer Ebene sein müßte.

Hosted by Google

mit der Mitte m, nach X_{13} fällt, ist $e''' = f''' = [K''' X_{13}]$, woraus e', f' auf K_1' folgen. — Die Aufrisse der Punkte $a, b, c, d,$ für welche die Unterschiede der ersten Tafelabstände gegenüber m aus dem Seitenriß entnehmbar sind, lassen sich sofort zeichnen und geben die Endpunkte konjugierter Durchmesser von K''; aus diesen erhält man nach Nr. 78, S. 161 die Achsen. Zum Zeichnen von K'' wird man vielleicht auch die K_1'' angehörigen Punkte e'', f'' sowie die K_2'' angehörigen Punkte g'', h'' von K'' benutzen. Ist übrigens K' bereits genau gezeichnet, so braucht man nur den zu Π_2 parallelen Durchmesser von K im Aufriß zu suchen, um die große Achse von K'' zu haben. Aus ihr und etwa f'' ergibt sich (Nr. 75, e)) die kleine Achse.

Für projizierende Ebenen vereinfacht sich diese Konstruktion bedeutend. Handelt es sich z. B. um die

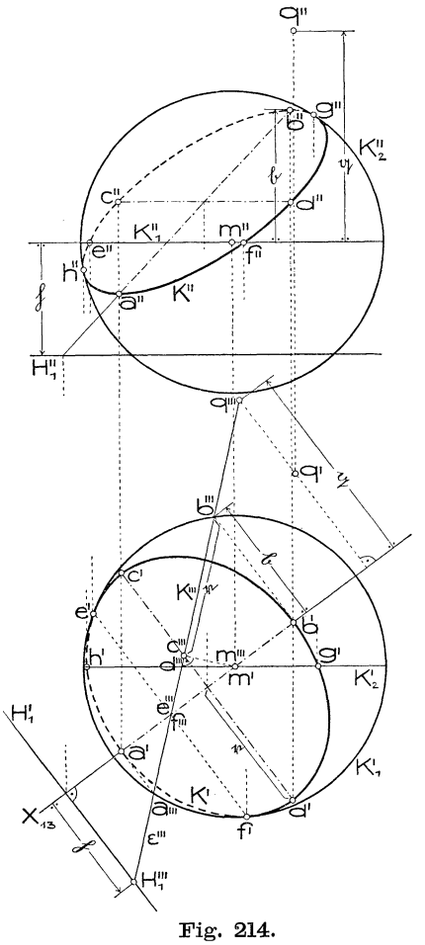


Fig. 214.

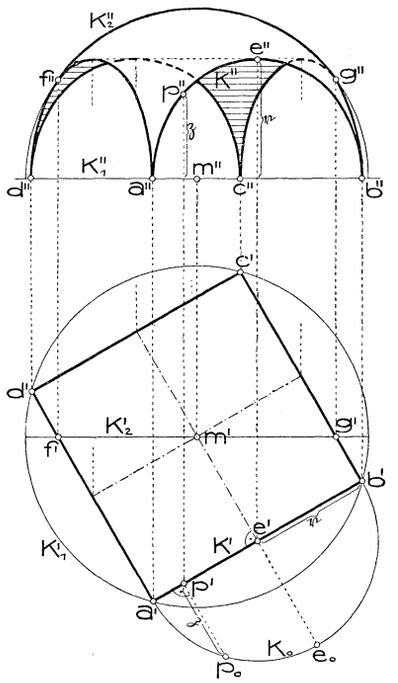


Fig. 215.

Aufgabe *(Fig. 215): Die durch die Eckpunkte des horizontalen Quadrates a b c d legbare Halbkugel soll mit den lotrechten Ebenen durch die Quadratseiten geschnitten werden,*

Hosted by Google

dann stellt sich etwa der Halbkreis K über ab im Aufriß als Ellipse dar, deren kleine Achse $a''b''$ und deren halbe große Achse gleich dem Halbmesser r von K ist. Klappt man K um $[ab]$ in die Quadratebene nach K_0 um, so findet man mittels der aus K_0 entnehmbaren Ordinate η irgend eines Punktes p von K unmittelbar p'' und sonach beliebig viele Punkte von K''. Die Kreise über ad und bc schneiden den zweiten wahren Umriß K_2 in f und g; nur der zwischen ihnen befindliche Bogen von K_2 bleibt, nach Wegnahme der außerhalb des Quadrates befindlichen Kugelteile, im Aufriß als scheinbarer Umriß übrig. Die im Aufriß von Fig. 215 schraffierten Teile sind Ansichten der Innenseite der Kugel.

Eine solche von vier lotrechten Halbkreisen begrenzte Halbkugel tritt als Gewölbeform auf und heißt dann *Hängekuppel* oder auch *böhmisches Platzel.*

Wird über einem rechteckigen Grundriß eine Kugel als Wölbfläche angeordnet, deren Durchmesser größer ist als die Rechteckdiagonale, so nennt man dieses Gewölbe eine *böhmische Kappe* oder ein *preußisches Platzel.* Die Entfernung des höchsten Punktes der Wölbfläche von der Rechteckebene heißt die *Stich-* oder *Pfeilhöhe* der Kappe.

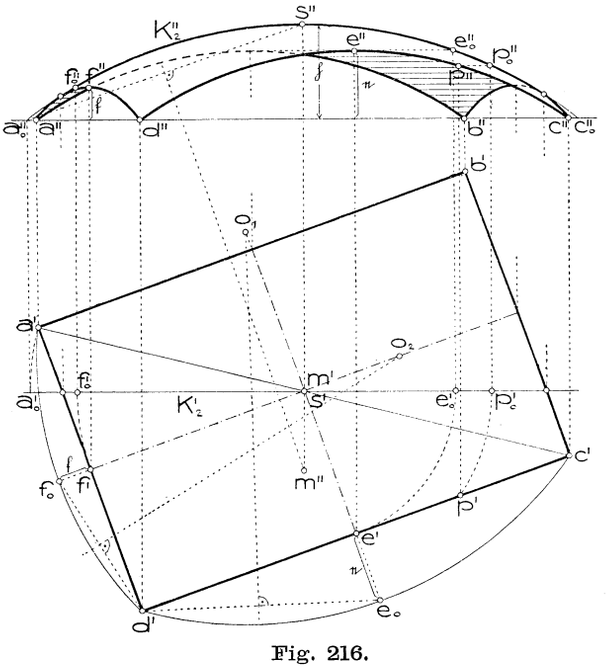


Fig. 216.

Aufgabe *(Fig. 216): Über dem Rechteck $abcd$ sei eine böhmische Kappe mit der Stichhöhe η anzuordnen. Man zeichne den Aufriß der Wölbfläche und die Form der Mauer- und Diagonalbogen.*

Trägt man vom Mittelpunkt des Rechtecks lotrecht nach aufwärts die Stichhöhe η auf, so erhält man den höchsten Punkt s der Kugel *(Gewölbescheitel).* $[asc]$ schneidet die Kugel nach einem Hauptkreis. Dreht man diese Ebene um die lotrechte Gerade durch s parallel zu Π_2, so fällt dieser Hauptkreis mit dem wahren zweiten Umriß K_2 zusammen. Gelangt also bei der Paralleldrehung a nach a_0, so ist

Hosted by Google

der Schnittpunkt m'' der Symmetralen von $a_0''s''$ mit der Lotrechten durch s'' die Mitte von K_2'' oder der Aufriß der Kugelmitte m, während m' sich mit s' deckt. Der Bogen $a_0''s''c_0''$ gibt schon die Form des Diagonalbogens asc des Gewölbes an. Die Schnitte der Kugel mit den lotrechten Ebenen durch die Rechteckseiten *(Mauerbögen)* fallen im Grundriß mit diesen Seiten zusammen. Um von einem Punkte p etwa des Bogens cd den Aufriß zu erhalten, benutzen wir nach der Hauptaufgabe (S. 253) den horizontalen Kugelkreis durch p, dessen Grundriß der Kreis um s' durch p' ist. Von seinem Schnittpunkt p_0' mit K_2' zeichnen wir den Aufriß p_0'' (in K_2''); dann gehört p'' der Horizontalen durch p_0'' an. Auf diese Weise lassen sich beliebig viele Punkte der Bogen im Aufriß zeichnen. Insbesondre wird man auch die Aufrisse der höchsten Punkte e und f von $\overset{\frown}{cd}$ und $\overset{\frown}{ad}$ ermitteln und hat damit die Pfeilhöhen $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$ dieser Bogen gefunden. Trägt man nun auf $[s'e']$ $\overline{e'e_0} = \mathfrak{e}$ ab, so ist der Kreisbogen durch d', e_0, c' (Mittelpunkt o_1) die wahre Gestalt des Mauerbogens cd. Analog findet man die von $\overset{\frown}{ad}$.

Ebene Schnitte der Kugel treten ferner beim *Steinschnitt eines Kugelgewölbes* auf, d. h. bei der Zerlegung eines solchen Gewölbes, von dem Fig. 217 ein Viertel darstellt, in einzelne Steine. Als zerteilende Flächen verwendet man Drehkegel aus dem Kugelmittelpunkt m mit lotrechter Achse *(Lagerfugenflächen)*, wie eine solche durch die Mantellinie $[m\ 3]$ angedeutet ist, und die lotrechten Ebenen durch m *(Stoßfugenflächen)*. Erstere schneiden die Wölbfläche nach horizontalen Kreisen, letztere nach lotrechten Kreisen, die sich im Aufriß als Ellipsen durch s'' darstellen. Der den Scheitel s umgebende Gewölbeteil wird aus einem einzigen Stein, dem *Schlußstein*, hergestellt.

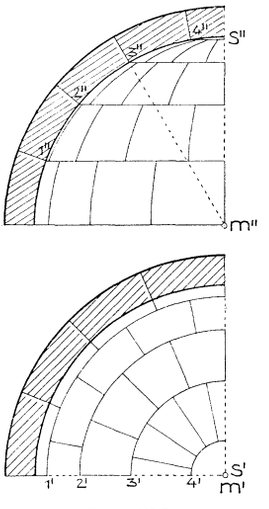


Fig. 217.

Um die Schnittpunkte einer Geraden G mit einer Kugel $\varkappa$ unter Vermeidung des Zeichnens einer Ellipse zu erhalten, wird man $\varkappa$ mit einer projizierenden Ebene γ durch G schneiden und die gemeinsamen Punkte dieses Schnittkreises und der Geraden G mittels des Seitenrisses auf γ zeichnen.

109. Schnitte von Kugeln mit Kegeln und Zylindern (Stichkappen) und von Kugeln untereinander. Zur Konstruktion der Durchdringung einer Kugel mit einem Kegel (oder Zylinder) wird man Hilfsebenen verwenden, die durch die Kegelspitze gehen oder, im Fall eines Kreiskegels, den Kegel nach Kreisen schneiden. Die Fig. 218 und 219

Hosted by Google

zeigen Sonderfälle solcher Durchdringungen, wie sie als Stichkappen auftreten.

Fig. 218 stellt eine *kugelförmige Stichkappe auf der Widerlagerseite einer Tonne* im Auf- und Kreuzriß (Ansicht von links) dar. Die Tonne steht senkrecht zu Π_3 und erscheint im Kreuzriß als der Kreis K''' mit der Mitte A'''; die Stichkappe ist die Kugel vom Zentrum o, mit den scheinbaren Umrissen K_2'' und K_3'''. Zur Ermittlung der Schnittkurve K zwischen Kugel und Zylinder verwendet man Hilfsebenen $\| \Pi_2$ oder $\| \Pi_3$. Eine Ebene $\| \Pi_2$ schneidet die Kugel nach einem Kreise M_1 (M_1''' lotrechte Gerade), die Tonne nach einer Geraden.

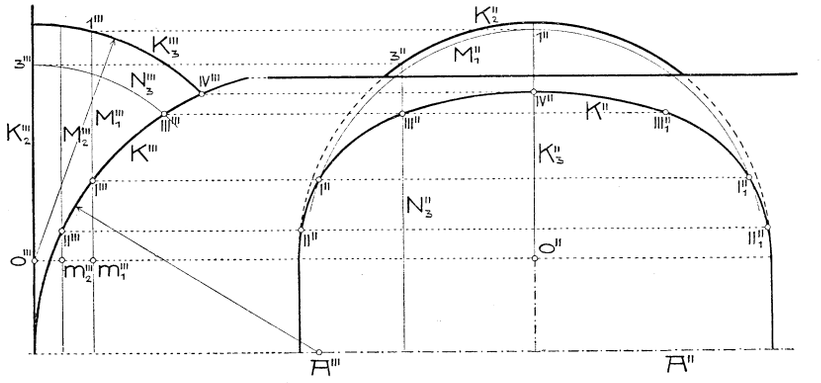


Fig. 218.

Der Aufriß dieser Geraden wird von M_1'' in den K'' angehörigen Punkten $1''$ und $1_1''$ geschnitten. Analog ergeben sich II'' und II_1''. Eine Ebene $\| \Pi_3$ schneidet die Kugel nach einem Kreis N_3 (N_3'' lotrechte Gerade), die Tonne nach einem Kreis, dessen Kreuzriß sich mit K''' deckt. N_3''' und K''' schneiden sich in III'''; III'' in N_3'' gehört K'' an. Die Stichkappe setzt sich über ihren horizontalen Hauptkreis hinaus als Zylinder fort.

Fig. 219 zeigt eine *kegelförmige Stichkappe in ein Kugelgewölbe* im Auf- und Kreuzriß, wobei sich der Kreuzriß der Kugel (um m) mit deren Aufriß deckt und letzterer einen zu Π_2 parallelen Schnitt durch die Kugelmitte darstellt. Die Stichkappe ist bestimmt durch den zu Π_2 parallelen Leitkreis B (Mitte o) und die Kegelspitze s. Als Hilfsebenen zur Aufsuchung der Schnittkurve K verwendet man Ebenen $\| \Pi_2$. Eine solche schneidet z. B. den Kegel nach dem Kreise K_1, dessen Mitte o_1 der Geraden $A = [so]$ angehört, und die Kugel nach dem Kreise C_1. Die Schnittpunkte $1''$ und $1_1''$ von K_1'' und C_1'' sind Punkte von K''; ihre Kreuzrisse fallen in einen Punkt $1'''$ von K''' zusammen. K'' ist ein Ast einer Kurve 4. Ordnung, K''' (als Projektion des reellen Teils von K) ein Teil einer Hyperbel (vgl. Nr. 102, Satz 1).

Hosted by Google

Berühren sich eine beliebige Fläche zweiter Ordnung und eine Kugel in zwei Punkten, so zerfällt ihre Schnittkurve in zwei ebene Kurven (Nr. 98, Satz 1) also, da sie auf der Kugel liegen, in zwei Kreise. Dies liefert eine zweite Methode zur *Ermittlung der Kreisschnitte eines elliptischen Zylinders* (vgl. Nr. 79). Sucht man die Achsen des Zylinder-Normalschnittes und beschreibt über seiner großen Achse ab als Durchmesser eine Kugel, so berührt sie den Zylinder in a und b, schneidet ihn daher nach zwei durch a und b gehenden Kreisen. Sucht man noch die Schnittpunkte c_1, c_2 der Kugel mit der durch einen Endpunkt der kleinen Achse des Normalschnittes gehenden Zylindererzeugenden, so sind $[abc_1]$ und $[abc_2]$ die Kreisschnittebenen.

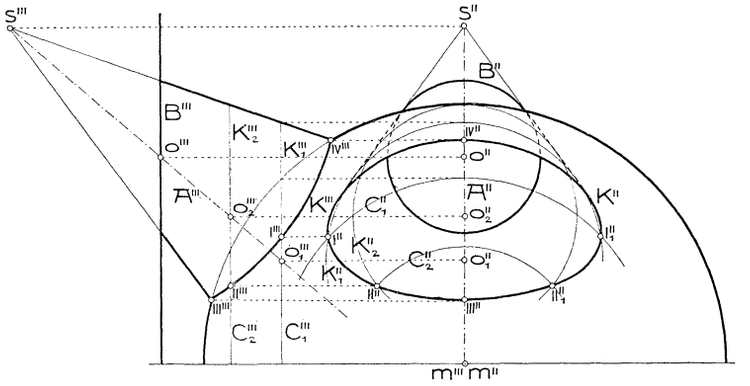


Fig. 219.

Zwei (nichtkonzentrische) Kugeln schneiden sich nach einem (reellen oder imaginären) Kreis, dessen im Endlichen gelegene Ebene zur Zentrale der Kugeln senkrecht steht.

Denn eine durch die Zentrale gelegte Ebene schneidet die Kugeln nach Hauptkreisen, die entweder zwei reelle (getrennte oder zusammenfallende) oder zwei konjugiert imaginäre Punkte gemeinsam haben, welche der Chordale (Potenzlinie) der Kreise angehören und bezüglich der Zentrale symmetrisch liegen. Durch Drehung der Hauptkreise um die Zentrale werden die Kugeln, durch Drehung obiger Schnittpunkte wird ein den Kugeln gemeinsamer Kreis erzeugt, der in der durch die Chordale beschriebenen Ebene liegt. Im Falle die gemeinsamen Punkte der Hauptkreise zusammenfallen, die Kugeln sich also berühren, hat der gemeinsame Kreis den Halbmesser Null; als Schnitt einer der Kugeln mit der Berührungsebene im gemeinsamen Punkte besteht er aus zwei konjugiert imaginären Geraden (Nr. 73, zweiter Absatz nach Satz 1).

Da die Chordale konzentrischer Kreise unendlichfern liegt, so gehört der Schnittkreis zweier konzentrischen Kugeln der unendlichfernen Ebene an.

Hosted by Google

Die Tatsache, daß zwei Kugeln nur einen endlichfernen Kreis gemeinsam haben, widerspricht scheinbar dem Gesetz, daß zwei Flächen zweiter Ordnung sich nach einer Kurve vierter Ordnung schneiden, findet aber ihre Aufklärung durch den

Satz 1: *Sämtliche Kugeln des Raumes gehen durch denselben imaginären Kegelschnitt in der unendlichfernen Ebene.*

Schneidet nämlich die Ebene ε zwei Kugeln $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, so haben die Schnittkreise außer zwei endlichfernen noch zwei unendlichferne imaginäre Punkte, die absoluten Punkte von ε, gemeinsam (Nr. 84, Satz 1). Die absoluten Punkte aller Ebenen des Raumes gehören also der Schnittkurve von $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ an, liegen demnach im Schnitt jeder der Kugeln mit der unendlichfernen Ebene. Daraus folgt der behauptete Satz; ferner folgt auch

Satz 2: *Die absoluten Punkte aller Ebenen des Raumes liegen auf einer imaginären Kurve zweiter Ordnung.*

Dieser imaginäre Kegelschnitt der unendlichfernen Ebene heißt der *absolute Kegelschnitt* oder auch der *unendlichferne Kugelkreis*[1]). Zwei konzentrische Kugeln berühren sich längs dieses Kegelschnittes.

110. Eigenschattengrenze der Kugel und ihr Schlagschatten auf Ebenen. Die Eigenschattengrenze einer Kugel $\varkappa = (m, \mathfrak{r})$ für Parallelbeleuchtung ist ein Hauptkreis S, dessen Ebene zur Lichtrichtung L senkrecht steht. Sie erscheint im Aufriß im allgemeinen als Ellipse S'', deren große Achse das Bild des zu Π_2 parallelen Durchmessers von S, mithin der zu L'' senkrechte Durchmesser $a''b''$ des scheinbaren Umrisses K_2'' von $\varkappa$ ist (Fig. 220). Zur Ermittlung der kleinen Achse von S'' zeichnen wir den Seitenriß S''' von S auf die zu L parallele zweitprojizierende Ebene Π_3 durch m, wobei wir $m''' = m''$ wählen. Der Schnitt von Π_3 mit $\varkappa$ fällt dann im Seitenriß mit K_2'' zusammen und S''' wird der zu L''' senkrechte Durchmesser $c'''d'''$ von K_2''. Die Richtung von L''' kann in einer Nebenfigur oder mittels des durch m gelegten Lichtstrahls ermittelt werden, wie es

1) Die Begriffe absolutes Punktepaar (Kreispunkte) in der Ebene und absoluter Kegelschnitt (Kugelkreis) im Raum hat *J. V. Poncelet* in dem auf S. 38, Fußnote 1, angeführten Werk (art. 94 u. 593) geschaffen. Sie erwiesen sich in den Händen von *M. Chasles, K. G. Chr. v. Staudt, G. Darboux Ed. Laguerre, F. Klein, S. Lie* und andern für die geometrische Forschung als höchst fruchtbar. Mit ihrer Hilfe hat z. B. *Laguerre* (Nouv. Ann. Math. 12 (1853), p. 57—66 = Œuvres, t. II, Paris 1905, p. 6—15) den Winkel zweier Geraden als proportional dem Logarithmus des Doppelverhältnisses nachgewiesen, das diese Geraden mit den nach den absoluten Punkten ihrer Ebene gehenden imaginären Geraden ihres Büschels bilden; auf Grund dieses Satzes war es möglich, alle metrischen Sätze der Geometrie als projektive Beziehungen von Gebilden zum absoluten Kegelschnitt darzulegen. Unter Verwendung dieser Tatsache lassen, wie der Verfasser (vgl. S. 38, Fußnote 2) gezeigt hat, auch die Aufgaben über Maßverhältnisse eine für alle linearen Abbildungen einheitliche Lösung zu.

Hosted by Google

Fig. 220 zeigt. Die $X_{23} = [m'' \mid L'']$ angehörigen Aufrisse von c und d geben die Endpunkte der kleinen Achse von S''. Auch der Aufriß irgend eines andern Punktes p von S, dessen Seitenriß p''' man auf S''' beliebig gewählt hat, kann mittels der Umlegung $S^{IV} = K_2''$ von S in die Ebene Π_3 auf die in der Figur angegebene Art ($\overline{X_{23} p''} = \overline{p''' p^{IV}} = \mathfrak{p}$) leicht erhalten werden.

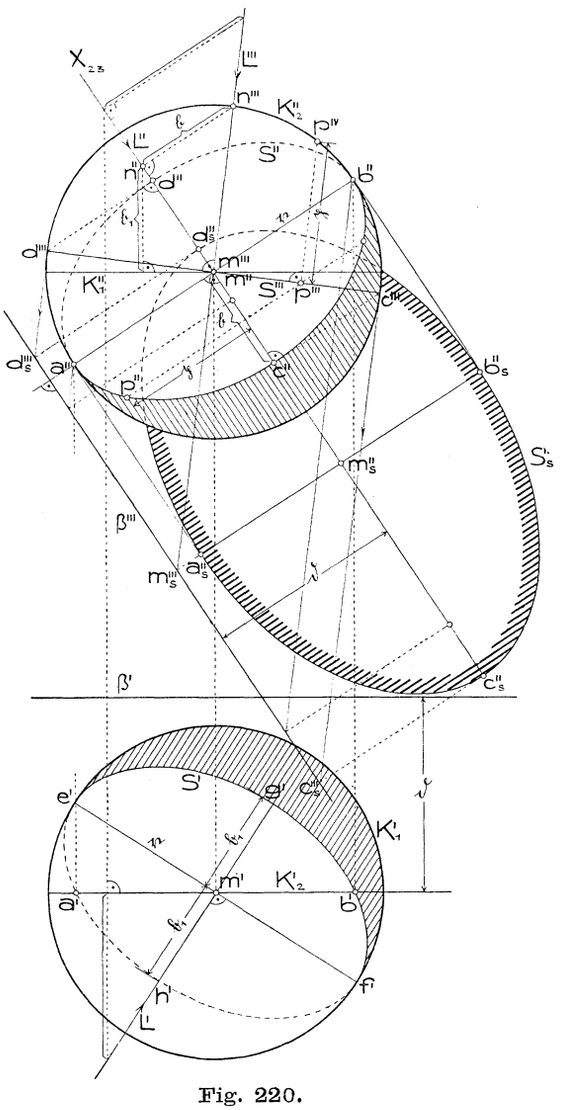


Fig. 220.

Bezeichnet n den Schnittpunkt des Lichtstrahles L durch m mit dem beleuchteten Teil von $\varkappa$, also den hellsten (normal beleuchteten) Punkt der Kugel, so ist n''' der Schnitt von L''' mit K_2'', $n'' = [n''' \mid X_{23} \cdot X_{23}]$ und aus $m'' c'' c''' \simeq n''' n'' m''$ folgt $\overline{n'' n'''} = \overline{m'' c''} = \mathfrak{b}$. Sehen wir nun davon ab, daß wir es jetzt gerade mit einem Aufriß zu tun haben, so können wir sagen:

Satz 1: *Die kleine Achse eines Normalrisses der Eigenschattengrenze einer Kugel ist gleich dem Abstande des hellsten Kugelpunktes von der zur Rißebene parallelen Hauptebene der Kugel.*

Da ferner $\overline{m'' n''} = \sqrt{\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{b}^2}$, also gleich der linearen Exzentrizität von S'' ist, so besteht, wenn man von der Kugel, der S angehört, absieht, der weitere

Satz 2: *Die lineare Exzentrizität des Normalrisses eines Kreises auf eine beliebige Ebene ist gleich der Länge des Normalrisses einer*

Hosted by Google

Strecke, die zur Kreisebene senkrecht steht und mit dem Kreishalbmesser gleiche Länge hat.

Auf Grund des Satzes 1 vereinfacht sich die Konstruktion der kleinen Achse von S'', da das Zeichnen von $c'''d'''$ entbehrlich wird.

Aber auch S' läßt sich damit rasch finden. Denn analog wie für S'' ist die große Achse von S' der zu L' senkrechte Durchmesser $e'f'$ von K_1' und nach Satz 1 ist die Länge $\mathfrak{b}_1$ der halben kleinen Achse gleich dem Abstande des Punktes n von der Ebene des Kreises K_1, d. h. $\mathfrak{b}_1 = \overline{K_1''n''}$ (vgl. Fig. 220).

Mit Benutzung des Punktes b' in K_1' läßt sich $\mathfrak{b}_1$ ohne Verwendung des Satzes 1, wenn auch etwas weniger rasch, nach Nr. 75, e) finden.

In Fig. 220 wurde auch der Schlagschatten S_s von $\varkappa$ auf eine zu Π_2 parallele Ebene β mittels des Seitenrisses auf Π_3 konstruiert. Die Schlagschatten der normalen Durchmesser ab und cd von $S(a''' = b''' = m''')$ sind, wie aus Symmetriegründen folgt, schon die Achsen von S_s. Diese Ellipse ist zugleich der Schrägriß von $\varkappa$ für β als Bildebene und L als Sehstrahlenrichtung. Nach Nr. 76, Satz 1 sind die Schlagschatten der Endpunkte des zu β (oder Π_2) senkrechten Kugeldurchmessers (der sich im Seitenriß mit $a''b''$ deckt) die Brennpunkte von S_s.

Bei *45°-Beleuchtung* ergeben sich weitere Vereinfachungen für die Konstruktion der Eigen- und Schlagschattengrenzen[1]). Nach Nr. 26 gilt für die zweite Tafelneigung $\lambda = \widehat{L''L'''}$ dieser Lichtrichtung die Beziehung

$$\sin\lambda = \operatorname{tg} 30^0.$$

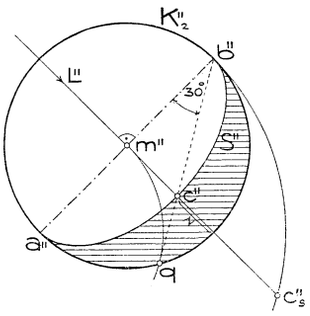


Fig. 221.

Mithin wird (vgl. Aufriß von Fig. 220)

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{r}\sin\lambda = \mathfrak{r}\operatorname{tg} 30^0$$

sein. Man erhält also c'', ohne vorerst L''' suchen zu müssen, auf die in Fig. 221 gezeichnete Weise.

Die Gerade $[b''c'']$ kann mittels eines 30°-Dreiecks unmittelbar gezogen oder ihr Schnittpunkt q mit K_2'' mittels eines Zirkelschlages gefunden werden.

Für die Breite $\mathfrak{x}$ des Eigenschattens erhält man

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{r}\left(1 - \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\right) \doteq 0{,}42 \cdot \mathfrak{r}$$

oder, was für das freihändige Zeichnen hinreichend genau,

$$\mathfrak{x} = \tfrac{2}{5}\,\mathfrak{r}.$$

1) *J. Pillet*, Traité de perspective linéaire etc., Paris 1888 (2e éd.), p. 13.

Hosted by Google

Für den Schlagschatten c_s des Punktes c auf die zu Π_2 parallele Hauptebene der Kugel besteht, wie ein Blick auf die Schlagschattenkonstruktion in Fig. 220 lehrt, die Beziehung

$$\overline{m'' c_s''} = \frac{\mathfrak{r}}{\sin \lambda} = \frac{\mathfrak{r}}{\operatorname{tg} 30^0} = \mathfrak{r} \operatorname{tg} 60^0.$$

c_s'' ist daher (Fig. 221) der dritte Eckpunkt des über $a''b''$ gezeichneten gleichseitigen Dreiecks. Für den Schlagschatten der Kugel auf irgend eine zu Π_2 parallele Ebene bleibt das Achsenverhältnis dasselbe.

111. Schlagschatten auf eine Kugel.

Aufgabe: *An einer im Aufriß gegebenen Halbkugel, deren Randkreis zu Π_2 parallel ist und die ihre hohle Seite dem Beschauer zuwendet, sind die auftretenden Schatten zu ermitteln* (Fig. 222).

Die Konstruktion ist ohne Benutzung des Grund- oder Kreuzrisses durchführbar, sobald man den Seitenriß des durch die Kugelmitte m gelegten Lichtstrahls L auf seine zweitprojizierende Ebene Π_3 kennt, wobei wieder $m''' = m''$ gewählt werden soll. Die Achsen des Aufrisses S'' der Eigenschattengrenze ergeben sich nach Nr. 110; auf der Innenseite der Kugel sind jene Gebiete an sich im Licht, die sich auf der Außenseite im Eigenschatten befinden, und umgekehrt. Der Schlagschatten K_s des Randkreises K auf die Kugel ist nach Nr. 98, Satz 4 eine Kurve 2. Ordnung, hier also ein Kreis durch die Endpunkte a und b des zu L normalen Durchmessers von K. Dieser Kreis stellt sich im Aufriß als Ellipse mit der Hauptachse $a''b''$ dar, deren Nebenachse daher L'' angehört; die Endpunkte der letzteren sind die Schlagschatten der Endpunkte des zu $[ab]$ senkrechten Durchmessers cd von K, die man mittels des Seitenrisses auf Π_3 konstruiert. Da der Seitenriß des Schnittkreises der Halbkugel mit Π_3 sich mit K'' deckt und $c''' = c''$ ist, so schneidet $[c'' L''']$ aus K'' schon c_s''' aus, woraus c_s'' in L'' folgt.

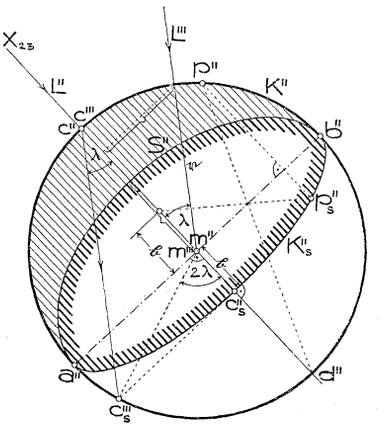


Fig. 222.

K_s'' ist zu K'' perspektiv-affin (Nr. 79, Satz 3). Damit läßt sich zu jedem Punkte p'' von K'' der Aufriß seines Schlagschattens p_s'' unmittelbar finden (vgl. Fig. 222).

Bezeichnet wieder $\lambda (= \widehat{L''L'''})$ die zweite Tafelneigung von L, so sieht man, daß $\widehat{d''m''c_s'''} = 2\lambda$ (Zentriwinkel zum Peripheriewinkel $\lambda = \widehat{m''c''c_s'''}$), also

Hosted by Google

$$\overline{m''c_s''} = \mathfrak{b} = \mathfrak{r}\cos 2\lambda = \mathfrak{r}(1 - 2\sin^2\lambda)$$

ist. Bei 45°-Beleuchtung hat man $\sin\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (Nr. 26), daher[1])

$$\mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{r}}{3}.$$

Allgemeiner ist die folgende Aufgabe: *An der durch einen zu Π_2 parallelen Randkreis K begrenzten Hohlkugel $(m, \mathfrak{r})$ sind die bei Parallelbeleuchtung auftretenden Schatten im Aufriß darzustellen* (vgl. Fig. 223). Der Schlagschatten K_s des Randkreises K auf die Kugel ist wiederum ein Kreis (Nr. 98, Satz 4). Zeichnet man wie oben den

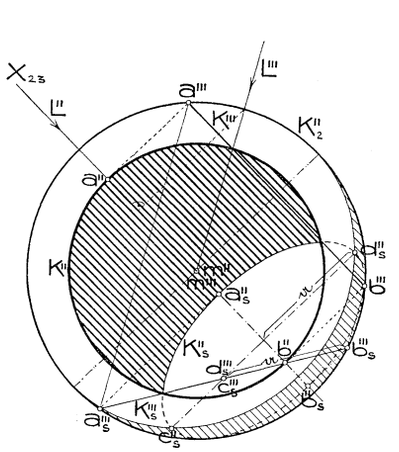


Fig. 223.

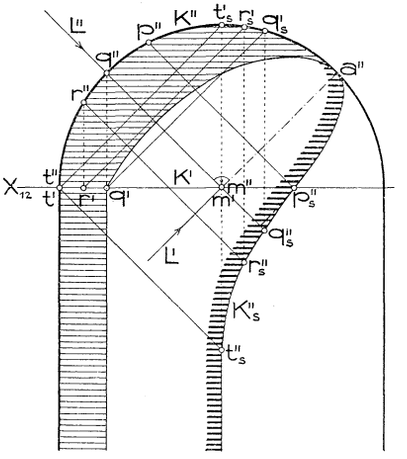


Fig. 224.

Seitenriß auf die zweitprojizierende Ebene Π_3 des Lichtstrahls L durch $m(m''' = m'')$, so stellt sich K als die zu L'' parallele Strecke $a'''b'''$ dar. Schneiden die Strahlen $[a'''|L''']$ und $[b'''|L''']$ den Umriß K_2'' der Kugel, der zugleich Seitenriß ihres Schnittkreises mit Π_3 ist, in a_s''' und b_s''', so stellt die Strecke $a_s'''b_s'''$ den Seitenriß von K_s dar, woraus unmittelbar der Aufriß K_s'' folgt[2]).

Der in Fig. 222 konstruierte Schlagschatten ins Innere einer Halbkugel tritt auch an der *Kugelnische* auf, d. h. an einer Mauervertiefung, die durch einen halben Drehzylinder und eine ihn überdeckende Viertelkugel begrenzt ist. Fig. 224 zeigt die Nische samt den bei 45°-Beleuchtung an ihr auftretenden Schatten im Aufriß. Die Konstruktion der Eigenschatten an Zylinder und Kugel sowie

1) Vgl. *J. Pillet*, a. a. O. p. 23.

2) Wegen Vereinfachungen, die sich bei 45°-Beleuchtung ergeben, vgl. die Aufsätze von *G. Feldhaus* und *H. Hertzer*, Z. f. gewerbl. Unterr. 16 (Leipzig 1902), S. 101, 169 u. 185.

Hosted by Google

des Schlagschattens, den der Randkreis K auf letztere wirft, geschieht nach obigem. Der links von p liegende Teil von K wirft noch auf den Zylinder Schatten. Er wurde mittels eines Grundrisses gefunden, worin sich der Grundriß m' des Kugelmittelpunktes m mit m'', der Grundriß des Zylinders also mit K'' deckt; K' fällt dann in die Horizontale X_{12} durch m'. Dieser Schatten ist ein Teil einer Kurve 4. Ordnung, die im Aufriß ihre hohle Seite nach unten kehrt. Im Punkt p_s berührt sie den Schlagschatten von K auf die Kugel, da in diesem Punkt Kugel und Zylinder dieselbe Tangentialebene besitzen. p_s'' hat für den Aufriß der Schlagschattenkurve Wendepunktcharakter. In t_s berührt die Kurve die Zylindererzeugende.

Den *Schlagschatten einer beliebigen Kurve K auf eine Kugel $\varkappa$* ermittelt man nach der Methode des Zurückführens (Nr. 95), indem man auf eine zu Π_1 (oder Π_2) parallele Ebene sowohl den Schatten von K als die Schatten einer Schar zu Π_1 (bzw. Π_2) paralleler Kreise von $\varkappa$ aufsucht. Insbesondre konstruiert man z. B. den Schatten des Basiskreises einer zylindrischen Platte auf eine sie stützende Halbkugel vollkommen analog wie in Nr. 96, Fig. 183 den Schatten auf einen Kegelstutz.

112. Allgemeines über Beleuchtungslehre[1]**; Schattierung ebenflächig begrenzter Körper.** Bezeichnet $\mathfrak{l}$ die Stärke (Intensität) des auf eine ebene Körperfläche ε fallenden parallelen Lichtes, so ist, wie aus der Optik bekannt, die Beleuchtungsstärke $\mathfrak{b}$ der Ebene

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{l} \cos \beta,$$

wenn β den Einfallswinkel des Lichtstrahles L, d. h. seinen Winkel mit der Ebenennormalen bezeichnet. Wäre $\mathfrak{l}$ die Größe einer längs L wirkenden Kraft, so stellte $\mathfrak{b}$ die Größe ihrer zu ε normalen Komponente dar. Nur ein Teil dieses auffallenden Lichtes wird zurückgeworfen und gelangt in unser Auge, sodaß die Helligkeit $\mathfrak{h}$ eines Oberflächenelementes eines Körpers proportional seiner Beleuchtungsstärke ist, aber außerdem noch von andern Umständen abhängt. Denn einmal ist sie bedingt durch das Material des Körpers und durch die Beschaffenheit seiner Oberfläche (rauh, matt, spiegelnd), ferner auch durch den Winkel der Ebene des Elementes gegen die Sehrichtung. Unabhängig ist die Helligkeit hingegen von der Entfernung des Gegenstandes vom Auge, wenn die zwischenliegende Luft klar ist und die Entfernung nicht mehr als 500 m beträgt[2]).

Schließt man verschiedene Stärken des auffallenden Lichtes aus und hat man keine Versuchsreihe über den Stoff und die Ober-

1) Ausführliches darüber findet man bei *Chr. Wiener*, Lehrb., I, VII. Abschn.
2) Vgl. *Chr. Wiener*, a. a. O. Nr. 477.

Hosted by Google

flächenbeschaffenheit ausgeführt, so kommt (nach *Chr. Wiener*) unter den anzuwendenden einfachen Gesetzen das *Lambert*sche Gesetz

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \cos \beta$$

der Wahrheit am nächsten, nach welchem also *die Helligkeit einer Ebene dem Kosinus des Einfallswinkels der Lichtstrahlen proportional ist.* Die Konstante $\mathfrak{a}$, welche stets < 1 ist, gibt das *Rückstrahlungsvermögen* der Ebene an. Da es sich bei der Nachahmung der Helligkeiten in der Zeichnung, matte Oberflächen mit gleichem Rückstrahlungsvermögen vorausgesetzt, bloß um die Verhältnisse der Helligkeiten handelt, so werden wir kurz

$$\mathfrak{h} = \cos \beta$$

setzen.

Um die Helligkeiten der Flächen eines ebenflächig begrenzten Körpers zu ermitteln, hat man demnach die Kosinus der Winkel zu suchen, die die Lichtrichtung mit den Flächennormalen einschließt. Zu diesem Zweck legt man durch einen Punkt $s (s' = s'')$ den Lichtstrahl L, wählt darauf Punkt t und fällt aus ihm auf die begrenzenden Ebenen ε_i die Normalen N_i (Nr. 44). Dreht man nun die Ebenen $[LN_i]$ um ihre zweiten Hauptlinien durch s zu H_2 parallel, so gelangt t nach t_{i0}, welche Punkte auf einem Kreise T um s vom Halbmesser $\overline{st}$ liegen, und N_i nach N_{i0}. Der Fußpunkt des aus s auf N_{i0} gefällten Lotes besitzt von t_{i0} einen Abstand, der, durch $\overline{st}$ gemessen, $\cos \widehat{LN_i}$, mithin der Helligkeit von ε_i gleich ist. Die zu L senkrechten Ebenen haben die Helligkeit 1, die zu L parallelen Ebenen die Helligkeit 0.

Diesen Helligkeiten entsprechend werden die Flächen schattiert. Man unterscheidet dabei aber nur eine bestimmte, festgewählte Anzahl $\mathfrak{n}$ von Helligkeitsgraden (etwa $\mathfrak{n} = 6, 10, 12, 20, \ldots$). Wenn $\mathfrak{h} = \cos \widehat{LN_i} = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{n}}$ ist ($\mathfrak{m}$ ... ganze Zahl $< \mathfrak{n}$), so sagt man, die Ebene habe den *Helligkeitsgrad* $\mathfrak{m}$ oder den *Schattierungsgrad* $\mathfrak{s} = \mathfrak{n} - \mathfrak{m}$ *bei Zugrundelegung einer* $\mathfrak{n}$*-stufigen Helligkeitsreihe oder Helligkeitsskala.* Die normalbeleuchteten Flächen (Helligkeitsgrad $\mathfrak{n}$) erhalten gar keine Schattierung, die im Streiflicht befindlichen Flächen die Schattierung $\mathfrak{n}$.

Die Herstellung der Schattierung soll durch wiederholtes Überlegen der Flächen mit demselben schwachen Schattenton aus eingeriebener chinesischer Tusche, Neutraltinte, Sepia oder dergl. geschehen. Eine Fläche, die den Schattierungsgrad $\mathfrak{s}$ besitzt, soll dabei $\mathfrak{s}$-mal mit diesem Schattenton überlegt werden. Da jedoch bei fortschreitendem Schattieren der durch neuerliches Überlegen mit dem ursprünglichen Ton bewirkte Unterschied immer geringer wird[1]), so

1) Vgl. hierzu *Chr. Wiener*, a. a. O. Nr. 494—497.

Hosted by Google

verstärke man nach Erreichung des zweiten Schattierungsgrades vor jedem neuerlichen Anlegen den ursprünglichen Ton ein wenig.

Auch die im Eigenschatten befindlichen Flächen erhalten verschiedene Schattierungsgrade und zwar erfahrungsgemäß geringere als die Streiflichtebenen. Man geht dabei von der Annahme aus, daß infolge von Reflexionen an der Atmosphäre eine der Lichtrichtung entgegengesetzt gerichtete, aber nur halb so starke Beleuchtung zustande kommt. Jene Flächen im Eigenschatten, deren Normalen in die Lichtrichtung fallen, haben also dann den Helligkeits- und Schattierungsgrad $\frac{\mathfrak{n}}{2}$. Aus diesem Grunde wählt man $\mathfrak{n}$ als gerade Zahl. Eine Ebene, die auf ihrer Lichtseite den Helligkeitsgrad $\mathfrak{m}$ hat, hat auf ihrer Schattenseite den Helligkeitsgrad $\frac{\mathfrak{m}}{2}$, mithin den Schattierungsgrad $\mathfrak{s}_1 = \left(\mathfrak{n} - \frac{\mathfrak{m}}{2}\right)$. Wegen $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} - \mathfrak{s}$, folgt daraus:

Satz 1: *Eine Ebene, die auf ihrer Lichtseite den Schattierungsgrad $\mathfrak{s}$ besitzt, hat auf ihrer Schattenseite den Schattierungsgrad* $\mathfrak{s}_1 = \frac{1}{2}(\mathfrak{n} + \mathfrak{s})$.

Fällt auf einen ebenflächig begrenzten Körper ein Schlagschatten, so erscheint erfahrungsgemäß dieser Schatten dunkler als eine Streiflichtebene und zwar desto dunkler, je heller die Flächen sonst beleuchtet sind. Wir wollen nun annehmen, daß der Schattierungsgrad der Schlagschatten vom Schattierungsgrad $\mathfrak{n}$ der Streiflichtebenen an proportional der Helligkeit der betreffenden Ebenen zunehme und für eine normal beleuchtete Ebene $2\mathfrak{n}$ betrage. Dann besteht der

Satz 2: *Auf einer Ebene, die beleuchtet den Schattierungsgrad $\mathfrak{s}$ besitzt, erhält der Schlagschatten den Schattierungsgrad* $\mathfrak{s}_2 = 2\mathfrak{n} - \mathfrak{s}$.

113. Allgemeines über Lichtgleichen krummer Flächen. Konstruktion der Lichtgleichen einer Kugel und Ausführung der Schattierung. Bei einer krummen Fläche kann man nur von der Helligkeit in einem bestimmten Punkte sprechen und versteht darunter die Helligkeit der Tangentialebene dieses Punktes, d. h. den Kosinus des Winkels, den der Lichtstrahl durch diesen Punkt mit der Flächennormalen einschließt. Sämtliche Flächenpunkte, deren Normalen mit der Lichtrichtung denselben Winkel bilden, also dieselbe Helligkeit besitzen, erfüllen im allgemeinen eine Linie, die man eine *Lichtgleiche* oder *Isophote* (ἴσος = gleich, φῶς = Licht) nennt. Jedem Helligkeitsgrade entspricht eine Lichtgleiche, die jedoch für gewisse Helligkeitsgrade imaginär werden oder auch in einen Punkt zusammenschrumpfen kann.

Satz 1: *Zwei Lichtgleichen dürfen sich im allgemeinen nicht schneiden.*

Hosted by Google

Sollte dies nämlich eintreten, so müßte die Fläche im Schnittpunkt zwei oder mehrere Tangentialebenen haben, der Punkt also einer Doppel- oder vielfachen Kurve angehören oder ein Knotenpunkt der Fläche sein (Nr. 73). In einem Knotenpunkt laufen unendlich viele Lichtgleichen zusammen.

Wir werden auf einer Fläche zum Zwecke der Schattierung nur die den einzelnen Stufen der zugrunde gelegten n-stufigen Helligkeitsreihe entsprechenden Lichtgleichen konstruieren und sie gewöhnlich durch ihren Schattierungsgrad bezeichnen; dabei wollen wir diese Zahlen mit dem positiven oder negativen Vorzeichen versehen, jenachdem die Lichtgleichen dem beleuchteten oder unbeleuchteten Teil der Fläche angehören.

Die Konstruktion der Lichtgleichen beliebiger krummer Flächen läßt sich auf die der *Kugel* zurückführen. Wir beginnen daher mit dieser.

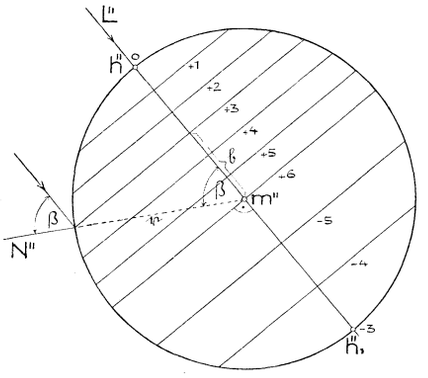


Fig. 225.

Da sämtliche Normalen einer Kugel $\varkappa = (m, \mathfrak{r})$ durch ihren Mittelpunkt m gehen, so enthält eine Lichtgleiche von $\varkappa$ alle Punkte, deren Halbmesser mit dem Lichtstrahl L durch m denselben Winkel β einschließen. *Die Lichtgleichen einer Kugel sind demnach Kleinkreise, deren Ebenen zur Lichtrichtung senkrecht stehen.*

Nehmen wir vorerst $\Pi_2 \parallel L$ an, so stellen sich die Lichtgleichen im Aufriß als gerade Linien $\perp L''$ dar, und zwar teilen sie, wenn wir $\mathfrak{n}$ Helligkeitsstufen zugrunde legen, den zu L'' parallelen Halbmesser $\overline{mh}$ in $\mathfrak{n}$ gleiche Teile. (Fig. 225 zeigt die Ausführung für $\mathfrak{n} = 6$). Denn hat die Ebene eines der zu $[mh]$ senkrechten Kreise von m den Abstand $\mathfrak{h}$ und schließen die Radien nach den Punkten dieses Kreises mit der Lichtrichtung den Winkel β ein, so ist

$$\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{r}} = \cos\beta$$

die Helligkeit der Punkte dieses Kreises. Für

$$\mathfrak{h} = 0, \quad \frac{1}{\mathfrak{n}}\mathfrak{r}, \quad \frac{2}{\mathfrak{n}}\mathfrak{r}, \quad \ldots, \quad \frac{\mathfrak{n}-1}{\mathfrak{n}}\mathfrak{r}, \quad \frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{n}}\mathfrak{r}$$

erhält man daher die Kreise von den verlangten Helligkeitsstufen 0, 1, 2, …, $\mathfrak{n}$—1, $\mathfrak{n}$ oder die Lichtgleichen $+\mathfrak{n}$, $+(\mathfrak{n}-1)$, …, $+2$, $+1$, 0, wobei die Lichtgleiche $\mathfrak{n}$ mit der Eigenschattengrenze zusammenfällt und die Lichtgleiche 0 in den hellsten Punkt h zusammenschrumpft. Die Ebenen dieser Lichtgleichen sollen mit $\varepsilon^{(\mathfrak{n})}$, $\varepsilon^{(\mathfrak{n}-1)}$, …, $\varepsilon^{(2)}$, $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(0)}$

Hosted by Google

bezeichnet werden. Der Gegenpunkt h_1 von h hat nach obiger Annahme die Helligkeit $\frac{\pi}{2}$, und wenn wir den Halbmesser $\overline{mh_1}$ in $\frac{\pi}{2}$ gleiche Teile teilen, so gehen durch die Teilpunkte (von der Eigenschattengrenze an gezählt) die Ebenen der Lichtgleichen $-(\pi-1)$, $-(\pi-2)$, ..., $-\frac{\pi}{2}$ (Punkt h_1). Wir haben also folgendes Ergebnis:

Satz 2: *Bezeichnen h, h_1 die Endpunkte des zur Lichtrichtung parallelen Kugeldurchmessers, wobei h der beleuchteten, h_1 der unbeleuchteten Kugelhälfte angehört, und teilt man den Halbmesser mh in π, den Halbmesser mh_1 in $\frac{\pi}{2}$ gleiche Teile, so schneiden die durch diese Teilpunkte senkrecht $[hh_1]$ gelegten Ebenen aus der Kugel die Lichtgleichen aus.*

Ist Π_2 nicht parallel L, so stellen sich die Lichtgleichen der Kugel im Aufriß als ähnliche Ellipsen dar. Ihre Konstruktion wird, wie bei der Ermittlung der Eigenschattengrenze der Kugel (Nr. 110), unter Verwendung des Seitenrisses auf die zu L parallele zweitprojizierende Ebene durch den Mittelpunkt m auf den eben behandelten Sonderfall zurückgeführt. Fig. 226 zeigt für 45°-Beleuchtung und unter Zugrundelegung einer 6-stufigen Reihe die Lichtgleichen im Aufriß, für die Lichtgleiche + 3 auch die Konstruktion ihrer Achsen und ihrer Umrißpunkte t_3'', u_3''.

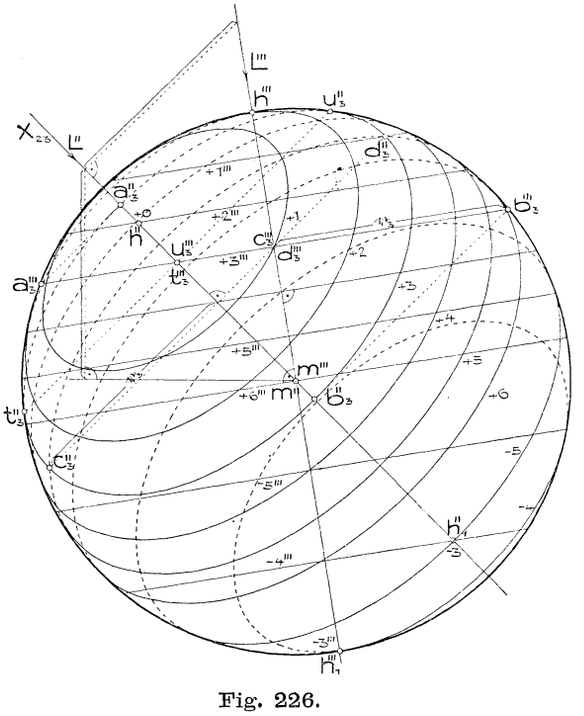


Fig. 226.

Den Grundriß dieser Lichtgleichen konstruiert man, wenn er einmal gebraucht werden sollte, vollkommen analog mittels eines Seitenrisses auf die zu L parallele erstprojizierende Ebene durch m ohne Bezugnahme auf den schon gezeichneten Aufriß.

Soll nun die Kugel (oder eine andre Fläche) den Lichtgleichen gemäß mittels Tuschlagen abschattiert werden, so entferne man vor-

Hosted by Google

erst sämtliche Konstruktionslinien und ziehe die Lichtgleichen mit dem Bleistift bloß so stark nach, daß sie als Grenzlinien für das Tuschen sichtbar bleiben. Noch besser ist es überhaupt, die Konstruktion der Lichtgleichen und der etwaigen Schlagschattengrenzen in einer besondern Zeichnung durchzuführen und das Ergebnis mit Pauspapier in die zu tuschende Figur zu übertragen (indem man die Pause auf der Rückseite mit einem weichen Graphitstift schwärzt). Hat man sich dann den dem Schattierungsgrad 1 entsprechenden Grundton hergestellt, die Fläche auch vorher mit reinem Wasser etwas angefeuchtet, so überlege man damit alles, was außerhalb der Lichtgleiche $+1$ liegt, sowie alle im Schlagschatten befindlichen Teile, kurz alles, was einen höhern Schattierungsgrad als $+1$ besitzt. Nachdem die Fläche getrocknet ist, übertusche man mit demselben Ton wieder alle Schlagschatten und alle außerhalb $+2$ befindlichen übrigen Teile, hierauf (nach Verstärkung des Grundtons, vgl. Nr. 112), die Schlagschatten stets eingeschlossen, alle außerhalb $+3$, das nächste Mal alle außerhalb $+4$ befindlichen Teile, dann alles, was zwischen $+5$ und -4 liegt, und schließlich die Schlagschatten und jenen Teil, der zwischen 6 und -5 liegt. Man ist dadurch beim Schattierungsgrad 6 angelangt. Nach Nr. 112, Satz 2 erhalten jene Flächenteile, die im Licht den Schattierungsgrad $\mathfrak{s}$ haben, im Schlagschatten den Schattierungsgrad $12-\mathfrak{s}$. Man wird also des weitern, den Grundton stets etwas verstärkend, jene Teile des Schlagschattens überlegen, die innerhalb der Lichtgleichen 6, $+5$, $+4$, ..., $+1$ liegen (vgl. die dem Bande angehängte Tafel III).

Bleibt innerhalb $+1$ ein größerer Teil weiß, so erhöht man die Wirkung durch Einschalten einer Lichtgleiche $+\frac{1}{2}$ und Antuschen des zwischen $+\frac{1}{2}$ und $+1$ befindlichen Flächenteils mit einem entsprechend schwächeren Ton als zur Herstellung des ersten Schattierungsgrades diente (vgl. Tafel III).

Ein derartig schattiertes Bild einer Kugel oder einer andern krummen Fläche erweckt im Beschauer eine besonders plastische Vorstellung.

Will man bei der Darstellung eines Körpers auch noch den Materialfarbton nachahmen, so mische man diesen entweder gleich dem zur Schattierung dienenden Grundton bei oder man schattiere mit chinesischer Tusche (ziemlich kräftig!) und lege schließlich den Materialton darüber.

Hosted by Google

VI. Kapitel.

Drehflächen.

114. Erzeugung und Eigenschaften der Drehflächen. Denkt man sich irgend eine ebene oder unebene Linie C mit einer festen Geraden A in starrer Verbindung und dreht nun dieses Gebilde um A, so beschreibt C eine Fläche, die man eine *Dreh-* oder *Rotationsfläche* nennt. A heißt die *Achse* der Drehfläche. Jeder Punkt p der erzeugenden Kurve C beschreibt bei der Drehung einen Kreis, dessen Ebene zu A senkrecht steht und dessen Mitte in A liegt (Nr. 11, Fig. 21). Man nennt diese von den Punkten von C beschriebenen Kreise, in Anlehnung an die geographische Benennung, die *Parallelkreise* der Drehfläche.

Die Drehflächen dürften unter allen krummen Flächen die in der Technik und im Gewerbe am häufigsten auftretende Flächenart bilden. Es sei diesbezüglich nur an die zahllosen auf der Drehbank und Töpferscheibe hergestellten Körper, an die verschiedenen steinernen, hölzernen und eisernen Säulen sowie an zahlreiche architektonische Einzelheiten erinnert.

Aus der Entstehungsweise einer Drehfläche Φ folgt, daß sie sich bei einer Drehung um A in sich selbst verschiebt, daß sie mithin durch Drehung einer jeden auf ihr gezeichneten Kurve erzeugt wird, sobald diese sämtliche Parallelkreise reell schneidet. Läßt man letztere Einschränkung weg, so erzeugt der reelle Zug der Kurve nur einen Teil der Drehfläche. Insbesondre entsteht Φ auch durch Drehung der Schnittkurve einer durch A gelegten Ebene mit der Fläche. Da die Ebenen durch A bei der Drehung ineinander übergehen und jede bei der Drehung um 180^0 mit sich selbst zur Deckung gelangt, so folgt:

Sämtliche Schnitte einer Drehfläche mit Ebenen durch ihre Achse (Meridiane) sind untereinander kongruent und jeder ist bezüglich der Achse symmetrisch.

Durch Angabe der Achse und eines Meridians ist die Drehfläche bestimmt. Zur Ausführung von Konstruktionen werden die Parallelkreise und Meridiane verwendet; sie schneiden sich unter rechtem Winkel, weil jede Meridianebene sämtliche Parallelkreise unter rechtem Winkel schneidet.

Die Berührungsebene in einem Punkte p von Φ ist durch die Tangenten an den Parallelkreis und Meridian durch p bestimmt. Daraus folgt:

Satz 1: *Die Tangentenebenen in den Punkten eines Meridians umhüllen einen Zylinder, dessen Mantellinien zur Meridianebene senkrecht stehen.*

Hosted by Google

Wird $A \parallel \Pi_2$ gewählt, so bildet der zu Π_2 parallele Meridian — der *Hauptmeridian* — den wirklichen zweiten Umriß der Fläche (Nr. 92, S. 201). Da bei der Drehung von Φ um A jede Tangentenebene wieder in eine solche übergeht, so folgt ferner

Satz 2: *Die Tangentenebenen in den Punkten eines Parallelkreises umhüllen im allgemeinen einen Drehkegel, dessen Mantellinien die Meridiantangenten sind.*

Ausnahmsweise geht dieser Kegel in einen Zylinder oder auch in eine Ebene über. Im ersten Fall ist dann der betreffende Parallelkreis ein *größter* oder *kleinster Parallelkreis* und wirklicher Umriß für eine Parallelprojektion in der Richtung von A; im zweiten Fall berührt die Drehfläche längs des betreffenden Parallelkreises dessen Ebene. Für den Normalriß auf eine zu A senkrechte Ebene besteht insbesondere der scheinbare Umriß aus einer Anzahl konzentrischer Kreise, die jedoch auch sämtlich imaginär sein können.

115. Darstellung einer Drehfläche. Grundaufgaben. Für die Darstellung einer Drehfläche wählt man die Achse A gewöhnlich senkrecht zu einer Rißebene. Nehmen wir in Fig. 227 $A \perp \Pi_1$ an, so erscheint der zu Π_2 parallele Hauptmeridian M im Aufriß in seiner wahren Gestalt M'', im Grundriß als Gerade M' durch A' senkrecht zu den Ordnungslinien; M'' bildet den zweiten scheinbaren Umriß, während der erste scheinbare Umriß aus den konzentrischen Kreisen U_1', U_2' besteht. Die oben und unten die Fläche begrenzenden *Randkreise* R_1 und R_2 gehören nicht zum ersten Umriß, da die Tangentenebenen in ihren Punkten nicht zu Π_1 senkrecht stehen.

Hauptaufgabe: *Aus einem Riß eines auf der Drehfläche liegenden Punktes seinen zugeordneten Riß zu finden (Fig. 227).*

Sei z. B. p'' gegeben und p' gesucht, so zeichne man den Parallelkreis P durch p; dann liegt p' auf P'. P'' ist die horizontale Gerade durch p'' und, wenn sie M'' in $1_2''$ schneidet, P' der mit $\overline{A''1_2''}$ um A' beschriebene Kreis. Die Ordnungslinie durch p'' schneidet P' in zwei Punkten p_1', p_2', entsprechend den beiden Punkten der Drehfläche, die in p'' ihren Aufriß haben.

Analog findet man den Aufriß eines Punktes q, dessen Grundriß q' gegeben ist. Der durch q' um A' gezogene Kreis Q' (in Fig. 227 identisch mit P') ist der Grundriß des Parallelkreises Q durch q. Seinen Aufriß findet man mittels des Schnittpunktes $1'$ von Q' mit der Geraden M', von dem der Aufriß in M'' im allgemeinen mehrdeutig (in der Figur zweideutig: $1_1''$, $1_2''$) bestimmt ist.

Mit Hilfe dieser Aufgabe läßt sich aus dem einen Riß einer der Drehfläche Φ angehörigen Kurve der andre Riß finden. Insbesondre

Hosted by Google

ist damit die *Konstruktion des Schnittes von Φ mit einer projizierenden Ebene* ε gegeben. Sei $\varepsilon \perp \Pi_1$, so enthält ihr Grundriß ε' zugleich den Grundriß der Schnittkurve K. Daraus findet man auf obige Weise beliebig viele Punkte von K''. Da die Ebene $[A\,|\,\varepsilon]$ sowohl für Φ als ε Symmetrieebene ist, so wird ihre Schnittlinie mit ε Symmetrieachse für K und deren Aufriß Symmetrieachse für K'' sein. Die höchsten und tiefsten Punkte h_1'', h_2'' der (in Fig. 227 zweiteiligen) Kurve K'' liegen in dieser zu A parallelen Geraden, deren Grundriß $h' = [A'\,|\,\varepsilon' \cdot \varepsilon']$ ist.

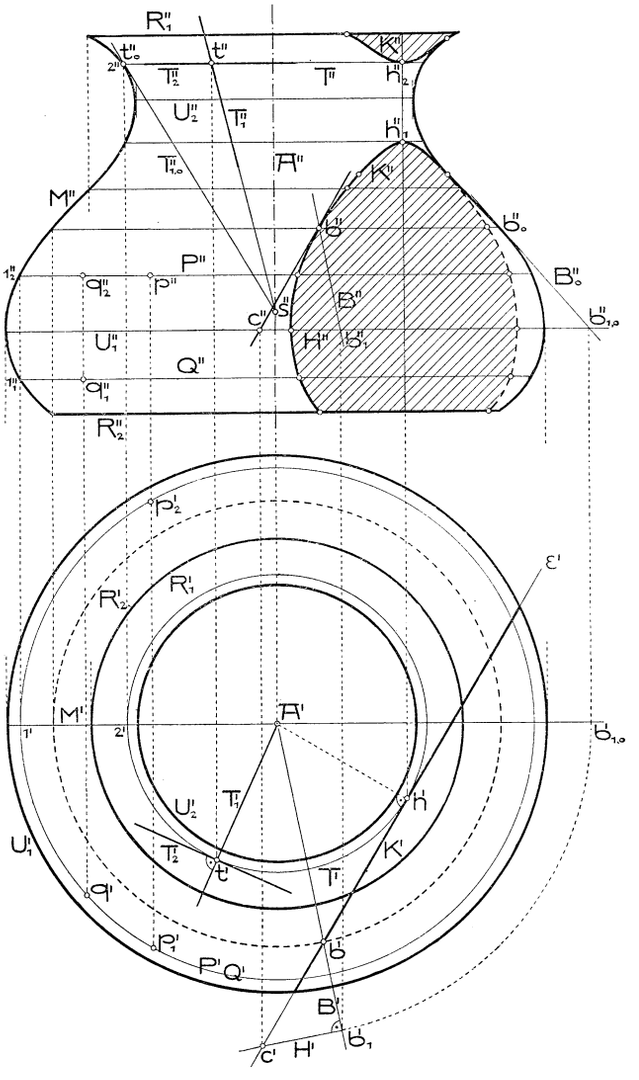


Fig. 227.

Um die Schnittpunkte einer Geraden G mit Φ zu erhalten, ermittelt man den Schnitt von Φ mit einer projizierenden Ebene durch G (etwa mit $[G \| A]$); diese Kurve schneidet G in den gesuchten Punkten. Hierbei genügt die Konstruktion jener Stücke der Schnittkurve, auf denen voraussichtlich Schnittpunkte liegen werden.

Die Tangentialebene an die Drehfläche in einem Punkte t ist durch die Tangente T_1 an den Meridian und die Tangente T_2 an den Parallelkreis T des Punktes t bestimmt (Nr. 114). Um T_1'' zu erhalten, drehen wir den Meridian des Punktes t in den Hauptmeridian M

Hosted by Google

hinein, wodurch t nach t_0 gelangt (Fig. 227) und T_1 in die Tangente $T_{1,0}$ des Punktes t_0 an M übergeht. Bei der Rückdrehung bleibt Punkt $s = [T_{1,0}\,A]$ fest, es wird daher $T_1'' = [s''t'']$ und, wegen $s' = A'$, $T_1' = [A't']$. Hingegen ist schon $T_2'' = T''$ und T_2', als Tangente an T', $= [t' \mid T_1']$. T_2 ist erste Hauptlinie, T_1 erste Fallinie der gesuchten Tangentialebene; diese ist durch T_1 allein bestimmt (Nr. 43, letzter Absatz).

Legt man in einem beliebigen Punkte b des oben gefundenen Schnittes K an Φ die Berührungsebene β, so ist ihr Schnitt mit ε die Tangente von K (Nr. 73, Satz 4). Die erste Fallinie B von β (Konstruktion mittels Paralleldrehung) schneide etwa die Ebene des Parallelkreises U_1 in b_1; dann ist die durch b_1 senkrecht zu B gelegte Horizontale H eine erste Hauptlinie von β und, wenn sie ε in c trifft, $[cb]$ die gesuchte Tangente an K, also $[cb]'' = [c''b'']$ die an K''.

Ist eine *Drehfläche Φ durch ihre Achse A und eine beliebig auf ihr verlaufende Kurve C gegeben*[1]), so erhält man Punkte des Hauptmeridians, wenn man die durch einzelne Punkte von C gehenden Parallelkreise mit der Hauptmeridianebene zum Schnitt bringt. Fig. 228 zeigt z. B. die Auffindung des zweiten Hauptmeridians M für den Fall, als $A \perp \Pi_3$ steht und samt C durch Auf- und Kreuzriß bestimmt ist. Für den Punkt p von C ist die Konstruktion des Schnittpunktes p_0 des Parallelkreises P durch p mit der Hauptmeridianebene $\mu = [A \,\|\, \Pi_2]$ durchgeführt. Um die Tangente an M'' in p_0'' direkt zu erhalten, legen wir in p die Tangente T an C und drehen sie um A, bis p nach p_0 gelangt; die neue Lage heiße T_0. Bei dieser Drehung bleibt T beständig Tangente der Fläche; T_0 gehört also der Tangentenebene an Φ in p_0 an, und da diese zweitprojizierend ist, fällt ihr M'' berührender Aufriß mit T_0'' zusammen. T_0'' ist demnach Tangente von M''. — Zur Ausführung der Drehung wurde auf T ein zweiter Punkt q gewählt, sein Drehungskreis Q im Kreuz- und Aufriß gezeichnet, und $\overline{p_0'''\,q_0'''} = \overline{p'''\,q'''}$ gemacht (Nr. 11, Satz 1).

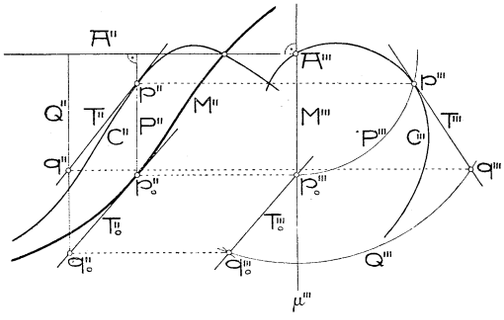


Fig. 228.

Schneidet, wie in Fig. 228, C die Achse, so ist dieser Punkt für die Drehfläche ein Knotenpunkt.

1) Solche Aufgaben behandelt: *G. Schreiber*, Geom. Port-Folio, 2. Heft, Karlsruhe 1843; Erläuterungen hierzu, S. 176 f.

Hosted by Google

116. Ebene Schnitte und Durchdringungen von Drehflächen. Wir nehmen $A \perp \Pi_1$, die Drehfläche Φ durch ihren zweiten Hauptmeridian M gegeben und die schneidende Ebene ε in allgemeiner Lage an. Suchen wir $a = [A\varepsilon]$, ferner die durch a gehende erste Fallinie F von ε, so liegen bezüglich der Ebene $[FA]$ sowohl ε als Φ, mithin auch deren Schnittkurve K symmetrisch. $[FA]$ ist daher Symmetrieebene und F *Symmetrieachse* von K.

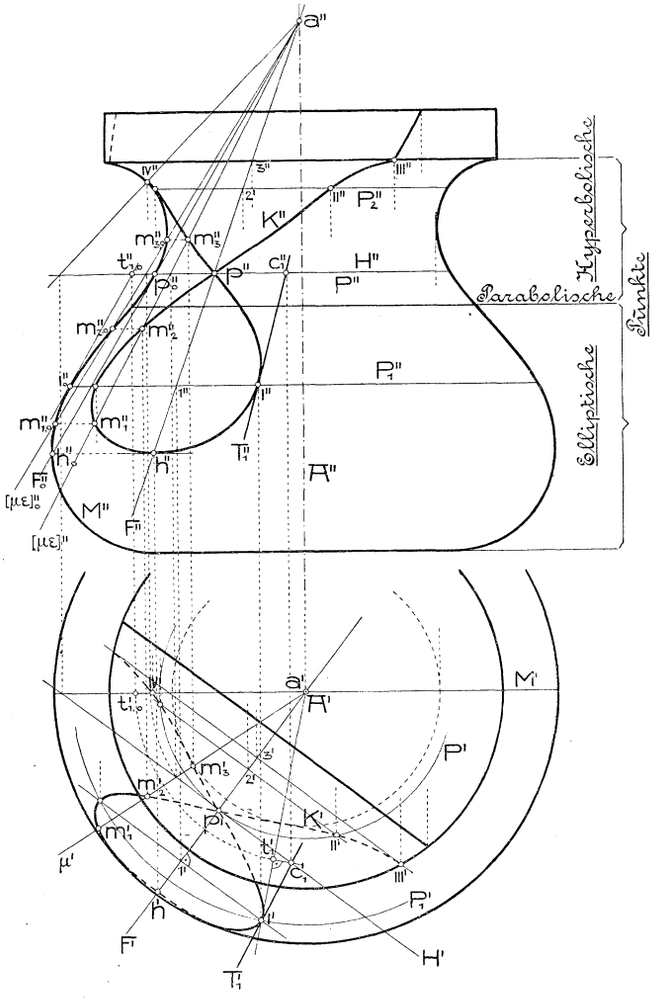


Fig. 229.

Punkte der Schnittkurve ergeben sich, wenn man irgend eine Parallelkreis- oder Meridianebene mit ε schneidet und die Schnittpunkte der erhaltenen Geraden mit dem Parallelkreis bzw. Meridian aufsucht. In Fig. 229 ist ε als die Tangentenebene an Φ im Punkte p gewählt. Die Tangente H an den Parallelkreis P und die Tangente F an den Meridian durch p (nach Nr. 115 konstruiert) sind dann erste Haupt- und Fallinie von ε. Die Ebene des beliebig gewählten Parallelkreises P_1 schneidet nun ε in einer zu H parallelen Geraden, deren auf F liegender Punkt 1 im Auf- und Grundriß unmittelbar gezeichnet werden kann. Die Schnittpunkte von P_1' mit dem Grundriß $[1' \| H']$ der Schnittgeraden sind die Grundrisse der beiden auf P_1 liegenden

Hosted by Google

Punkte der Kurve K, von denen in der Figur einer mit $1'$ bezeichnet wurde; $1''$ liegt auf P_1''.

Die Tangente T_1 an K in 1 ist die Schnittlinie der Tangentenebene τ_1 an Φ in diesem Punkt mit ε. Einen zweiten Punkt c_1 von T_1 erhält man (analog wie in Nr. 115 für den Schnitt mit einer projizierenden Ebene) als Schnitt der Spuren von τ_1 und ε auf einer passend gewählten Horizontalebene, z. B. auf der durch p. Die mittels Hineindrehens des Meridians durch 1 in den Hauptmeridian M konstruierte erste Fallinie von τ_1 durch 1 (Tangente an den Meridian durch 1) schneidet jene Ebene in t_1; die erste Hauptlinie von τ_1 durch t_1 schneidet H im Punkte c_1 ($c_1' = [t_1' \mid [1'a'] \cdot H']$), sodaß $[c_1 1] = T_1$ ist.

Auf dieselbe Weise erhält man Punkte von K auf andern Parallelkreisen, die man vorteilhaft so wählt, daß sie im Grundriß paarweise zusammenfallen; in Fig. 229 z. B. ist $P_2' = P'$. Insbesondre wird man die den Randkreisen sowie den größten und kleinsten Parallelkreisen angehörigen Punkte von K ermitteln.

Die *höchsten und tiefsten Punkte* von K liegen in der Symmetrieachse, sind also die Schnittpunkte von F mit dem Meridian der Ebene $[FA]$. Um deren Aufrisse zu erhalten, drehen wir $[FA]$ samt F in die Hauptmeridianebene hinein, wobei der Meridian mit M zur Deckung kommt und der Schnittpunkt a von F mit A festbleibt. Wir haben also nur einen zweiten Punkt von F, etwa den der Horizontalebene durch p angehörigen, zu drehen. Im vorliegenden Fall wird die gedrehte Lage F_0 von F zur Tangente an M in p_0. F_0'' schneidet M'' noch in h_0''; $h'' = [F'' \cdot h_0'' \mid A'']$ ist dann der Aufriß des tiefsten Punktes von K.

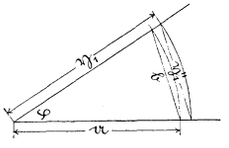
Bei der Ermittlung dieses Punktes wurde eigentlich schon die zweite Methode zur Konstruktion von Punkten der Schnittkurve angewandt, nämlich die *Schnittpunkte einzelner Meridiane mit* ε aufzusuchen. Sei μ irgend eine durch μ' gegebene Meridianebene, $[\mu\varepsilon]$ ihre durch a und $[\mu H]$ bestimmte Schnittlinie mit ε, und dreht man μ samt dieser Geraden in die Hauptmeridianebene hinein, so gelangt $[\mu\varepsilon]$ nach $[\mu\varepsilon]_0$, während der Meridian mit M zusammenfällt. Die Schnittpunkte $m_{1,0}$, $m_{2,0}$, $m_{3,0}$ von $[\mu\varepsilon]_0$ mit M geben, zurückgedreht, die Punkte m_1'', m_2'', m_3'' von K''. Für den Hauptmeridian (Schnittpunkt IV) fällt die Paralleldrehung weg. Diese Methode läßt sich auch so auffassen, daß aus a Drehkegel mit der Achse A gelegt werden, die Φ nach Parallelkreisen, ε nach Geraden durch a schneiden; die Schnittpunkte dieser Kreise und Geraden sind Punkte von K. Legt man aus a insbesondre einen Φ berührenden Kegel, so liefert er Punkte von K, deren Tangenten durch a gehen.

Die Schnittkurve K in Fig. 229 besitzt, in Übereinstimmung mit Nr. 73 (zweiter Absatz nach Satz 5), in p einen *Doppelpunkt*; die

Hosted by Google

Tangenten an die Schnittkurve in p sind die *Haupttangenten* dieses Punktes.

Handelt es sich bloß um die Ermittlung des Aufrisses der Schnittkurve K, so verfährt man einfacher nach der in Fig. 230 angewandten Methode. Die Drehfläche Φ sei wieder durch ihren zweiten Hauptmeridian M und ihre zu Π_1 senkrechte Achse A gegeben, deren Grundriß A' irgendwo auf A'' angenommen wurde, die Schnittebene ε durch ihre A in a schneidende erste Fallinie $F(F'', F')$. Der Normalriß von K auf die Symmetrieebene $\sigma = [FA]$ fällt in die Gerade F, und wenn man σ in die Hauptmeridianebene hineindreht, in



die (mittels des auf F angenommenen Punktes f konstruierte) Gerade F_0''. Dieser gedrehte Normalriß soll als Seitenriß betrachtet und demnach mit K''' bezeichnet werden. Um nun den Aufriß eines Punktes p_1 von K zu erhalten, dessen Seitenriß p_1''' beliebig auf K''' gewählt wurde, ermitteln wir seinen Abstand η_1 von der Seitenrißebene mittels der Umklappung P_1^{IV} des Parallelkreises P_1 durch diesen Punkt. Dieser zu σ senkrechte Abstand hat eine zweite Tafelneigung, die zu der von F' komplementär ist; η_1 verhält sich daher zu seinem Aufriß η_1'' wie die auf F' gewählte Strecke $\mathfrak{a} = \overline{A'f'}$ zum Abstande $\mathfrak{b} = \overline{f'f''}$ ihres Endpunktes f' von der Hauptmeridianebene. Um die Verkürzung η_1'' auch für andre Punkte rasch zu erhalten, zeichnen wir in einer Nebenfigur den *Verkürzungswinkel* φ für die Verkürzung $\mathfrak{b} : \mathfrak{a}$[1]). Wird η_1'' auf P_1'' vom Schnittpunkt $1''$ mit F'' aus beiderseitig abgetragen, so sind die Endpunkte p_1'', q_1'' Punkte

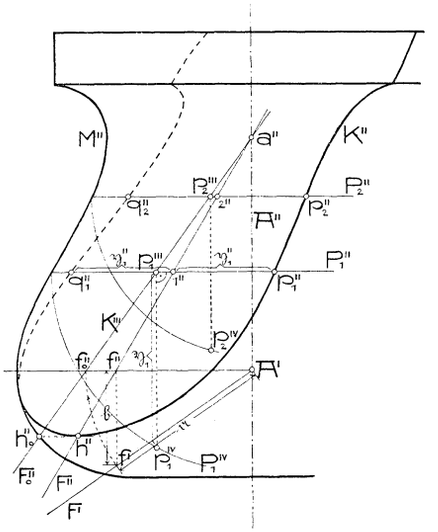


Fig. 230.

1) Wir beschreiben zu diesem Zweck mit dem Halbmesser $\mathfrak{a}$ einen Bogen, schneiden darauf die Sehne von der Länge $\mathfrak{b}$ ab und ziehen die Radialstrahlen durch deren Endpunkte; sie bilden den Winkel φ. Soll nun die Strecke η_1 verkürzt werden, so nehme man sie in den Zirkel, setze im Scheitel von φ ein und schneide die Schenkel; die Entfernung dieser Schnittpunkte ist $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\ \eta_1 = \eta_1''$.

Hosted by Google

von K''. Analog findet man andre Punkte von K''; der tiefste Punkt h'' ergibt sich wie früher.

Bei allgemeiner Lage der Drehachse wird die Ermittlung eines ebenen Schnittes durch Einführung von Seitenrissen auf den oben behandelten Fall zurückgeführt.

Die Schnittlinie K einer Drehfläche Φ mit einer Ebene ε läßt sich auch als *Hüllkurve* einer Schar von ∞^1 Kreisen gewinnen. Längs jedes Parallelkreises wird nämlich Φ von einer Kugel berührt, deren Mittelpunkt der Schnitt der Drehachse mit der Normalen des Hauptmeridians in dessen Schnittpunkt mit dem Parallelkreis ist (vgl. Nr. 122). Jede solche Kugel schneidet aus ε einen Kreis aus, der K in den zwei (nicht zu konstruierenden) Schnittpunkten von ε mit dem Parallelkreis berührt. Die Schar der ∞^1 der Fläche Φ eingeschriebenen Kugeln schneidet mithin ε in einer Kreisschar, deren Hüllkurve K ist. Diese Methode läßt sich auf alle Hüllflächen (Nr. 73, S. 146) einer Schar von ∞^1 Kugeln anwenden[1]).

Eine sehr häufig auftretende Drehfläche (vgl. Fig. 237 u. 252), der *Torus* oder die *Kreisringfläche* (auch *Wulstfläche* genannt), die als (halben) Hauptmeridian M einen Kreis hat, dessen Mitte nicht der Drehachse A angehört[2]), läßt sich noch auf eine zweite Art als Hüllfläche von Kugeln auffassen. Betrachtet man nämlich M als Hauptkreis einer Kugel und läßt diese mit um A rotieren, so wird sie vom Torus stets längs eines Meridians berührt. Der Torus ist daher auch Hüllfläche einer Schar kongruenter Kugeln, deren Mitten einem Kreise O angehören[3]). Die Schnittkurve K des Torus mit einer Ebene ε ist demnach auch die Hüllkurve der Schnittkreise von ε mit den Kugeln dieser Schar. Die Mittelpunkte dieser Schnittkreise gehören einer Ellipse E an, nämlich dem Normalriß von O auf ε, und wenn ε die Achse A im Endlichen schneidet, so folgert man auch leicht, daß diese Kreise einen Kreis um $[\varepsilon A]$ orthogonal schneiden. Die Hüllkurve einer solchen Kreisschar ist aber eine sogenannte *zyklische Kurve vierter Ordnung. — Berührt ε den Torus in zwei Punkten* t_1 und t_2 (d. h. steht sie zu einer Meridianebene senkrecht und geht durch eine innere gemeinsame Tangente der Meridiankreise), *so zerfällt die Schnittkurve in zwei* durch t_1, t_2 gehende, mit O kongruente *Kreise*[4]). Ist ε zu A

1) *R. Mehmke*, Z. Math. Phys. 46 (1901), S. 246—248.

2) Wenn man von der *Ringfläche* spricht, setzt man meist sogar voraus, daß M die Achse A nicht reell schneidet.

3) Der Torus ist nach dieser Erzeugungsweise ein Sonderfall der sogenannten *Dupin*schen *Zyklide*, d. i. der Hüllfläche jener ∞^1 Kugeln, welche drei gegebene Kugeln (auf vorgeschriebene Art) berühren.

4) Beweis. Der Mittelpunkt o der obigen Ellipse E fällt jetzt mit dem von O zusammen, $t_1 t_2 (\overline{t_1 t_2} = 2\mathfrak{b})$ ist ihre kleine und der dazu senkrechte Durchmesser $cd (\overline{cd} = 2\mathfrak{a})$ von O ihre große Achse. Der Orthogonalkreis N der Kreis-

Hosted by Google

in einem dem Meridiankreisradius gleichen Abstande parallel, so schneidet sie die Ringfläche nach einer *Cassinischen Linie*. Diese wird insbesondre zur *Lemniskate*, wenn ε zugleich die Ringfläche auf der Innenseite berührt[1]).

Zur *Konstruktion der Durchdringungskurve zweier Drehflächen* Φ_1, Φ_2 wird man etwa Φ_1 mit den Parallelkreisebenen von Φ_2 schneiden und die gemeinsamen Punkte jeder dieser Schnittkurven mit dem betreffenden Parallelkreis aufsuchen. Manchmal kann sich besser die Verwendung der Meridianebenen statt der Parallelkreisebenen eignen.

Schneiden sich die Achsen von Φ_1 und Φ_2, dann vereinfacht sich die Konstruktion der Durchdringungskurve bedeutend, wenn man Hilfskugeln verwendet, deren Mitten in den Achsenschnittpunkt fallen, da sie beide Drehflächen nach Kreisen schneiden. Die Ausführung ist der in Nr. 102 für Drehzylinder erklärten völlig analog, sobald man den Normalriß auf die Ebene der beiden Achsen verwendet. Für

---

schar ist jetzt der Kreis über $t_1 t_2$ als Durchmesser, da die der Wulstfläche längs der Meridiane eingeschriebenen Kugeln die Kugel $(o, \overline{ot_1})$ orthogonal schneiden. Bezeichnen (Fig. 231) f_1, f_2 die Brennpunkte, m mit den Koordinaten x, y einen Punkt von E, so ist, unter $\mathfrak{e}$ die lineare Exzentrizität verstanden,

$$\overline{f_1 m}^2 = (\mathfrak{e}+x)^2 + y^2 = x^2 + y^2 + \mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2 + 2\mathfrak{e}x$$
$$= \overline{om}^2 - \mathfrak{b}^2) + \mathfrak{a}^2 + 2\mathfrak{e}x.$$

$\overline{om}^2 - \mathfrak{b}^2$, als Potenz von N in m, ist das Radiusquadrat ($\mathfrak{r}^2$) des zu N orthogonalen Kreises K um m. Wir können also schreiben

$$\overline{f_1 m}^2 = \mathfrak{r}^2 + \mathfrak{a}^2 + 2\mathfrak{e}x.$$

Nun ist aber

$$\mathfrak{e}^2 x^2 = \mathfrak{a}^2 x^2 - \mathfrak{b}^2 x^2$$

oder, mit Berücksichtigung der Ellipsengleichung

$$\mathfrak{b}^2 x^2 = \mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}^2 - \mathfrak{a}^2 y^2,$$
$$\mathfrak{e}^2 x^2 = \mathfrak{a}^2(x^2 + y^2 - \mathfrak{b}^2) = \mathfrak{a}^2 \mathfrak{r}^2.$$

Hierdurch wird

$$\overline{f_1 m} = \mathfrak{a} \pm \mathfrak{r}.$$

K berührt daher den um f_1 mit dem Halbmesser $\mathfrak{a}$ beschriebenen oder durch t_1 und t_2 gehenden Kreis und analog auch den um f_2 beschriebenen Kreis durch t_1, t_2.

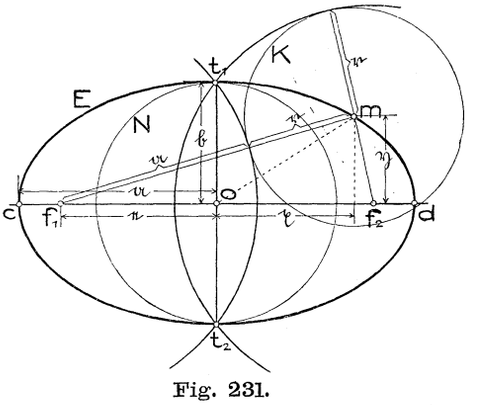


Fig. 231.

Diesen Satz hat *Y. von Villarceau*, C. R. Ac. sc., 27 (1848), p. 246, mitgeteilt. Nach einem allgemeineren von *A. Mannheim*, Nouv. Ann. Math. 19 (1860), p. 75, angegebenen Satz schneidet jede doppeltberührende Kugel die Ringfläche in zwei Kreisen. Bei Benutzung des absoluten Kegelschnittes folgen diese Sätze, wie wir in Nr. 133 sehen werden, unmittelbar.

1) Beweise dafür finden sich bei *Chr. Wiener*, Lehrb., II, Nr. 159.

Hosted by Google

Drehflächen 2. O. (vgl. Nr. 134) ist der Riß der Schnittkurve auf die Achsenebene aus denselben Gründen wie für Drehzylinder eine Kurve 2. O.[1])

117. Verhalten einer krummen Fläche in der Umgebung eines ihrer regulären Punkte. Dupinsche Indikatrix. Wir haben gesehen, daß für viele Zwecke (wie z. B. für die Untersuchung der Beleuchtungsverhältnisse) eine krumme Fläche Φ in der Umgebung eines ihrer regulären Punkte p durch die Tangentialebene ersetzt werden darf. Dies ist jedoch nicht mehr zulässig bei Untersuchungen, wo drei aufeinanderfolgende Flächenpunkte in Betracht kommen, z. B. wenn man die Krümmung der auf der Fläche verlaufenden Kurven im Punkte p untersuchen oder über die Lage der Tangente an die Eigenschattengrenze in p Aufschluß erhalten will. Bei derartigen Untersuchungen bedient man sich mit großem Vorteil des folgenden differentialgeometrischen Satzes[2]):

Satz 1: *Eine zur Tangentenebene in einem regulären Flächenpunkte p parallele und von ihr um eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung entfernte Ebene schneidet die Fläche nach einer Kurve, die (unter Vernachlässigung unendlich kleiner Größen von höherer als zweiter Ordnung) in der Umgebung des Punktes p als Kurve zweiter Ordnung betrachtet werden darf.*

Man nennt diesen unendlich kleinen Kegelschnitt nach *Ch. Dupin*[3]), von dem diese Betrachtungen herrühren, die *Indikatrix* des Flächenpunktes.

Die Schnitte der Fläche Φ mit Ebenen durch die Normale N im Punkte p heißen die *Normalschnitte* dieses Punktes. Da eine ebene (oder auch räumliche) Kurve in der Umgebung eines ihrer Punkte durch den Krümmungskreis ersetzt werden kann, so halbiert die Normale des Kurvenpunktes die zur Tangente parallelen unendlich nahen Sehnen. Daraus folgt, daß die Indikatrix P des Flächenpunktes p von den Normalschnitten durch p in Punktepaaren geschnitten wird, die den Normalriß von p auf die Indikatrixebene zur Mitte haben; oder anders ausgedrückt:

Satz 2: *Der Normalriß p' von p auf die Indikatrixebene ist der Mittelpunkt der Indikatrix und deren Durchmesser sind zu den Tangenten in p an die zugehörigen Normalschnitte parallel.*

1) Bezüglich der Art dieser Kurve vgl. *R. Schüssler*, Monatsh. Math. Phys. 5 (1894), S. 241—254, wo auch weitere Literatur über den Gegenstand angeführt ist.

2) Bezüglich seines Beweises sei etwa verwiesen auf: *E. Czuber*, Vorl. üb. Differential- und Integralrechnung, Bd. I, 2. Aufl., Leipzig 1906, S. 527 f., und *G. Scheffers*, Einführung in die Theorie der Flächen, Leipzig 1902, S. 138 f.

3) Développements de géométrie, Paris 1813, p. 149.

Hosted by Google

Die zu konjugierten Durchmessern der Indikatrix P parallelen Flächentangenten durch p heißen *konjugierte Flächentangenten.* Zu jeder Tangente einer krummen Fläche gibt es (mit Ausnahme eines unter c) erwähnten Falles) e i n e konjugierte Tangente.

Es sollen nun die drei möglichen Fälle, daß die Indikatrix elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch sei, etwas eingehender untersucht werden.

a) Ist P eine *Ellipse*, so schneiden alle Normalschnitte durch p die Indikatrix in reellen Punkten, wenden also alle ihre konkave Seite der Indikatrixebene zu. Die Tangentenebene in p schneidet daher Φ in einer Kurve mit einem isolierten Doppelpunkt in p. Ein solcher Punkt heißt nach Nr. 73, S. 146 *elliptisch*; diese Benennung findet jetzt durch die zugehörige elliptische Indikatrix ihre Rechtfertigung.

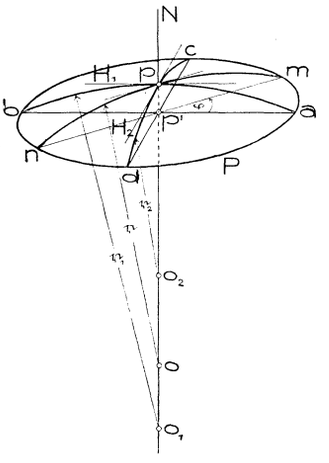


Fig. 232.

Irgend ein Normalschnitt durch p treffe P in den Punkten m und n (Fig. 232). Der durch m, p, n legbare Kreis hat seinen Mittelpunkt o in N und ist der Krümmungskreis des Normalschnittes. Bezeichnet $\mathfrak{r}$ seinen Halbmesser, so ist

$$\overline{p'm}^2 = \overline{pp'}(2\mathfrak{r} - \overline{pp'}) = \overline{pp'} \cdot 2\mathfrak{r} - \overline{pp'}^2$$

oder, mit Vernachlässigung unendlich kleiner Größen 4. Ordnung,

$$\overline{p'm}^2 = 2 \cdot \overline{pp'} \cdot \mathfrak{r}.$$

Bei Vergleichung der Normalschnitte durch denselben Punkt kann $2 \cdot \overline{pp'} = \mathfrak{r}^2$ ($\mathfrak{r}$ unendlich kleine Größe 1. Ordnung) als Konstante betrachtet und die letzte Gleichung in der Form

$$\overline{p'm} = \mathfrak{r}\sqrt{\mathfrak{r}} \tag{1}$$

geschrieben werden. Sie enthält den

Satz 3: *Die Halbmesser der Indikatrix eines Flächenpunktes p sind den Quadratwurzeln aus den Krümmungsradien der zugehörigen Normalschnitte durch p proportional.*

Gibt man der Konstanten $\mathfrak{r}$ einen endlichen Wert und trägt die nun aus Gleichung (1) folgenden Strecken $\overline{p'm}$ von p aus auf den Tangenten der betreffenden Normalschnitte auf, so erhält man eine mit P ähnliche Kurve von endlichen Abmessungen, die konstruktiv statt der Indikatrix verwendet wird.

Hosted by Google

Aus Gleichung (1) folgt ferner, daß die Krümmung eines Normalschnittes abnimmt, wenn der zugehörige Indikatrixdurchmesser zunimmt. Zur großen Achse ab und zur kleinen Achse cd von P gehören daher Normalschnitte H_1, H_2, in denen die Krümmung ein Minimum bzw. Maximum besitzt. Man nennt diese aufeinander senkrecht stehenden Normalschnitte die *Hauptschnitte* der Fläche Φ im Punkte p und ihre Krümmungsradien $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ die *Hauptkrümmungsradien*[1]). Sind für einen Punkt von Φ die Hauptkrümmungsradien bekannt, so läßt sich eine mit der Indikatrix des Punktes ähnliche Kurve zeichnen.

Schließt in Fig. 232 $[p'm]$ mit der Achse $[ab]$ der Indikatrix den Winkel φ ein, so folgt aus der Ellipsengleichung (S. 151, Fußnote) sofort

$$\frac{1}{\overline{p'm}^2} = \frac{\cos^2\varphi}{\overline{p'a}^2} + \frac{\sin^2\varphi}{\overline{p'c}^2}.$$

Setzt man hierin die aus Gleichung (1) folgenden Werte

$$\overline{p'm} = \mathfrak{r}\sqrt{\mathfrak{r}}, \quad \overline{p'a} = \mathfrak{r}\sqrt{\mathfrak{r}_1}, \quad \overline{p'c} = \mathfrak{r}\sqrt{\mathfrak{r}_2}$$

ein, so ergibt sich die *Euler*sche Gleichung

$$\frac{1}{\mathfrak{r}} = \frac{\cos^2\varphi}{\mathfrak{r}_1} + \frac{\sin^2\varphi}{\mathfrak{r}_2}, \tag{2}$$

mittels der sich der Krümmungsradius irgend eines Normalschnittes aus den Hauptkrümmungsradien berechnen läßt.

Ein Flächenpunkt, dessen Indikatrix ein Kreis ist, heißt *Nabelpunkt*[2]), *Kreispunkt* oder auch *Punkt sphärischer Krümmung*[3]). In einem solchen Punkte haben alle Normalschnitte dieselbe Krümmung; ihre Krümmungskreise gehören der *oskulierenden Kugel* des Flächenpunktes an. Wird z. B. eine Drehfläche von ihrer Achse in einem regulären Punkt rechtwinkelig geschnitten, so ist dieser ein Kreispunkt der Fläche.

b) Ist die Indikatrix P des Punktes p eine *Hyperbel*, dann wenden nur die durch reelle Durchmesser von P gelegten Normalschnitte ihre hohle Seite der Ebene von P zu, die übrigen wenden sie nach der entgegengesetzten Seite. Man betrachtet daher gleichzeitig die Indikatrix P_1 (vgl. Fig. 233), die sich als Schnitt von Φ mit der zur Ebene von P bezüglich der Tangentenebene symmetrischen Ebene ergibt und wieder eine Hyperbel sein muß. Der durch einen imaginären Durchmesser von P gelegte Normalschnitt enthält dann einen reellen Durchmesser

1) Die ersten Untersuchungen über die Krümmung der Normalschnitte, die Hauptkrümmungsradien usw. stammen von *L. Euler*, Recherches sur la courbure des surfaces, Hist. Mém. Ac. Berlin 16 (1760, veröff. 1767).

2) „Ombilic" nach *G. Monge*, Application de l'analyse à la géométrie, 4e éd., Paris 1809, p. 127.

3) Ebenda, p. 119.

Hosted by Google

von P_1 und wendet seine konkave Seite der Ebene von P_1 zu. Der Krümmungsmittelpunkt eines Normalschnittes liegt auf der Flächennormalen N und zwar auf der einen oder andern Seite von p, jenachdem die Normalschnittebene P oder P_1 reell schneidet. Die Krümmungsradien der Normalschnitte werden deshalb in dem einen Fall mit dem positiven, in dem andern mit dem negativen Vorzeichen versehen. Bezeichnen ab und cd die reellen Achsen der Kurven P bzw. P_1, p', p_1' deren Mittelpunkte, so besitzen die zu $[ab]$ und $[cd]$ gehörigen Normalschnitte H_1, H_2 die größte bzw. kleinste Krümmung und heißen wieder die *Hauptschnitte,* ihre (entgegengesetzt bezeichneten) Krümmungsradien r_1 und r_2 die *Hauptkrümmungsradien* des Punktes p.

Die Normalschnitte durch die Asymptoten Q' und R' von P (also auch durch die Asymptoten Q_1' und R_1' von P_1) besitzen Krümmungskreise von unendlich großem Radius, d. h. sie sind in der Umgebung von p als gerade Linien aufzufassen. Es gibt daher durch p zwei reelle Flächentangenten, die drei benachbarte Punkte mit Φ gemeinsam haben; es sind dies die Haupttangenten des Punktes p. Zu einem hyperbolischen Punkt (Nr. 73) gehört also eine Hyperbel als Indikatrix. Die Winkel zwischen den beiden Haupttangenten werden durch die Tangenten an die Hauptschnitte im Punkte p halbiert.

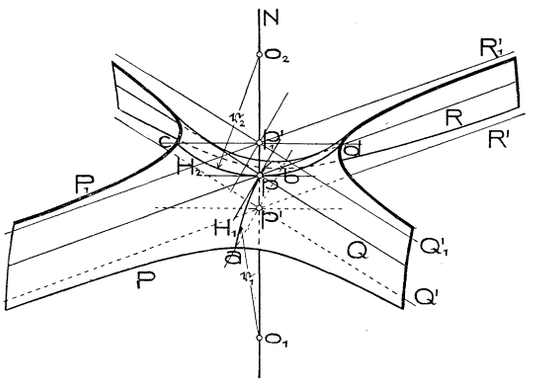


Fig. 233.

Aus der Gleichung von P und Gleichung (1) folgert man, daß Gleichung (2) auch für einen hyperbolischen Punkt gilt, nur haben r_1 und r_2 verschiedenes Vorzeichen.

Mit Rücksicht auf Nr. 86, Satz 1 *werden in einem hyperbolischen Punkt je zwei konjugierte Tangenten durch die Haupttangenten harmonisch getrennt.* Jede Haupttangente ist sich selbst konjugiert. In einem elliptischen Punkt sind die selbstkonjugierten Tangenten (wie die Asymptoten einer Ellipse) imaginär.

Es gibt auch Flächen, für deren sämtliche Punkte die Indikatrizen gleichseitige Hyperbeln sind; man nennt sie *Minimalflächen.*

c) Soll die Indikatrix eine Parabel sein, so muß sie, da sie nach obigem p' als Symmetriezentrum hat, in ein *Paar paralleler Geraden* P_1P_2 (S. 113, letzter Abs.) zerfallen (Fig. 234). Die Hauptschnitte

Hosted by Google

H_1, H_2 sind parallel bzw. senkrecht zu diesen Geraden und ersterer hat die Krümmung Null. Die Haupttangenten des Punktes p fallen hier mit H_1 zusammen, der Punkt ist also (nach Nr. 73) ein parabolischer[1]). Die Tangente H_1 ist zu sämtlichen Flächentangenten durch p konjugiert, mithin auch zu sich selbst.

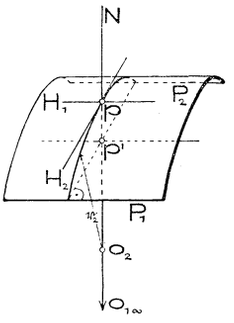


Fig. 234.

Die parabolischen Punkte bilden auf irgend einer krummen Fläche gewöhnlich die Grenze zwischen den Gebieten mit hyperbolischen und den mit elliptischen Punkten. Die abwickelbaren Flächen haben nur parabolische Punkte.

Auf einer Drehfläche sind dort elliptische oder hyperbolische Punkte, wo der Meridian der Achse die konkave bzw. konvexe Seite zukehrt (vgl. Fig. 229). Der von einem Wendepunkt des Meridians beschriebene Parallelkreis besteht aus parabolischen Punkten. Auf dem Torus mit lotrechter Achse z. B. sind der oberste und unterste Parallelkreis Orte parabolischer Punkte.

Nach den beiden Hauptschnitten nennt man einen elliptischen Punkt auch *konvex-konvex,* einen hyperbolischen *konvex-konkav.*

Bezeichnen wieder r_1 und r_2 die Hauptkrümmungsradien des Punktes p, so heißt nach *C. F. Gauß*[2]) $\frac{1}{r_1 r_2}$ das *Krümmungsmaß der Fläche* im Punkte p. Es ist positiv in einem elliptischen, negativ in einem hyperbolischen und Null in einem parabolischen Punkt. Eine Kugel hat in allen Punkten dieselbe positive Krümmung.

Wenn zwei in einem Punkte p sich berührende Flächen Φ und Φ_1 von jeder Ebene durch p in oskulierenden Kurven (Nr. 63, letzter Abs.) geschnitten werden, so sagt man, Φ und Φ_1 *oskulieren* sich. Sie haben dann in p dieselbe Indikatrix. Haben umgekehrt Φ und Φ_1 in p dieselbe Tangentenebene und Indikatrix, so oskulieren sie sich, weil jede Ebene durch p die Flächen in oskulierenden Kurven schneidet. Da ein Kegelschnitt schon durch den Mittelpunkt und drei Punkte bestimmt ist, so folgt ferner[3]):

Satz 4: *Berühren sich zwei Flächen in einem Punkte p und werden sie von drei Ebenen durch p in oskulierenden Kurven geschnitten, so oskulieren sich auch die Flächen in p.*

---

1) Wegen des Verhaltens einer Fläche in der Umgebung eines parabolischen Punktes vgl. *G. Scheffers,* Einführung in die Theorie der Flächen, Leipzig 1902, S. 141, und insbesondre *P. Stäckel,* Z. Math. Phys. 51 (1904), S. 96—100.

2) Disquisitiones generales circa superficies curvas, Art. 6 u. 8, Commentat. rec. Soc. Gott. 6 (1828) = Werke, Bd. 4. Eine Übersetzung dieser berühmten Abhandlung enthält Nr. 5 von *Ostwalds* Klassikern d. exakten Wissenschaften.

3) *Chr. Wiener,* Lehrb., II, S. 527.

Hosted by Google

Dabei ist vorausgesetzt, daß die erwähnten Ebenen die Tangentenebene von p in drei verschiedenen Geraden schneiden.

118. Krümmungslinien krummer Flächen. Legt man in einem Punkte x der zu p gehörigen Indikatrix P die Flächennormale X (Fig. 235), so wird ihr Normalriß X' auf die Ebene von P die Normale dieser Kurve im Punkte x sein. Da nur in den Scheitelpunkten eines Kegelschnittes die Normale durch seinen Mittelpunkt geht, so wird X im allgemeinen zu N windschief sein und N dann und nur dann schneiden, wenn x ein Scheitel von P ist. Dies gibt den Satz:

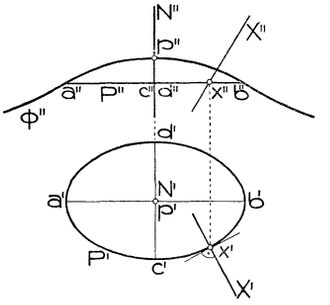


Fig. 235.

Die Normale eines beliebigen Punktes p einer Fläche Φ wird nur von jenen vier benachbarten Normalen geschnitten, die zu den Scheiteln der Indikatrix von p gehören.

Geht man auf Φ von p aus in der Richtung eines Hauptschnittes zu einem benachbarten Punkt, von diesem wieder in der Richtung des sich stetig anschließenden Hauptschnittes zu einem benachbarten Punkt über und so fort, so erhält man eine Kurve auf Φ, längs welcher die aufeinanderfolgenden Flächennormalen sich schneiden, d. h. die Normalenfläche abwickelbar ist. Nach Nr. 74 ist also diese Kurve eine *Krümmungslinie* von Φ. Da man von jedem Flächenpunkte aus auf zwei verschiedenen Hauptschnitten fortschreiten kann, so besteht

Satz 1: *Auf jeder krummen Fläche gibt es zwei Scharen von Krümmungslinien; sie sind reell und durchschneiden sich überall rechtwinkelig.*

Die Krümmungslinien überziehen netzartig die Fläche ähnlich wie die Haupttangentenkurven (Fig. 124); in einem konvex-konkaven Gebiete von Φ halbieren die Krümmungslinien die Winkel zwischen den Haupttangentenkurven.

Für eine Drehfläche sind die Meridiane und Parallelkreise die Krümmungslinien. In der Tat liegen sämtliche Normalen längs eines Meridians in dessen Ebene, schneiden sich also, und die Normalen längs eines Parallelkreises bilden, da sie durch Drehung um die Achse A der Drehfläche auseinander hervorgehen, einen Drehkegel mit der Spitze in A, schneiden sich also ebenfalls. Auf einer Kugel ist jede Linie eine Krümmungslinie.

Auf einer abwickelbaren Fläche bilden die Erzeugenden die eine Schar von Krümmungslinien; die andre Schar besteht aus den die Erzeugenden rechtwinkelig schneidenden Kurven. Nach der Verebnung der Fläche sind sie die Evolventen der Gratlinie und können auf diese

Hosted by Google

Weise gezeichnet werden. Auf den Böschungsflächen, insbesondre auf der abwickelbaren Schraubenfläche, bilden (nach Nr. 106, Satz 3) die Schichtenlinien die zweite Schar von Krümmungslinien.

Auf einem Zylinder bilden die Normalschnitte, auf einem beliebigen Kegel die Schnitte mit den Kugelflächen um den Scheitel die zweite Schar von Krümmungslinien.

119. Konstruktion der Indikatrix für einen Punkt einer Drehfläche. Bezeichnen r_1 und r_2 die Hauptkrümmungsradien in einem elliptischen oder hyperbolischen Punkt p, so sind $\sqrt{r_1}$ und $\sqrt{r_2}$ nach Nr. 117, Satz 3 den Halbachsen seiner Indikatrix proportional. Wählt man nun zur Vereinfachung der Konstruktion die Proportionalitätskonstante $\mathfrak{r} = \sqrt{r_2}$ (oder auch $\mathfrak{r} = \sqrt{r_1}$) und zeichnet eine Kurve 2. Ordnung mit den Halbachsen $\mathfrak{r}\sqrt{r_1} = \sqrt{r_1 r_2}$ und $\mathfrak{r}\sqrt{r_2} = r_2$, so ist sie der Indikatrix des Punktes p ähnlich. Wird die Flächennormale N (Fig. 236) eines Punktes p von den Normalen in den benachbarten Punkten p_1 und p_2 der durch p gehenden Krümmungslinien K_1 und K_2 in den Punkten o_1 und o_2 geschnitten, so ist $\overline{po_1} = r_1$ und $\overline{po_2} = r_2$. Für eine Drehfläche sei K_1 der Meridian und K_2 der Parallelkreis durch p. Dann ist o_1 der zu p gehörige und nach Nr. 63 konstruierbare Krümmungsmittelpunkt des Meridians und o_2 der Schnitt von $[po_1] = N$ mit der Drehachse. Oder:

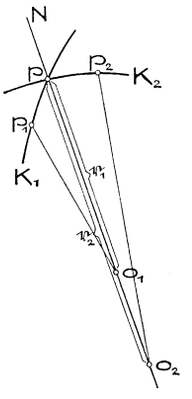


Fig. 236.

Satz 1: *Die Hauptkrümmungsradien eines Punktes p einer Drehfläche sind der zu p gehörige Krümmungsradius des Meridians und das zwischen p und der Drehachse liegende Stück der Meridiannormalen.*

In Fig. 237 ist für eine Kreisringfläche mit lotrechter Achse A und dem Meridiankreis M (Mitte m) die Konstruktion der Indikatrix P (darunter jetzt eine mit der wirklichen Indikatrix ähnliche Kurve verstanden) in einem hyperbolischen Punkte p durchgeführt. Dreht man den Meridian durch p um A in den Hauptmeridian M hinein, wodurch p nach p_0 kommen möge, so sind $\overline{p_0 m} = r_1$ und, wenn o_2 den Schnitt von $[p_0 m]$ mit A bezeichnet, $\overline{p_0 o_2} = r_2$ (nach Satz 1) die Hauptkrümmungsradien in p. Schneidet ferner der in der Hauptmeridianebene liegende Halbkreis über $\overline{o_2 m}$ die in p_0 an M gezogene Tangente $T_{1,0}$ in a_0, so ist $\overline{p_0 a_0} = \sqrt{r_1 r_2}$. Da nach obigem $\sqrt{r_1 r_2}$ und r_2 den Achsen der Indikatrix proportional sind, so erhält man durch Rückdrehung von a_0 den in die Meridiantangente T_1 des Punktes p fallenden Scheitel a von P und, wenn man auf der Tangente T_2 an den Parallelkreis durch p $\overline{pc} = \overline{pd} = r_2$ macht, die auf

Hosted by Google

T_2 liegenden Scheitel c und d von P. Ob man $\overline{pa}$ oder $\overline{pc}$ als reelle Halbachse von P betrachtet, ist gleichgültig; jede der beiden Hyperbeln ist einer Indikatrix ähnlich. Die Asymptoten H_1 und H_2 von P geben die *Haupttangenten der Ringfläche im Punkte p.*

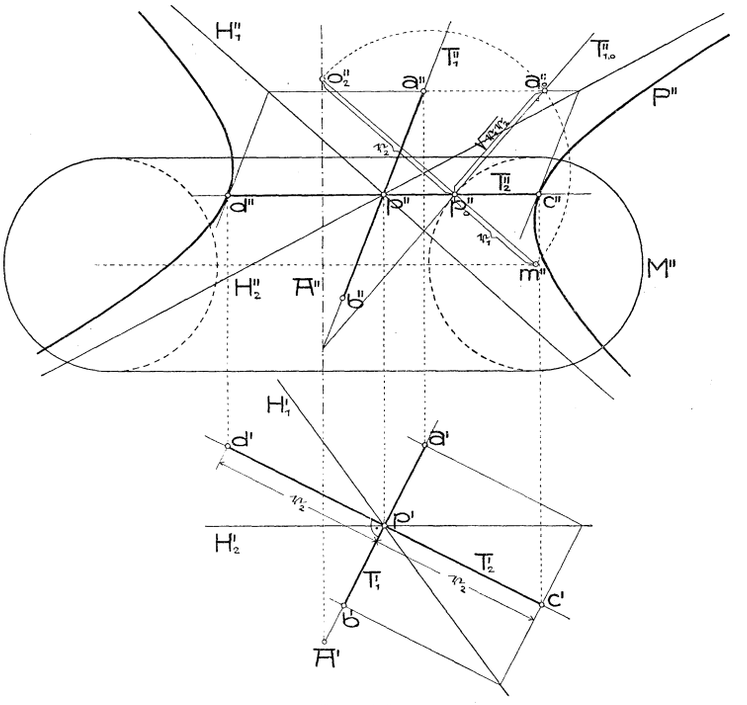


Fig. 237.

Analog wäre die Konstruktion von P in einem elliptischen Punkt.

Je zwei konjugierte Durchmesser von P sind *konjugierte Flächentangenten* des Punktes p; es kann also mittels P zu jeder Flächentangente die konjugierte leicht ermittelt werden.

120. Anwendungen des Begriffs konjugierter Tangenten. Berühren sich zwei Flächen Φ_1 und Φ_2 in einem Punkte p, so hat ihre Schnittkurve $[\Phi_1 \Phi_2]$ (nach Nr. 73, Satz 5) in p einen Doppelpunkt. Um in ihm die Tangenten an $[\Phi_1 \Phi_2]$ zu erhalten, denke man sich die Flächen mit einer zur gemeinschaftlichen Tangentenebene benachbarten parallelen Ebene geschnitten; die Schnittlinien sind die Indikatrizen P_1 und P_2 des Punktes p und deren vier Schnittpunkte q_1, q_2, q_3, q_4 die Nachbarpunkte von p auf $[\Phi_1 \Phi_2]$. Infolge der konzentrischen Lage von P_1 und P_2 bilden zwei Paare dieser Punkte, in Fig. 238 $q_1 q_3$ und $q_2 q_4$, die Endpunkte gemeinsamer Durchmesser von

Hosted by Google

P_1 und P_2 und *diese Durchmesser geben die gesuchten Tangentenrichtungen von* $[\Phi_1 \Phi_2]$ *im Doppelpunkt an.*

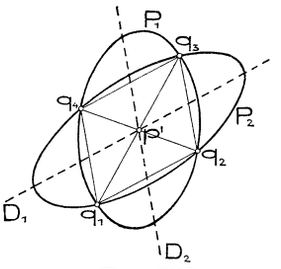


Fig. 238.

Da $q_1 q_2 q_3 q_4$ ein Parallelogramm ist, sind $[q_1 q_2]$ und $[q_2 q_3]$ parallel zu zwei konjugierten Durchmessern D_1, D_2 sowohl von P_1 als P_2; die durch p gelegten Parallelen zu D_1 und D_2 sind demnach (Nr. 117) *konjugierte Tangenten für beide Flächen*; es gibt im allgemeinen nur ein solches Paar. Zur Konstruktion dieser konjugierten Tangenten oder der Tangenten an $[\Phi_1 \Phi_2]$ in p wird man statt der unendlich kleinen Indikatrizen die ihnen ähnlichen Kurven in der gemeinschaftlichen Tangentialebene verwenden; dabei beachte man, daß für die Lösung der letzteren Aufgabe das Zeichnen der den Quadratwurzeln aus den Hauptkrümmungsradien von Φ_1 und Φ_2 proportionalen Achsen dieser Kurven unter Verwendung derselben Proportionalitätskonstanten geschehen muß.[1])

Aus der Bemerkung, daß $([q_1 q_3], [q_2 q_4], D_1, D_2) = -1$ ist, geht der Satz hervor:

Satz 1: *Berühren sich zwei Flächen in einem Punkte p, so trennen die Tangenten in p an die Schnittkurve das Paar der bezüglich beider Flächen konjugierten Tangenten harmonisch.*

Berühren Φ_1 und Φ_2 einander längs einer Kurve K, so werden von den vier Schnittpunkten der Indikatrizen P_1, P_2 eines Punktes p von K je zwei zusammenfallen, etwa $q_1 = q_4$, $q_2 = q_3$, d. h. P_1, P_2 berühren sich in den Endpunkten des zur Tangente an K parallelen Durchmessers oder dieser Durchmesser hat in P_1 und P_2 denselben konjugierten Durchmesser. Anders ausgedrückt:

Satz 2: *Berühren zwei Flächen Φ_1, Φ_2 einander längs einer Kurve K, so gehört zu jeder Tangente an K bezüglich beider Flächen dieselbe konjugierte Tangente.*

Wählen wir von den beiden einander umschriebenen Flächen (S. 145, letzter Abs.) Φ_2 als abwickelbare Fläche, so besteht ihre Indikatrix in p aus einem zur Erzeugenden durch p parallelen Geradenpaar, welches die Indikatrix von Φ_1 berührt. Die Erzeugende von Φ_2 durch p und die Tangente an K in diesem Punkt sind daher konjugierte Tangenten von Φ_1. Der letzte Satz erhält also die Form:

Satz 3: *Umschreibt man einer Fläche Φ_1 längs einer Kurve K eine abwickelbare Fläche Φ_2, so sind in jedem Punkte p von K die*

1) Für die Konstruktion des Paares der gemeinschaftlich konjugierten Tangenten beider Flächen darf die Proportionalitätskonstante für jede der Kurven anders gewählt werden.

Hosted by Google

Tangente an diese Kurve und die Erzeugende von Φ_2 konjugierte Tangenten von Φ_1.

Dieser Satz gilt insbesondre für Φ_2 als Kegel- oder Zylinderfläche. Da die Eigenschattengrenze einer krummen Fläche Φ_1 für einen leuchtenden Punkt l (der bei Parallelbeleuchtung unendlichfern liegt) die Berührungskurve mit dem der Fläche aus l umschriebenen Kegel Φ_2 ist, so folgt

Satz*[1] *4: *In jedem Punkt der Eigenschattengrenze einer krummen Fläche ist der Lichtstrahl zur Tangente an die Eigenschattengrenze konjugiert.*

Zwei benachbarte Punkte t_1, t_2 von Φ_1 lassen sich als einer Kurve K angehörig auffassen und ihre Tangentenebenen τ_1, τ_2 als Tangentenebenen der Φ_1 längs K umschriebenen abwickelbaren Fläche. Da nach Satz 3 $[t_1 t_2]$ und $[\tau_1 \tau_2]$ konjugierte Tangenten von Φ_1 sind, so gilt

Satz 5: *Die Tangentenebenen in zwei benachbarten Punkten einer Fläche schneiden sich längs der zur Verbindungslinie der Berührungspunkte konjugierten Tangente.*

Es soll nun noch die folgende Verallgemeinerung des Satzes 1 in Nr. 99 bewiesen werden:

Satz 6: *Eine (auch unebene) Randkurve einer beliebigen Fläche wirft auf diese einen Schlagschatten, der von den Schnittpunkten der Randkurve mit der Eigenschattengrenze ausgeht; in jedem solchen Punkt werden die Tangenten an die Randkurve und an den Schlagschatten harmonisch getrennt vom Lichtstrahl und von der Tangente an die Eigenschattengrenze.*

Der Schlagschatten der Randkurve K einer Fläche Φ auf diese (Fig. 239) ist der weitere Schnitt des Lichtzylinders (oder Lichtkegels) $\varkappa$ durch K mit Φ. Trifft die Eigenschattengrenze F von Φ die Randkurve in t, so berührt $\varkappa$ in diesem Punkt Φ. $\varkappa$ und Φ schneiden sich daher außer in K noch in einer zweiten durch t gehenden Kurve K_s. Nach Satz 1 müssen die Tangente T_s an K_s und die Tangente T an K die gemeinschaftlich konjugierten Tangenten von Φ und $\varkappa$ harmonisch trennen. Zufolge Satz 4 sind der Lichtstrahl L durch t und die Tangente an F in t

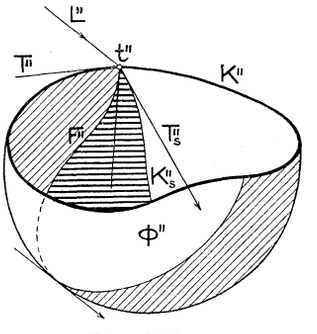


Fig. 239.

1) *Ch. Dupin*, Développements de géométrie, Paris 1813, p. 44.

Hosted by Google

bezüglich Φ konjugiert; weil ferner $\varkappa$ nur parabolische Punkte besitzt und L Erzeugende, also Haupttangente dieser Fläche in t ist, so sind diese Geraden (nach Nr. 117, c)) auch bezüglich $\varkappa$ konjugiert, bilden mithin die gemeinschaftlich konjugierten Tangenten von Φ und $\varkappa$. Es werden also T und T_s von L und der Tangente an F harmonisch getrennt, wie es obiger Satz behauptet.

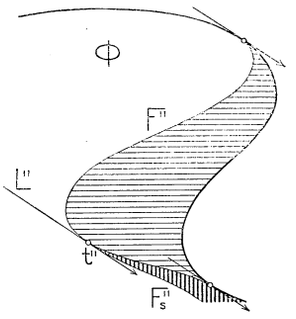


Fig. 240.

In diesem Satze kann natürlich, rein geometrisch betrachtet, K irgend eine Kurve auf Φ bezeichnen.

Berührt der Lichtstrahl L die Eigenschattengrenze F der Fläche Φ in einem regulären Punkte t (Fig. 240), so ist L für den Berührungspunkt Haupttangente von Φ, da dieser Lichtstrahl nach Satz 4 zu sich selbst konjugiert ist (vgl. Nr. 117, b)). Eine solche Berührung von F mit einem Lichtstrahl kann demnach reell nur in dem Gebiete hyperbolischer Punkte von Φ auftreten.[1]) Der Lichtzylinder (bzw. Lichtkegel) durch F schneidet dann Φ in einer reellen Kurve F_s, die zufolge Satz 6 F in t berührt. Es besteht demnach der

Satz[2]) ***7:*** *Wo die Eigenschattengrenze einer Fläche von einem Lichtstrahl berührt wird, geht tangierend (d. h. in der Lichtstrahlenrichtung) eine Schlagschattenkurve aus.*

Der Schlagschatten von Φ auf irgend eine Ebene besitzt dann (zufolge Nr. 68, Satz 3) im Schlagschatten des Punktes t eine Spitze.

Ist Φ samt F etwa im Aufriß gezeichnet, so findet man die Punkte obiger Art (*Grenzpunkte der Eigenschattengrenze*) als Berührungspunkte von F'' mit jenen zu L'' parallelen Tangenten, die nicht zugleich den scheinbaren Umriß von Φ berühren. Denn für jeden Punkt von F liegt der hindurchgehende Lichtstrahl mit der Tangente an F in der Tangentenebene von Φ. Ist nun diese Tangentenebene nicht projizierend, gehört also der Berührungspunkt nicht dem Umriß an, so folgt aus dem Zusammenfallen der Aufrisse jener beiden Geraden das Zusammenfallen der Geraden selbst.

1) Der Fall, daß der Lichtstrahl mit der Haupttangente in einem parabolischen Flächenpunkt zusammenfalle, soll seiner schwierigeren allgemeinen Beurteilung und seines seltenen Vorkommens wegen hier übergangen werden.

2) *Ch. Dupin*, a. a. O. p. 51; *J. de la Gournerie*, Traité de Géométrie descriptive, 3e partie, Paris 1864 (2e éd., 1885), art. 902; *Rohn-Papperitz*, Lehrb. d. darst. Geom., 1. Aufl., 2. Bd. (Leipzig 1896), Nr. 529, 3. Aufl., 1. Bd. (1906), Nr. 376.

Hosted by Google

121. Allgemeines über die Schattengrenzen an Drehflächen; Konstruktion der Hauptpunkte ihrer Eigenschattengrenzen. Die Eigen- und Schlagschattengrenzen an Drehflächen, ja deren Beleuchtungsverhältnisse überhaupt, zeichnen sich vor denen andrer Flächen durch eine Symmetrieeigenschaft aus, die für die Konstruktion besondre Wichtigkeit hat. Eine Drehfläche Φ ist bezüglich jeder Meridianebene (orthogonal-)symmetrisch, d. h. sie fällt mit ihrem Spiegelbild bezüglich dieser Ebene zusammen. Bezüglich der zur Lichtrichtung L parallelen Meridianebene σ, der *Lichtmeridianebene*, sind auch die Lichtstrahlen symmetrisch verteilt; die zu einem Lichtstrahl bezüglich σ symmetrische Gerade ist nämlich immer wieder ein Lichtstrahl. Da ferner die Tangentenebenen in symmetrischen Punkten von Φ gleichfalls in bezug auf σ symmetrisch sind, so schließen sie mit der Lichtrichtung gleiche Winkel ein; Φ besitzt also in solchen Punkten gleiche Beleuchtungsstärke (Nr. 113). Alle Lichtgleichen der Fläche, insbesondre die Eigenschattengrenzen liegen daher bezüglich σ symmetrisch. Ist ferner ein Punkt p_s auf Φ Schlagschatten eines Punktes p von Φ (wobei also p entweder einem Parallelkreis als Randkreis oder einer Eigenschattengrenze angehört), so ist der zu p_s bezüglich σ symmetrische Punkt auch Schlagschatten des zu p symmetrischen Punktes; die Schlagschattengrenzen haben demnach ebenfalls σ zur Symmetrieebene. Es gilt somit der

Satz 1: *Die Eigen- und Schlagschattengrenzen sowie die Lichtgleichen einer Drehfläche sind bezüglich der Lichtmeridianebene symmetrisch.*

Die in σ liegenden Punkte dieser Kurven fallen mit ihren symmetrischen Punkten zusammen; ihre Tangenten, als Verbindungslinien unendlich naher symmetrischer Punkte, stehen dann zu σ senkrecht.

Wir setzen vorerst voraus, die Achse A der Drehfläche stehe zu einer von zwei zugeordneten Rißebenen senkrecht und der zur andern Rißebene parallele Meridian (Hauptmeridian) sei gegeben. Die Schatten werden dann, dem praktischen Gebrauche gemäß, gewöhnlich bloß in den letzteren Riß eingezeichnet und sollen daher mit möglichst sparsamer Benutzung des andern Risses konstruiert werden.[1]) Der Fig. 241 entsprechend nehmen wir etwa $A \perp \Pi_1$ an, zeichnen daher die Schatten im Aufriß, für welchen der Hauptmeridian M'' scheinbarer Umriß ist. Es ändert sich am Aufriß nichts, wenn M als in Π_2 liegend betrachtet wird.

1) Dieses Ziel verfolgt auch der Aufsatz: *O. Unger,* Über ein Konstruktionsprinzip und seine Verwertung bei der Schattenbestimmung an Drehflächen, Z. Math. Phys. 47 (1902), S. 467—479, sowie (ausschließlich für 45°-Beleuchtung) das vorzügliche Werk von *J. Pillet*, Traité de perspective linéaire, précédé du tracé des ombres usuelles, Paris 1888 (2e éd.) und 1901 (3e éd.).

Hosted by Google

Die Konstruktion der Eigenschattengrenze beginne man stets mit der Ermittlung der Hauptpunkte; als solche mögen gelten: a) *die höchsten und tiefsten Punkte*[1]), b) *die Umrißpunkte*, c) *die Punkte im Mittelschnitt*, d) *die Punkte auf den größten und kleinsten Parallelkreisen.*

a) *Die höchsten und tiefsten Punkte.* Nach dem eingangs Gesagten ist die Lichtmeridianebene $\sigma = [A \| L]$ Symmetrieebene der Eigenschattengrenze F. Wegen $\sigma \perp \Pi_1$ sind die Tangenten in den Schnittpunkten s_1, s_2, $s_3 \ldots$ von F mit σ horizontal, diese Punkte also die höchsten oder tiefsten Punkte von F. *Man erhält sie* (Nr. 92, 1. Methode) *als die Berührungspunkte der parallel zu L an den Lichtmeridian S gelegten Tangenten.* Hierzu ist es nicht nötig, den Aufriß von S zu zeichnen, sondern man denkt sich S durch Drehung um A mit dem Hauptmeridian M zur Deckung gebracht und zugleich einen in σ liegenden Lichtstrahl mitgedreht, der dabei nach L^0 kommen möge. Dieselbe Richtung ergibt sich auch, wenn man irgend einen Lichtstrahl $L(L', L'')$ um eine zu A parallele ihn schneidende Gerade in dem gleichen Sinn (nach Nr. 40) zu Π_2 parallel dreht (s. Fig. 241, Nebenfigur). Legt man nun an M die zu L^0 parallelen Tangenten und dreht die Berührungspunkte nach σ zurück, so hat man die gesuchten höchsten und tiefsten Punkte. Besitzt M eine zu L^0 parallele Wendetangente, so ist der rückgedrehte Berührungspunkt zugleich höchster und tiefster Punkt der Eigenschattengrenze; es berühren sich in ihm zwei sonst getrennte Zweige dieser Schattengrenze mit horizontaler Tangente. Das Zurückdrehen vereinfacht sich durch folgende Bemerkung. Schneidet (Fig. 241) der M in s_1^0 berührende Lichtstrahl $L_1^0 (\| L^0)$ die Achse A in l_1, so wird nach ausgeführter Rückdrehung, wegen des Festbleibens von l_1, $L_1'' = [l_1 \| L'']$ sein. Der Schnitt von L_1'' mit der Horizontalen durch s_1^0 (Aufriß des Parallelkreises durch s_1^0) ist dann s_1''. Fällt l_1 außerhalb des Zeichenblattes, so kann man s_1 mittels des in die Hauptmeridianebene μ umgeklappten Parallelkreises durch s_1^0 finden. Dieser Parallelkreis wird von der durch seine Mitte $\| L'$ gezogenen Geraden in s_1' geschnitten, sodaß s_1'' in der Lotrechten durch s_1' liegt.

In Fig. 241 ergeben sich drei höchste bzw. tiefste Punkte — s_1, s_2, s_3 —, wovon aber s_3 im Aufriß unsichtbar ist. Führt man die Paralleldrehung des Lichtmeridians so aus, daß seine vordere Hälfte links von A zu liegen kommt, so liefern immer die Berührungs-

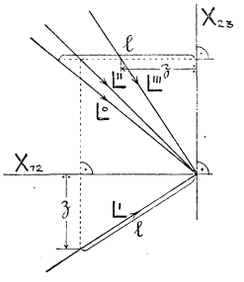
1) Die Ausdrücke „höchste und tiefste Punkte" einer Kurve sind hier nur in dem Sinn zu verstehen, daß diese Punkte höher bzw. tiefer als die benachbarten Kurvenpunkte liegen sollen. Entsprechendes wäre hinsichtlich der unter d) folgenden Ausdrücke „größte und kleinste Parallelkreise" zu sagen.

Hosted by Google

punkte der $\| L^0$ an die rechte Hälfte von M gelegten Tangenten unsichtbare höchste oder tiefste Punkte.

Beim Zeichnen von F''' beachte man, daß in den Punkten s_i'' $(i = 1, 2, \ldots)$ die Tangenten horizontal sein müssen.

b) *Die Umriß- (oder Kontur-)Punkte.* Nach Nr. 92, Satz 3 sind diese die Berührungspunkte der $\| L''$ an den scheinbaren Umriß M'' gelegten Tangenten, in Fig. 241 also die Punkte u_1'', u_2'', u_3''. *In ihnen berührt der Aufriß F'' der Eigenschattengrenze den scheinbaren Umriß M''* (Nr. 92, Satz 1). Knotenpunkte einer Drehfläche (wie jeder andern Fläche) sind Doppelpunkte (isolierte Punkte oder Spitzen) der Eigenschattengrenze.



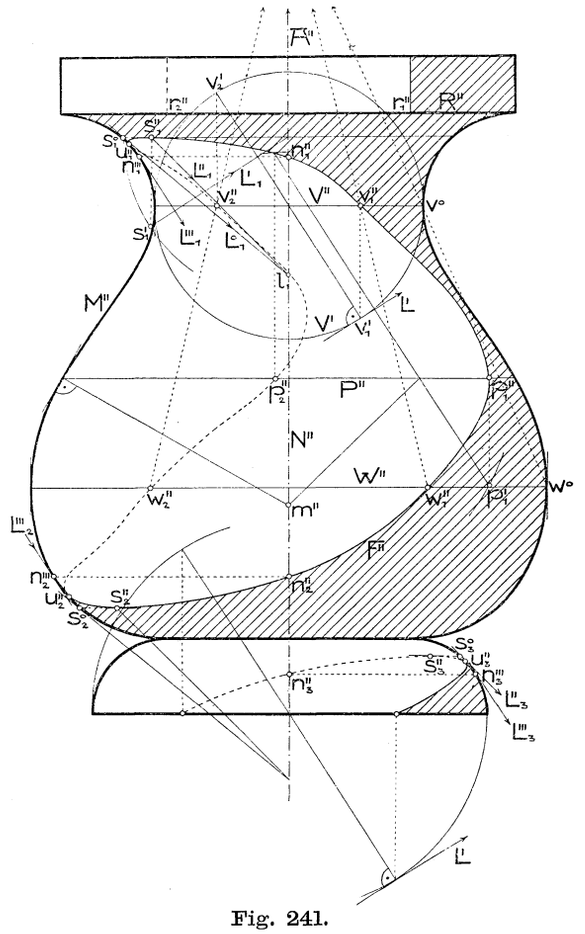


Fig. 241.

c) *Die Punkte im Mittelschnitt.* Wir verstehen unter Mittelschnitt den zu Π_2 normalen Meridian N, dessen Aufriß sich mit A'' deckt. Da N, als in einer zur Kreuzrißebene Π_3 parallelen Ebene liegend, der Hauptmeridian für den Kreuzriß ist, so erhält man, analog wie unter b), die ihm angehörigen Punkte n_1, n_2, n_3 von F als Berührungspunkte mit den zu L''' parallelen Tangenten. Bei der Ausführung ermittle man L''' in einer Nebenfigur (vgl. Fig. 241) und denke sich N in demselben Sinn in den Hauptmeridian hineingedreht. Berühren die zu L''' parallelen Tangenten $M = N'''$ in den Punkten n_1''', n_2''',

Hosted by Google

n_3''', so liegen mit ihnen auf gleicher Höhe in A'' die gesuchten Punkte n_1'', n_2'', n_3''.[1])

Für 45°-Beleuchtung (oder allgemeiner für eine zu Σ_{23} oder Γ_{23} parallele Lichtrichtung) *sind die Meridiane M und N mithin auch die Punkte u_i und n_i bezüglich σ symmetrisch; die Punkte n_i'' liegen dann mit den Punkten u_i'' auf gleicher Höhe in A''.*

d) *Die Punkte auf den kleinsten und größten Parallelkreisen.* Diese Kreise bilden den wirklichen Umriß von Φ für die erste Projektion (Nr. 115); die an sie L' gelegten Tangenten berühren daher (Nr. 92, Satz 3) in Punkten der Eigenschattengrenze. Sei in Fig. 241 V'' z. B. der Aufriß eines kleinsten Parallelkreises, so klappe man diesen in die Hauptmeridianebene nach V' um und ziehe durch seine Mitte die Normale zu L'; ihre Schnittpunkte v_1', v_2' mit V' sind die Grundrisse der auf V liegenden Punkte v_1, v_2 von F, woraus die auf V'' befindlichen Aufrisse v_1'', v_2'' folgen.

Da für irgend zwei solche Parallelkreise V und W die Aufrisse v_1'', v_2'' und w_1'', w_2'' der ihnen angehörigen Punkte der Eigenschattengrenze von A'' Entfernungen besitzen, die sich wie die Kreisradien verhalten, so ist, unter v^0, w^0 die Schnittpunkte von V und W mit derselben Hälfte des Hauptmeridians verstanden, w_i'' aus v_i'' nach der Formel konstruierbar:

$$w_i'' = [v^0\, w^0\, A''\, v_i''\, W''].$$

Auf gleiche Weise kann man in Fig. 241 aus v_1'', v_2'' die auf dem Randkreise R liegenden Punkte r_1'', r_2'' der Eigenschattengrenze des oberen Zylinders erhalten.

122. Konstruktion beliebiger Punkte der Eigenschattengrenze einer Drehfläche. In vielen Fällen, besonders wenn die Fläche in kleinerem Maßstabe gezeichnet vorliegt und man bereits einige Kenntnis über den Verlauf von Eigenschattengrenzen an Drehflächen besitzt, werden diese Hauptpunkte zum Zeichnen der Eigenschattengrenze genügen. Sind noch Zwischenpunkte erforderlich, so ermittelt man solche am raschesten nach dem *Kugelverfahren.*

Dieses Verfahren ist ein Sonderfall der in Nr. 92 erwähnten allgemeinen Methode der ein- oder umgeschriebenen Hilfsflächen. Sei nämlich P irgend ein Parallelkreis der Drehfläche Φ, so gibt es im allgemeinen eine einzige Φ längs P berührende Kugel Φ_1. Denn ein Meridian M wird in den beiden Schnittpunkten mit P (vgl. Fig. 241)

1) Auf analoge Weise lassen sich auch die irgend einem Meridian angehörigen Punkte von F ermitteln. Man braucht nur den Seitenriß von L auf die Ebene des betreffenden Meridians aufzusuchen und parallel hierzu an den Meridian die Tangenten zu legen.

Hosted by Google

von einem Kreise berührt, dessen Mitte m in A liegt (Schnitt von A mit der Normalen an M in einem der beiden Punkte); rotiert nun dieser Kreis zugleich mit M um A, so beschreibt er eine Kugel Φ_1, die Φ in allen Punkten von P berührt. Besitzt M in jedem der Schnittpunkte mit P mehr als eine Tangente, so lassen sich längs P mehrere berührende Kugeln Φ_1 legen (vgl. etwa Fig. 246). Die Eigenschattengrenze F_1 von Φ_1 schneidet (Fig. 242) P in zwei Punkten p_1, p_2, die nun der Eigenschattengrenze F von Φ angehören. Da P auch auf Φ_1 liegt, so handelt es sich bei der praktischen Ausführung dieser Konstruktion um eine möglichst einfache Lösung der Aufgabe:

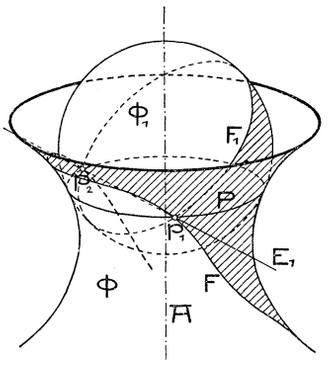


Fig. 242.

Die Schnittpunkte der Eigenschattengrenze einer Kugel mit einem auf ihr liegenden zu Π_1 parallelen Kreis P im Aufriß zu suchen.

Die gesuchten Punkte p_1, p_2 ergeben sich als Schnitte des Kreises P mit der Ebene ε der Eigenschattengrenze von Φ_1. Da ε durch die Kugelmitte m geht und zu L senkrecht steht, so muß ihre Spur E_2 auf der Hauptmeridianebene μ durch m gehen und zu L'' senkrecht stehen, ferner ihre Spur E_1 auf der Ebene π von P durch den Punkt $e = [E_2\pi]$ gehen und zu L' senkrecht stehen. Die Schnitt-

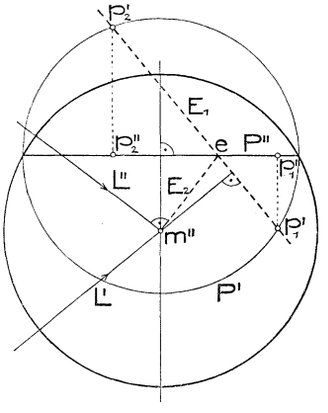


Fig. 243 a.

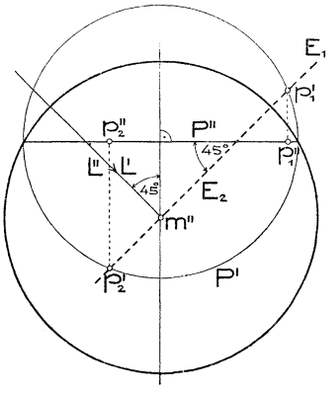


Fig. 243 b.

punkte von E_1 mit P sind p_1, p_2. Zur zeichnerischen Ausführung (Fig. 243 a) denke man sich μ als Aufrißebene und in sie π samt P nach derselben Richtung umgeklappt wie gewöhnlich Π_1 in Π_2 (Nr. 6, Satz 1). Dann ist $E_2 = [m'' \; L'']$, $e = [E_2 P'']$ und $E_1 = [e \; L']$; die

Hosted by Google

Schnittpunkte von E_1 mit der Umklappung P' von P sind p_1', p_2', ihre Aufrisse gehören P'' an.

Bei 45°-Beleuchtung erzielt man eine beachtenswerte Vereinfachung dadurch, daß man sich Π_1 mit Π_2 so vereinigt denkt, daß $+\Pi_1$ und $+\Pi_2$ einander decken. Dann haben L' und L'' gleiche Richtung, und da man π in μ auf gleiche Weise umklappen muß (die vordere Hälfte von P nach oben), so fallen E_1 und E_2 in eine Gerade zusammen. Man erhält also in diesem Fall p_1'', p_2'' (Fig. 243 b), wenn man P' mit der Geraden $[m''\ L'']$ schneidet und die Schnittpunkte auf P'' projiziert. Die der oberen Hälfte von P' angehörigen Punkte sind im Aufriß sichtbar. Diese Vereinfachung läßt sich auf gleiche Weise bei jeder zu Σ_{12} parallelen Lichtrichtung erzielen. Bei einer zu Γ_{12} parallelen Lichtrichtung stellt sich diese Vereinfachung ($L' \| L''$, $E_1 = E_2$) von selbst ein.

Fig. 241 zeigt die Konstruktion der dem Parallelkreis P angehörigen Punkte p_1, p_2 von F nach dem eben besprochenen Verfahren. Von der eingeschriebenen Kugel braucht man bloß den Mittelpunkt m, nicht auch den Hauptmeridiankreis zu zeichnen.

Ist M in der Umgebung des Schnittpunktes p^0 von P mit μ ein Kreisbogen, so beachte man, daß sich dann m einfach als Schnitt von A mit dem Bogenradius durch p^0 ergibt.

Für die größten und kleinsten Parallelkreise geht das Kugelverfahren in die oben unter d) erwähnte Konstruktion über.

Es sei ausdrücklich bemerkt, daß dieses Kugelverfahren sich auch zur Ermittlung der Eigenschattengrenze eines Drehkegels (Drehkegelstutzes) verwenden läßt, bei welcher Fläche der Meridian aus einem Geradenpaar besteht. Wie die Figuren 244a, b zeigen, ist dieses Ver-

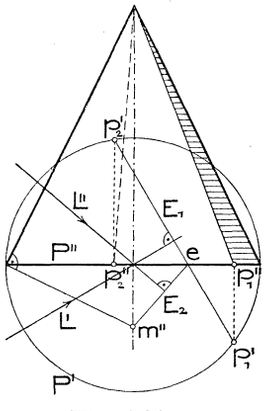


Fig. 244 a.

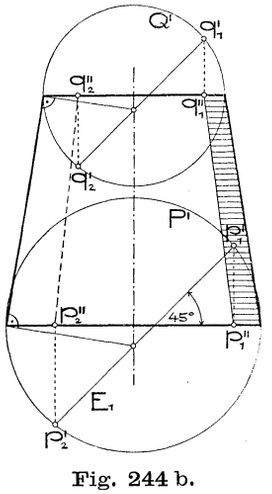


Fig. 244 b.

Hosted by Google

fahren dem in Nr. 93 gelehrten im allgemeinen vorzuziehen. In Fig. 244 b wurde 45°-Beleuchtung vorausgesetzt.

Das Kugelverfahren wird nur in den seltenen Fällen unbequem, als der Mittelpunkt der eingeschriebenen Kugel außerhalb des Zeichenblattes fällt. Dann kommt besser das *Kegelverfahren* zur Anwendung. Man umschreibt Φ längs des betreffenden Parallelkreises P den Drehkegel (Nr. 114, Satz 2) und ermittelt, indem man P als Basiskreis betrachtet, nach Nr. 93 die auf P liegenden Punkte der Eigenschattengrenze des Kegels. Sie sind nach Nr. 92 (2. Methode) zugleich Punkte von F. Für die größten und kleinsten Parallelkreise geht der umschriebene Kegel in einen Zylinder über und die Konstruktion wird mit der oben unter d) erwähnten identisch.

Ein andres Verfahren zur Konstruktion der Eigenschattengrenze einer Drehfläche (mittels einer Normalkugel) kommt in Nr. 130 zur Besprechung.

123. Konstruktion von Tangenten der Eigenschattengrenze einer Drehfläche. Einige Sätze über den Verlauf dieser Kurve. Nach Nr. 120, Satz 4 sind in einem Punkte p der Eigenschattengrenze F einer Drehfläche Φ die Tangente an F und der Lichtstrahl L durch p konjugierte Tangenten von Φ. Zufolge Nr. 119, Satz 1 läßt sich nun die Indikatrix des Punktes p etwa im Aufriß (vgl. Fig. 237) zeichnen; der zu L'' in dieser Kurve konjugierte (nach Nr. 80, Aufg. 4 oder Nr. 86, Satz 1 konstruierbare) Durchmesser T'' bildet dann die Tangente an F''[1]). Die Tangente T an F selbst ist, als Gerade der Tangentialebene des Punktes p, dadurch bestimmt. Man erkennt daraus:

Satz 1: *Die Tangentenrichtung an F (somit auch an F'') in den Schnittpunkten mit einem bestimmten Parallelkreis einer Drehfläche hängt von der Krümmung, die Lage der Schnittpunkte auf diesem Parallelkreis (wie aus Nr. 122 hervorgeht) hingegen bloß von der Tangentenrichtung des Hauptmeridians in den zugehörigen Punkten ab.*

Aus diesem Satze folgen:

Satz 2: *Ist der Hauptmeridian einer Drehfläche in einem Punkt unstetig bezüglich der Krümmung, so ist die Eigenschattengrenze auf dem zugehörigen Parallelkreis unstetig in bezug auf die Tangente.*

Satz 3: *Ist der Hauptmeridian einer Drehfläche in einem Punkt unstetig bezüglich der Tangente, so ist die Eigenschattengrenze auf dem zugehörigen Parallelkreis punktweise unstetig.*

Ersteres tritt z. B. auf, wenn der Meridian M, wie es im technischen Zeichnen häufig geschieht, aus berührenden Kreisbogen von

1) Diese Konstruktion stammt von *J. de la Gournerie*, Traité de Géométrie descriptive, 3e partie, Paris 1864, Nr. 878.

Hosted by Google

verschiedenen Radien zusammengesetzt wird (Fig. 245 a) oder wenn er aus einem Kreisbogen und einer ihn berührenden Geraden (Fig. 245 b)

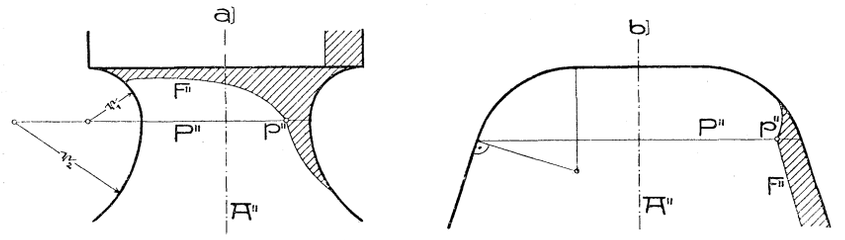


Fig. 245 a, b.

oder noch allgemeiner aus einem Kurvenstück, dessen Krümmung im Endpunkt von Null verschieden ist, und der Tangente in diesem Punkte besteht. In allen diesen Fällen erscheint F''' in den Punkten des betreffenden Parallelkreises *geknickt* und es ist verfehlt, hier eine bezüglich der Tangente stetig verlaufende Eigenschattengrenze zeichnen zu wollen (vgl. auch Fig. 224).

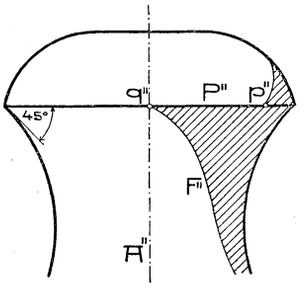


Fig. 246.

Ein Beispiel zu Satz 3 zeigt Fig. 246; in jedem solchen Fall *springt* entweder die Eigenschattengrenze auf einem Parallelkreis von einem Punkt zu einem andern oder sie endigt in diesem Parallelkreis. Es stoßen eben hier zwei verschiedene Flächen zusammen, die auch verschieden verlaufende Eigenschattengrenzen haben. (Vgl. auch Fig. 179).

Aus der Konstruktion der Tangente an die Eigenschattengrenze folgt ferner:

Satz 4: *Wenn die Hauptmeridiane zweier Drehflächen mit derselben Achse sich oskulieren, so berühren sich ihre Eigenschattengrenzen in zwei Punkten des durch den Oskulationspunkt gehenden Parallelkreises.*

Besitzt der Hauptmeridian M einer Drehfläche Φ einen Wendepunkt, so wird er von der Tangente in diesem Punkt oskuliert (Nr. 59, Fall b)). In zwei Punkten des Parallelkreises P durch den Wendepunkt berührt daher die Eigenschattengrenze des Φ längs P umschriebenen Kegels die Eigenschattengrenze F von Φ oder *die Tangenten an F in den auf P gelegenen Punkten sind Erzeugende des umschriebenen Kegels.*

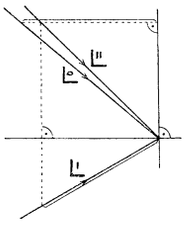
Fällt ferner für einen Punkt p^0 von M der Mittelpunkt des Krümmungskreises in A hinein, so oskuliert die durch Drehung dieses

Hosted by Google

Kreises erzeugte Kugel die Fläche Φ längs des Parallelkreises P durch p^0[1]). *In den auf P gelegenen Punkten von F sind dann die* (leicht konstruierbaren) *Tangenten an die Eigenschattengrenze der Kugel zugleich Tangenten an F.*

124. Schlagschatten an Drehflächen. Konstruktion des Schlagschattens eines Randkreises. Den Schatten einer beliebigen Kurve K auf eine Drehfläche ermittelt man im allgemeinen nach der Methode des Zurückführens (Nr. 95), indem man auf eine zur Drehachse senkrechte Ebene den Schlagschatten K_s von K und die Schlagschatten einzelner Parallelkreise aufsucht. Handelt es sich um die Schlagschatten, die an einer Drehfläche an sich auftreten, also nicht von andern Gebilden herrühren, so können die Schlagschatten nur von Randkreisen oder Eigenschattengrenzen der Fläche geworfen werden. Beide Fälle treten an dem in Fig. 241 dargestellten Beispiele auf. Es soll daher auch die Schlagschattenkonstruktion daran durchgeführt, zu diesem Zweck aber der obere und der untere Teil jener Figur nochmals getrennt gezeichnet werden. Die Eigenschattengrenze setzen wir als nach Fig. 241 bereits konstruiert voraus.

Um den *Schlagschatten des Randkreises R auf die Drehfläche* zu erhalten (Fig. 247), suche man vorerst den höchsten (oder tiefsten) Punkt des Schlagschattens. Nach Nr. 121, a) liegt er in der Lichtmeridianebene σ und rührt demnach von dem vorderen in σ liegenden Punkt s des Randkreises R her. Dreht man (wie in Nr. 121, a)) den Lichtmeridian in den Hauptmeridian M hinein, so fällt s mit dem linken Schnittpunkt s^0 von M und R zusammen und der Lichtstrahl durch s geht in $[s^0 \| L^0]$ über. Schneidet diese Gerade M zum zweiten Mal in s_s^0, so ist dies der Schlagschatten von s in der parallel ge-



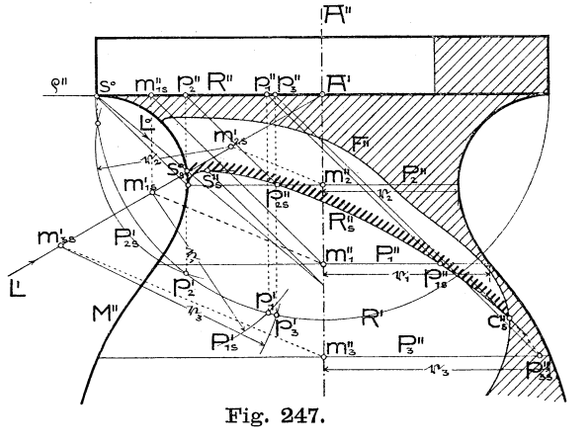


Fig. 247.

1) Wie aus Nr. 119, Satz 1 folgt, sind sämtliche Punkte von P Kreispunkte der Drehfläche.

Hosted by Google

drehten Lage. Der Aufriß des zurückgedrehten Punktes s_s ergibt sich, analog wie s_1'' in Nr. 121, als Schnitt der Horizontalen durch s_s^0 mit $[s^0 \| L^0 \cdot A'' \cdot \| L'']$.

Die Konstruktion weiterer Punkte von R_s ist fast identisch mit der von K_s in Fig. 183. Man nehme die Ebene ϱ von R, die man sich nach μ umgeklappt denkt, als Grundrißebene und zugleich als jene Ebene an, auf die man nach der Methode des Zurückführens die Schlagschatten einzelner Parallelkreise aufsucht (R fällt mit seinem Schatten zusammen). Solche Parallelkreise, wie z. B. P_1, müssen natürlich unterhalb s_s gewählt werden, damit sie reelle Punkte von R_s liefern. Der Schlagschatten von $P_1 = (m_1, \mathfrak{r}_1)$ auf ϱ ist ein kongruenter Kreis P_{1s} um den Schatten m_{1s} von m_1 als Mittelpunkt. Nun ist $m_{1s}'' = [m_1'' \; L'' \cdot R'']$ und $m_{1s}' = [m_{1s}'' \| A'' \cdot L']$, wenn L' den durch $A' = [A'' R'']$ gezogenen Grundriß des Lichtstrahls bezeichnet. Der um m_{1s}' mit dem Halbmesser $\mathfrak{r}_1$ von P_1 geschlagene Kreis ist P_{1s}' und trifft R' in zwei Punkten, deren Schlagschatten P_1 angehören. Nur der auf der vorderen Hälfte von P_{1s}' liegende Punkt p_1' wirft einen sichtbaren Schatten p_{1s}. Zeichnet man p_1'' in R'', so ist $p_{1s}'' = [p_1'' \| L'' \cdot P_1'']$. Analog findet man Punkte des Schlagschattens auf andre Parallelkreise P_2, P_3 .... Dabei können aber die Punkte m_{is}' $(i = 1, 2, \ldots)$ einfacher erhalten werden, da wie in Fig. 183 die Geraden $[m_{is}' m_i'']$ zueinander parallel sind. m_{2s}' z. B. ergibt sich demnach als Schnitt von L' mit der Geraden $[m_2'' \| m_1'' m_{1s}']$.

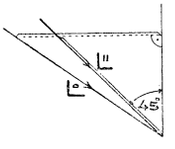
Mit den zu wählenden Parallelkreisen gehe man so tief, bis man zu einem Schlagschattenpunkt (in Fig. 247: p_{3s}'') gelangt, der schon dem Eigenschattengebiete angehört. Beim Verbinden der gefundenen Punkte durch die Kurve R_s'' achte man darauf, daß diese in s_s'' eine horizontale und im Schnitt c_s'' mit der Eigenschattengrenze F'' eine zu L'' parallele Tangente besitzt. Die in M'' befindlichen Punkte von R_s'' ergeben sich als Schnitte mit dem (wie in Fig. 183 konstruierbaren) elliptischen Schatten von R auf μ. Daraus ersieht man, daß sich in Fig. 247 der linke dieser beiden Punkte nicht im Schnitt von $[s^0 \| L'']$ mit M'' befindet, wenn er auch bei geringer Ausladung der Fläche wenig davon abweicht.

R_s ist Schnittkurve des Lichtzylinders durch R mit Φ. Die Tangente in einem Punkt von R_s erhält man daher (Nr. 73, Satz 3) als Schnitt der Tangentialebenen an jene Flächen.

Weitere Vereinfachungen der obigen Konstruktion von R_s'' ergeben sich bei 45°-Beleuchtung. Es möge daher für diese Beleuchtung in Fig. 248 an einem, von dem hyperbolischen Teile einer Wulstfläche und zwei Zylindern begrenzten Körper die Schattenkonstruktion durchgeführt werden. Bei dieser Gelegenheit soll auch nochmals auf die Vereinfachungen hingewiesen werden, welche dann die Konstruktion der Eigenschattengrenze F'' zuläßt.

Hosted by Google

Den Lichtstrahl braucht man nur im Aufriß zu zeichnen; die Konstruktion von L^0 aus L'' zeigt die Nebenfigur. Mittels L^0 findet man (Nr. 121, a)) den höchsten Punkt s_1''. Aus dem Umrißpunkt u_1'' ergibt sich als Schnitt der Horizontalen durch ihn mit A'' ein Punkt n_1'' des Mittelschnittes (Nr. 121, c)). Bei der Konstruktion der auf dem beliebigen Parallelkreis P'' gelegenen Punkte von F'' beachte man, daß die Mitte m'' der eingeschriebenen Kugel dem Radius des Hauptmeridians M'' durch den Schnittpunkt mit P'' angehört und die Punkte p'' nun nach Fig. 243 b gefunden werden. Da die Wulstfläche bezüglich des Mittelpunktes o des kleinsten Parallelkreises (Kehlkreises) symmetrisch ist und auch die Lichtstrahlen bezüglich o symmetrisch liegen, muß das



gleiche auch für F gelten. F'' wird deshalb bezüglich o'' symmetrisch sein; darnach ergibt sich aus dem sichtbaren Teil von F'' der unsichtbare Teil.

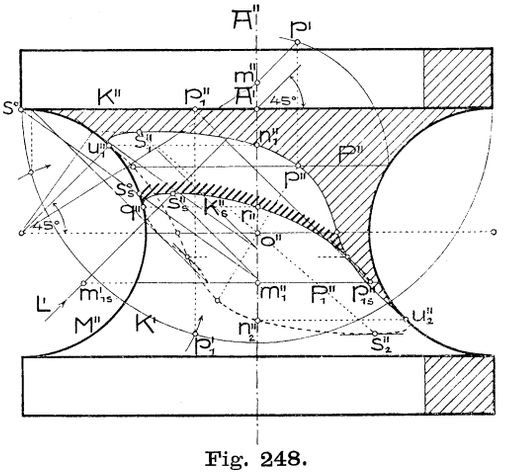


Fig. 248.

Bei der Konstruktion des Schlagschattens K_s des oberen Randkreises K ist jetzt zu beachten, daß die Punkte m_{is}' mit m_i'' in Horizontalen liegen. Zieht man also L' durch A', so ist $[L' P_i'']$ schon m_{is}'. Hat man die rechts vom höchsten Punkte s_s'' befindliche Hälfte von K_s'' gezeichnet und trifft sie A'' in r'', so liegt, wegen der Symmetrie von M und N (Mittelschnitt) gegen σ, der M'' angehörige Punkt q'' von K_s'' mit r'' auf gleicher Höhe. Bei 45°-Beleuchtung (allgemeiner: bei jeder zu Σ_{23} oder Γ_{23} parallelen Beleuchtung) sind also die Umrißpunkte des Schlagschattens aus seinen Punkten im Mittelschnitt leicht konstruierbar.

125. Schlagschatten einer Eigenschattengrenze auf die Drehfläche. Wir wählen als Beispiel den unteren Teil aus Fig. 241, woraus auch die Eigenschattengrenzen in Fig. 249 übertragen worden sind. Der höchste Punkt des Schlagschattens F_s, den die Eigenschattengrenze F des Teiles Φ auf den untersten Teil Ψ der Fläche wirft, ist infolge der Symmetrie hinsichtlich σ der Schlagschatten des tiefsten Punktes s_2 von F. Denkt man sich wieder σ in μ hineingedreht,

Hosted by Google

wodurch s_2 in s_2^0 übergeht, so schneidet $[s_2^0 \| L^0]$ (welche Gerade übrigens schon bei der Konstruktion von s_2'' gezeichnet worden ist) den Hauptmeridian von Ψ im Punkt s_{2s}^0, der nach der Rückdrehung seinen Aufriß s_{2s}'' auf $[s_2'' \| L'']$ hat.

Weitere Punkte von F_s ermittelt man nach der allgemeinen Methode des Zurückführens. Wir suchen zu diesem Zweck vor allem F' (nach Nr. 115, Hauptaufgabe), indem wir A' irgendwo auf A'', etwa im Aufriß des untersten Parallelkreises K_3 von Ψ wählen, und konstruieren punktweise den Schlagschatten $F^\times$ von F auf die Horizontalebene Π_1 durch A'. F' sowohl als $F^\times$ sind natürlich bezüglich $\sigma' = [A' \| L']$ symmetrisch. Sei nun K_1 irgend ein Parallelkreis von Ψ, so suche man den Schatten $k_1^\times$ seiner Mitte k_1 auf Π_1 und schlage um ihn mit dem Halbmesser von K_1 den Kreis $K_1^\times$; dessen vorderer Schnittpunkt mit $F^\times$ heiße $1^\times$. Der durch $1^{\times\prime\prime}$ (in Π_1'') $\| L''$ gezogene Aufriß des Lichtstrahls schneidet dann K_1'' in dem Punkt $1''$ von F_s''.

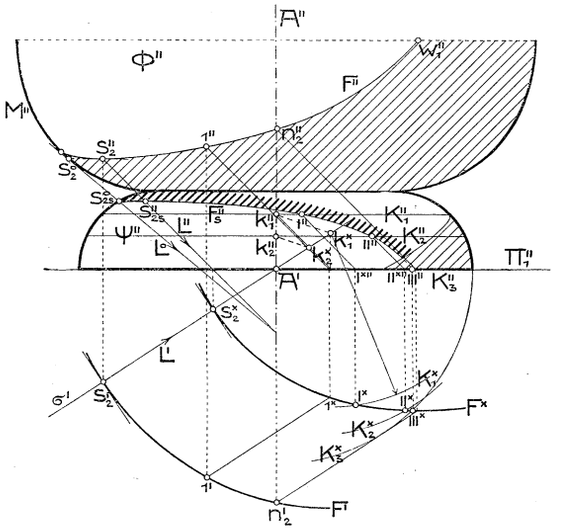


Fig. 249.

Analog wurden in Fig. 249 der Punkt II'' auf K_2'' und III'' auf K_3'' gefunden; dabei kann man verwerten, daß $[k_2'' k_2^\times] \| [k_1'' k_1^\times]$ sein muß. K_3' fällt mit $K_3^\times$ zusammen. F_s'' hat in s_{2s}'' eine horizontale und im Schnittpunkt mit der Eigenschattengrenze von Ψ eine zu L'' parallele Tangente.

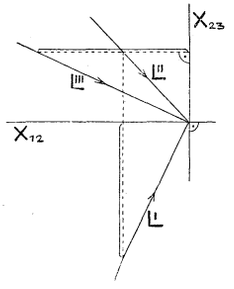
Bei 45°-Beleuchtung ist die Richtung $[k_1'' k_1^\times]$ horizontal und der Umrißpunkt von F_s'' liegt mit dem Punkt im Mittelschnitt auf demselben Parallelkreis. Ersteres gilt übrigens für jede zu Σ_{12}, letzteres für jede zu Σ_{23} oder Γ_{23} parallele Beleuchtung.

Verläuft F sehr flach, wie in der Umgebung von s_2, so kann in technischen Zeichnungen bei der Konstruktion des Schlagschattens von F mit hinreichender Genauigkeit ein Stück dieser Kurve durch ein Stück eines Parallelkreises ersetzt werden.

126. Schlagschatten einer quadratischen Platte auf eine Drehfläche.

Hosted by Google

a) *Für beliebige Lichtrichtung.* Wir nehmen an, auf einem Drehkörper mit lotrechter Achse ruhe eine horizontale quadratische Platte. Die Schlagschatten der unteren Plattenkanten ließen sich dann nach der allgemeinen Methode des Zurückführens konstruieren, indem man als Bezugsebene die untere Fläche der Platte benutzt. Da aber der Schlagschatten einer Geraden der Schnitt ihrer Lichtebene mit der Drehfläche ist, kann er



einfacher gefunden werden, sobald die Vorderkante G der Platte, wie in Fig. 250, senkrecht zur Kreuzrißebene steht, ein Fall, der im architektonischen Zeichnen häufig auftritt.

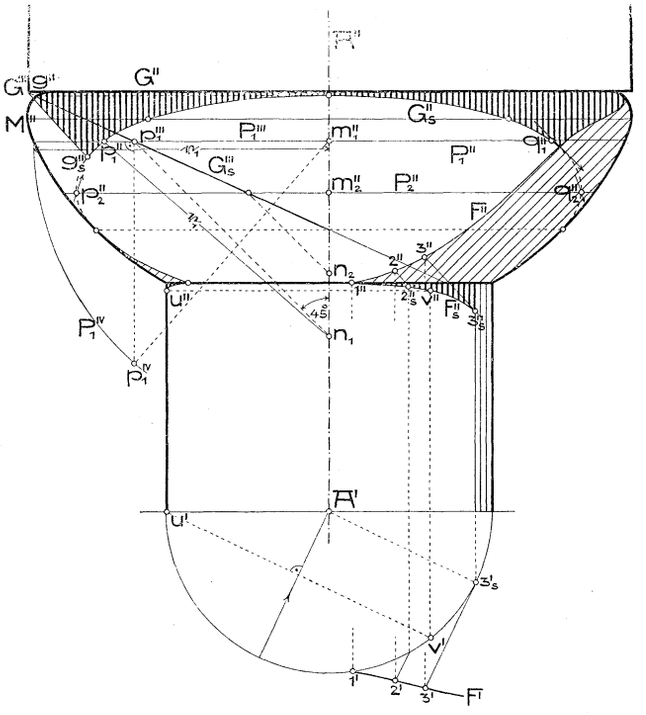


Fig. 250.

Wir führen die durch die Drehachse A senkrecht Π_2 gelegte Ebene Π_3 als Seitenrißebene ein und klappen sie in die Hauptmeridianebene um. Der Seitenriß von G ist dann der Punkt $G''' = g'''$. Die durch G''' parallel zum Seitenriß L''' des Lichtstrahls (in der Nebenfigur aus L' und L'' ermittelt) gelegte Gerade ist ferner der Seitenriß der Lichtebene durch G, zugleich also auch der Seitenriß G_s''' des Schattens G_s von G auf die Drehfläche Φ, während sich der Seitenriß des Mittelschnittes mit M'' (Hauptmeridian) deckt. Der Schnittpunkt von M'' mit G_s''' hat daher seinen Aufriß in A''; er ist der höchste Punkt von G_s''. Um aus dem Seitenriß p_1''' irgend eines Punktes dieser Kurve den Aufriß p_1'' zu erhalten, klappt man gewöhnlich den Parallelkreis $P_1 = (m_1, r_1)$ durch p_1 in die Seitenrißebene nach P_1^{IV} um. Kommt dadurch p_1 nach p_1^{IV} (auch als neuer Seitenriß auffaßbar), so gibt $\overline{p_1''' p_1^{IV}}$ den Abstand $\overline{p_1 \Pi_3}$ an. Trägt man diesen daher

Hosted by Google

auf $P_1'' = P_1'''$ von m_1'' aus beiderseits ab, so sind die Endpunkte p_1'', q_1'' Punkte von G_s''.

Diese bekannte Konstruktion läßt sich auf folgende Weise vereinfachen. Zieht man durch p_1''' unter 45^0 gegen A'' geneigt eine Gerade (und zwar nach abwärts, wenn p_1^{IV} im vorhergehenden unterhalb p_1''' gezeichnet wurde), die A'' in n_1 treffen möge, so folgt aus der Kongruenz der rechtwinkeligen Dreiecke $m_1''p_1'''p_1^{IV}$ und $n_1m_1''p_1''$ ($n_1m_1'' = \overline{m_1''p_1'''}$, $\overline{m_1''p_1''} = \overline{p_1'''p_1^{IV}}$), daß $n_1p_1'' = \overline{m_1''p_1^{IV}}$ ist. *Zu den Punkten p_1'', q_1'' gelangt man also einfacher, wenn man P_1'' mit dem Kreise (n_1, r_1) schneidet.* Fig. 250 zeigt diese Konstruktion für die Punkte p_2'', q_2'' auf P_2''.

Als Schattengrenze existiert der Schnitt G_s'' rechts nur bis zum Schnitt mit der Eigenschattengrenze F'' (Tangente an G_s'' in diesem Punkt L'') und links bis zum Schatten g_s'' des linken Endpunktes g von G. Von g an wirft die zu Π_2 senkrechte Plattenkante den zu L'' parallelen Schatten (Nr. 30, h)). In Fig. 250 wirft außerdem noch F einen Schlagschatten F_s auf den Zylinder. Hat man (nach Nr. 115, Hauptaufgabe) den Grundriß F' auf irgend eine Horizontalebene gezeichnet, so findet man mittels Grund- und Aufriß die Schlagschatten einzelner Punkte von F auf den Zylinder, insbesondre auch den in die Eigenschattengrenze fallenden Punkt 3_s. Im Schnittpunkt 1 von F mit dem Zylinder berührt F_s (Nr. 92, Satz 5) den Parallelkreis. Ist der rechte Teil von F_s'' gezeichnet und schneidet die zur linken Umrißerzeugenden des Zylinders bezüglich σ symmetrische Erzeugende die Kurve F_s in v (v' zweiter Schnittpunkt von $[u'|L']$ mit dem Zylindergrundriß), so liegt auf gleicher Höhe mit v'' der Umrißpunkt u'' des linken Teils von F_s''.

Analog wie auf einen lotrechten Zylinder ermittelt man auch den Schlagschatten einer Drehfläche auf eine lotrechte Ebene, etwa eine Wandfläche (vgl. Tafel II u. III).

b) *Für 45^0-Beleuchtung.* Weil jetzt L''' mit A'' einen Winkel von 45^0 einschließt, so fallen nach der obigen vereinfachten Konstruktion von G_s'' alle Punkte n_i in dem Punkt $[G_s'''A''] = n$ zusammen. Um also Punkte von G_s'' zu erhalten, *hat man nur die Aufrisse einer Anzahl Parallelkreise mit den mit ihren Radien um n beschriebenen Kreisen zum Schnitt zu bringen* (vgl. Fig. 251).

Diese Konstruktion läßt aber auch unabhängig von a) eine einfache Erklärung zu. Man denke sich durch irgend einen Parallelkreis P_1 vom Halbmesser r_1 den zu A parallelen Zylinder gelegt und auf ihm den Schlagschatten von G gezeichnet. Die Schnittpunkte dieses Schattens mit P_1 gehören G_s an. Da der Aufriß jenes Schattens (Nr. 97, Abschnitt nach Satz 1) der Kreis (n, r_1) ist, so sind die Schnittpunkte p_1'', q_1'' dieses Kreises mit P_1'' schon Punkte von G_s''[1]). Diese Kon-

1) Diese Konstruktion findet sich bei *J. Kajetan,* Schattenlehre und Per-

Hosted by Google

struktion gilt übrigens für jede zu Σ_{12} oder Γ_{12} parallele Lichtrichtung, weil dann immer L''' unter 45^0 gegen A'' geneigt ist, und läßt sich natürlich sinngemäß auch anwenden, wenn A zu einer andern Rißebene senkrecht steht.

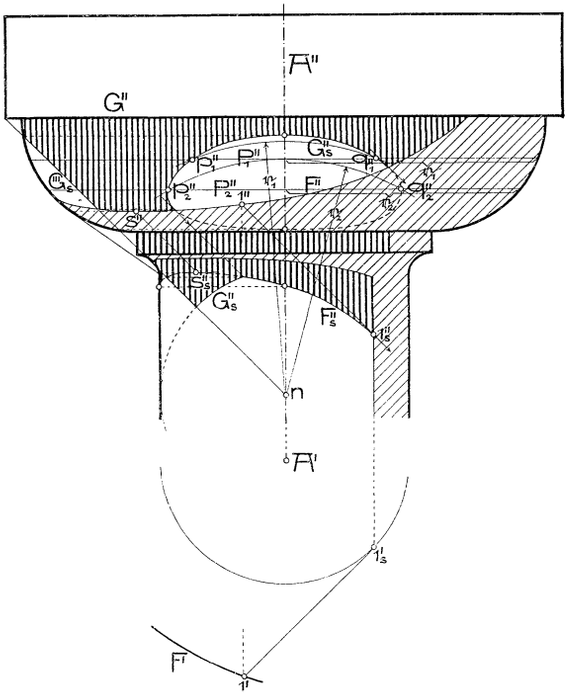


Fig. 251.

Fig. 251 enthält auch die Schlagschatten G_s und F_s von G und F auf den unteren Zylinder. Da bei 45^0-Beleuchtung G und die zu Π_2 senkrechte linke untere Plattenkante bezüglich σ symmetrisch liegen, so gilt dasselbe auch für ihre Schlagschatten auf die Drehfläche und den Zylinder. Die Schnittpunkte dieser beiden Schatten mit F sowie die mit F_s liegen demnach im Aufriß auf horizontalen Geraden.

127. Konstruktion der Eigenschattengrenze einer Wulstfläche in dem zu ihrer Drehachse senkrechten Riß. Wir wollen annehmen, die Achse A der Wulstfläche Φ (Nr. 116, S. 278) stehe senkrecht zu Π_2; wenn der Meridiankreis die Achse weder reell schneidet noch berührt, so besteht der zweite scheinbare Umriß von Φ aus zwei sichtbaren konzentrischen Kreisen, dem Aufriß des Äquators und des Kehlkreises (Fig. 252). Man könnte nach Nr. 121, 122 die Eigenschattengrenze F von Φ im Grundriß konstruieren und daraus F'' ermitteln. Bedeutend einfacher gestaltet sich jedoch die Verwendung der folgenden Methode.

Längs jedes Meridiankreises K ist eine berührende Kugel legbar und die Schnittpunkte der Eigenschattengrenze dieser Kugel mit K sind Punkte von F (Nr. 92, 2. Methode). Wegen der Kongruenz aller

spektive, Wien 1889, S. 74; ferner hat sie *R. Mehmke*, Z. Math. Phys. 46 (1901), S. 244—245 mitgeteilt.

Hosted by Google

dieser berührenden Kugeln genügt es, für eine gleich große *Hilfskugel* den Aufriß S'' der Eigenschattengrenze möglichst genau zu ermitteln (Nr. 110). Diese Hilfskugel φ wählt man vorteilhaft in solcher Lage, daß der Aufriß ihres Mittelpunktes mit A'' zusammenfällt. Um nun die auf K'' liegenden Punkte von F'' zu erhalten, denke man sich die längs K berührende Kugel mit der Mitte o durch eine Parallelverschiebung mit φ zur Deckung gebracht; K'' geht hierbei in denjenigen Durchmesser K_1'' des Hilfskugelumrisses über, der mit K'' derselben Geraden angehört. Wird nun K_1'' von S'' in dem Punktepaare p_1'', q_1'' geschnitten, so ist dieses das auf K'' liegende Punktepaar von F'' in verschobener Lage; durch Rückschiebung geht es in das gesuchte Punktepaar p'', q'' über.

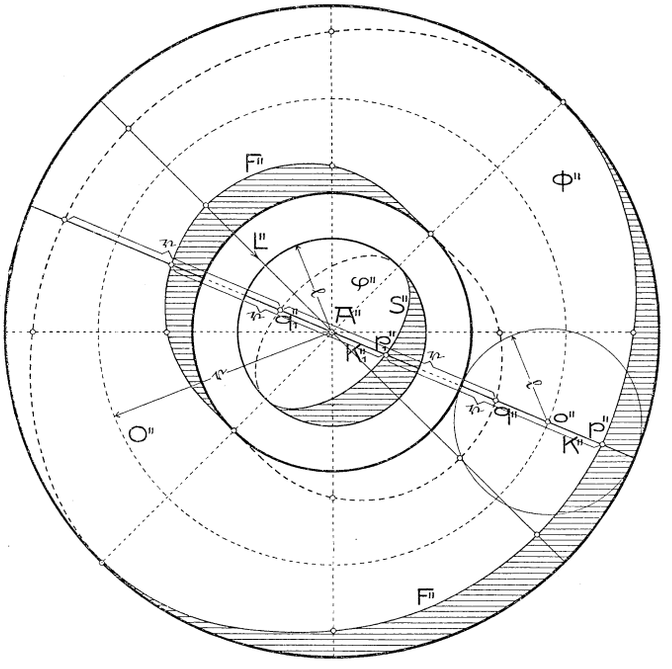


Fig. 252.

Weil die Verschiebungsstrecke gleich dem Halbmesser $\overline{A''o''} = \mathfrak{r}$ des von den Meridianmitten erfüllten Kreises O ist, so besteht die Gleichung $\overline{p_1''p''} = \overline{q_1''q''} = \mathfrak{r}$. Da ferner für den mit K derselben Ebene angehörigen zweiten Meridiankreis die Schnittpunkte mit F auf gleiche Weise erhalten werden, so folgt:

Trägt man auf den Geraden durch A'' von den Schnittpunkten mit der Ellipse S'' aus nach beiden Seiten den Halbmesser $\mathfrak{r}$ von O ab, so erhält man Punkte von F'' [1]).

1) Diese Konstruktion stammt von *Dunesme*, C. R. Ac. sc. Paris 38 (1854), p. 953 und 45 (1857), p. 527, der sie auf jene allgemeineren Flächen anwendet, deren eine Meridianhälfte ein Kegelschnitt mit zu A paralleler Achse ist.

Verschiebt man jeden Punkt einer beliebigen Drehfläche Φ mit der Achse A in dem aus dem Punkt auf A gefällten Lot um die gleiche Strecke von der Achse weg, so erhält man eine Drehfläche Φ_1 mit derselben Achse, welche die Eigenschaft hat, daß die Tangentenebenen in entsprechenden Punkten von Φ und Φ_1

Hosted by Google

Bekanntlich nennt man eine Kurve, die aus einer vorgegebenen Kurve C dadurch hervorgeht, daß man auf den Strahlen durch einen festen Punkt (den *Pol*) von ihren Schnittpunkten mit C aus eine gegebene Strecke beiderseits abträgt, eine *Konchoide* von C. *Die Kurve F'' ist daher eine Konchoide der Ellipse S'' für deren Mittelpunkt als Pol.*

Die Eigenschattengrenze der Wulstfläche besteht im allgemeinen aus zwei getrennten Teilen. In Fig. 252 wirft der innere Teil einen von seinen Grenzpunkten (Nr. 120, Satz 7) ausgehenden Schlagschatten auf die Fläche, der aber seiner Kleinheit wegen nicht gezeichnet wurde.

Soll der Schatten einer Wulstfläche, deren Achse $A \perp \Pi_1$ steht, im Aufriß gezeichnet werden, so könnte man nach der vorhergehenden Konstruktion den Schatten erst im Grundriß zeichnen und daraus seinen Aufriß ableiten. Die direkte Konstruktion nach Nr. 121, 122 gestaltet sich aber einfacher.

128. Konstruktion der Lichtgleichen auf Drehflächen mittels eingeschriebener Kugeln. Wir nehmen die Achse A der Drehfläche Φ wieder $\perp \Pi_1$ an und legen eine 6-stufige Helligkeitsreihe (Nr. 112) zugrunde.

Zuerst suchen wir für eine beliebig gewählte Kugel $\varkappa = (o, \mathfrak{r})$ (Fig. 253 b) den Abstand $\mathfrak{d}$ der Spur $E_1^{(6)}$ der Ebene der Eigenschattengrenze von der Spur E_1^{0} der Berührebene im hellsten Punkt h auf irgend einer Horizontalebene. Da $\mathfrak{d}$ von der Lage dieser Ebene unabhängig ist, so nehmen wir sie durch o an; $E_1^{(6)}$ ist dann $[o' | L']$ und aus dem Seitenriß auf die durch $[o | L]$ gelegte erstprojizierende Ebene erhält man $E_1^{(0)}$ und damit $\mathfrak{d} = \overline{o' E_1^{(0)}}$. Für eine feste Lichtrichtung und verschiedene Kugeln $\varkappa_i$ ist $\mathfrak{d}_i$ zum Kugelradius $\mathfrak{r}_i$ proportional. Wir zeichnen daher zur raschen Ermittlung von $\mathfrak{d}_i$ aus $\mathfrak{r}_i$ einen Proportionalwinkel δ (Fig. 253 c) mittels der eben gefundenen Strecke $\mathfrak{d}$ und des Halbmessers $\mathfrak{r}$ (vgl. Fußnote 1, S. 277).

Um nun auf irgend einem Parallelkreis P_1 von Φ (Fig. 253 a) die Punkte der Lichtgleichen zu erhalten, lege man, wie bei der Konstruktion der Eigenschattengrenze (Nr. 122), die Φ längs P_1 berührende Kugel $\varkappa_1 = (m_1, \mathfrak{r}_1)$ und suche die Schnittpunkte ihrer Lichtgleichen mit P_1. Zu diesem Zwecke genügt es, die Spuren der Lichtgleichenebenen $\varepsilon^{(i)}$ von $\varkappa_1$ auf der Ebene von P_1 aufzusuchen.

zueinander parallel sind. Die Eigenschattengrenze von Φ für Parallelbeleuchtung geht daher bei dieser Umformung in die Eigenschattengrenze von Φ_1 über. Durch Umkehrung dieses Vorganges gelangt man von der Eigenschattengrenze der Fläche Φ_1 zu der von Φ. Ist nun der Halbmeridian M von Φ bezüglich einer zu A parallelen Geraden symmetrisch, so erreicht man, wie oben bei der Wulstfläche, eine Vereinfachung der Konstruktion der Eigenschattengrenze, wenn man vorerst Φ auf obige Art so in Φ_1 umformt, daß die Symmetrieachse von M in A übergeht.

Hosted by Google

Die Spur $E_1^{(6)}$ der Ebene der Eigenschattengrenze von $\varkappa_1$ ergibt sich nach Fig. 243. Hat man nun mittels des Proportionalwinkels δ zu $\mathfrak{r}_1$ die zugehörige Strecke $\mathfrak{d}_1$ gefunden, so ziehe man in diesem Abstande zu $E_1^{(6)}$ die Parallelen $E_1^{(0)}$ und $E_1^{(-3)}$ und teile $\overline{E_1^{(6)}E_1^{(0)}}$ in 6 (bei Zugrundelegung einer $\mathfrak{n}$-stufigen Reihe in $\mathfrak{n}$), $\overline{E_1^{(6)}E_1^{(-3)}}$ in 3 $\left(\text{allg. } \frac{\mathfrak{n}}{2}\right)$ gleiche Teile. (Man kann natürlich mittels eines Proportionalwinkels auch sofort $\frac{\mathfrak{d}_1}{6}$ statt $\mathfrak{d}_1$ ermitteln.) Die durch die Teilpunkte gezogenen Parallelen zu $E_1^{(6)}$ sind dann die Spuren der Ebenen $\varepsilon^{(i)}$ auf der Ebene von P_1 nach deren Umklappung in die Hauptmeridianebene. Sie schneiden im vorliegenden Beispiel auf P_1' die (reellen) Lichtgleichenpunkte $1'$, $2'$, $3'$, ... $6'$ aus, die man nur mehr im Aufriß zu zeichnen braucht; P_1 wird also von den Lichtgleichen -5, -4, -3 nicht geschnitten. So verfährt man für beliebig viele Parallelkreise. Wie schon in Nr. 113 erwähnt, empfiehlt sich auch hier die Einschaltung einer Lichtgleiche 0,5 (Schattierungsgrad $\frac{1}{2}$).

Besonders wertvoll für das richtige Zeichnen der Lichtgleichen sind ihre Umrißpunkte und ihre höchsten und tiefsten Punkte.

Die *Umrißpunkte* ergeben sich aus der Bemerkung, daß die Tangentenebenen in diesen Punkten an Φ zu den Tangentenebenen der entsprechenden Umrißpunkte $u^{(i)}$ oder $t^{(i)}$ einer Kugel $\varkappa$ parallel sein müssen. Die Konstruktion der letzteren wurde schon in Nr. 113 erwähnt und ist in Fig. 253 b nochmals durchgeführt. Legt man nun in einem dieser Punkte, z. B. in $u^{(3)}$, die (zu Π_2 senkrechte) Tangentenebene an $\varkappa$ und hierzu parallel die Tangentenebenen an Φ, so gehören deren Berührungspunkte dem Umriß von Φ und der Lichtgleiche 3 dieser Fläche an. Hierbei ist aber eine gewisse Vorsicht notwendig. Sollen nämlich ein Punkt der Kugel und ein Punkt der Drehfläche dieselbe Helligkeit besitzen, so müssen nicht allein ihre Tangentenebenen parallel sein, sondern die Innenseiten der betreffenden Flächen müssen auch auf derselben Seite dieser Ebenen liegen. So z. B. lassen sich zur Tangentenebene im Punkt $t^{(-5)}$ von $\varkappa$ zwei parallele Tangentenebenen an Φ legen, deren Berührungspunkte auf der rechten Hauptmeridianhälfte liegen (identisch mit den Punkten 4). Trotzdem haben diese Punkte nicht den Schattierungsgrad -5, weil die Innenseite von Φ bezüglich der Tangentenebenen dieser Punkte auf der entgegengesetzten Seite liegt, wie die Innenseite von $\varkappa$ bezüglich der Tangentenebene in $t^{(-5)}$. Der Außenseite von Φ kommt in jenen Punkten der Schattierungsgrad 4, der Innenseite wirklich der Schattierungsgrad -5 zu.

Bei 45^0-Beleuchtung (allgemeiner: $L \parallel \Sigma_{23}$ oder $L \parallel \Gamma_{23}$) liegt mit jedem Umrißpunkt ein gleich heller Punkt des Mittelschnittes auf demselben Parallelkreis (Nr. 121, Satz 1).

Hosted by Google

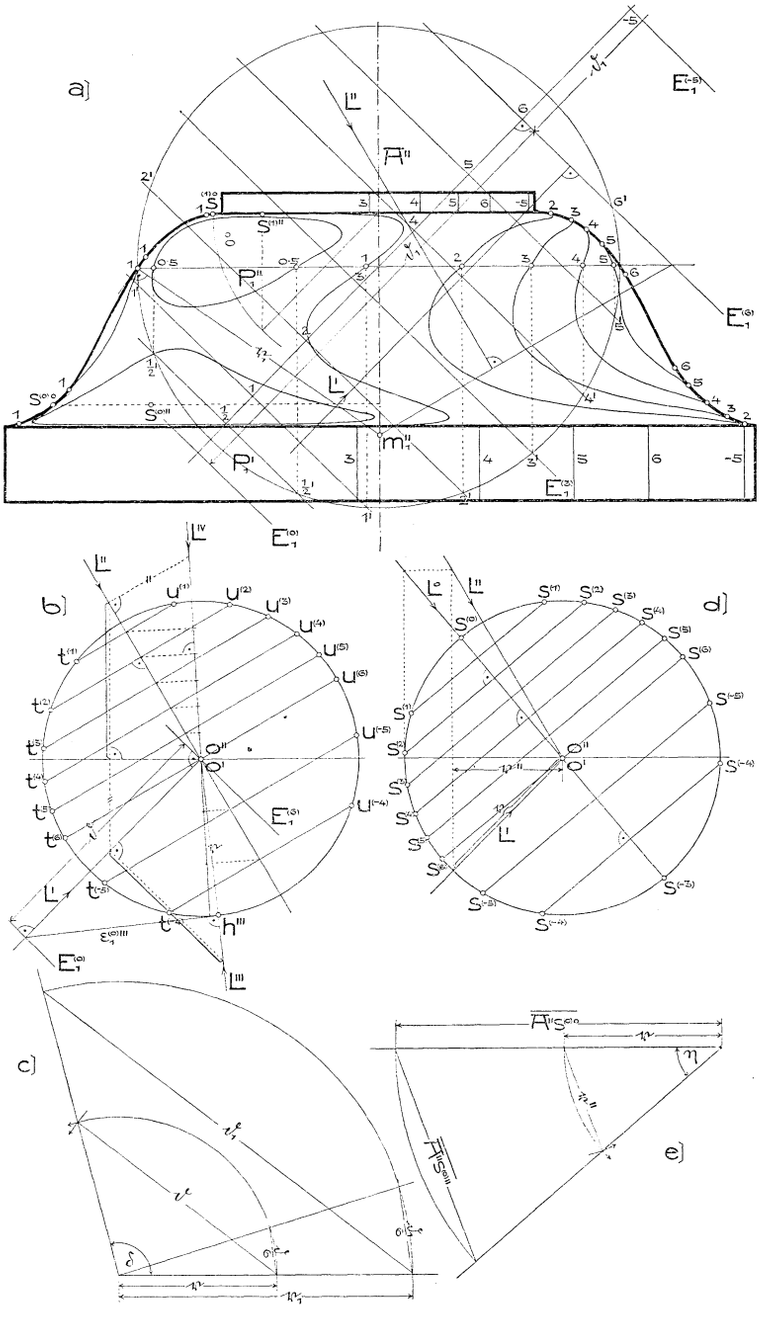


Fig. 253 a — e

Hosted by Google

Die *höchsten und tiefsten Punkte* der Lichtgleichen gehören nach Nr. 121, Satz 1 dem Lichtmeridian S der Drehfläche an. Da die Tangentenebenen in den Punkten eines Meridians zu dessen Ebene senkrecht stehen (Nr. 114, Satz 1), so werden die hierzu parallelen Tangentenebenen an eine Kugel $\varkappa$ diese in den Punkten eines zu Π_1 senkrechten Großkreises — also eines Meridians — berühren. Dem Lichtmeridian von Φ ist auf diese Weise der Lichtmeridian von $\varkappa$ zugeordnet und den höchsten und tiefsten Punkten der Lichtgleichen auf Φ entsprechen die höchsten und tiefsten Punkte der Lichtgleichen auf $\varkappa$, jedoch nicht so, daß immer höchste oder tiefste Punkte einander entsprechen.

Wir wählen daher in Fig. 253 d eine Hilfskugel $\varkappa = (o, \mathfrak{r})$ und denken sie uns samt dem Lichtstrahl L durch $o(o' = o'')$ um den lotrechten Durchmesser gedreht, bis ihre Lichtmeridianebene in Π_2 fällt. Die Lichtgleichen von $\varkappa$ erscheinen nun im Aufriß (Nr. 113) als Gerade $\perp L^0$, die die in L^0 befindlichen Halbmesser sechsteln bzw. dritteln und aus dem Kugelumriß die höchsten und tiefsten Punkte $s^{(i)}$ ausschneiden, die eigentlich mit $s^{(i)\,0}$ zu bezeichnen wären. Denkt man sich die Drehfläche um ihre Achse um den gleichen Winkel in dem gleichen Sinn gedreht und legt an den, nun mit dem Hauptmeridian sich deckenden Lichtmeridian zu den Tangenten an den Lichtmeridian von $\varkappa$ in den Punkten $s^{(i)}$ die parallelen Tangenten, so geben ihre Berührungspunkte $s^{(i)\,0}$ die höchsten und tiefsten Punkte $s^{(i)}$ der Lichtgleichen von Φ in der gedrehten Lage an. Durch Rückdrehung erhält man ihre Aufrisse. Dies geschieht entweder durch Umklappen der Parallelkreise (vgl. Fig. 253 a für den höchsten Punkt $s^{(1)}$) oder, bei einer größeren Anzahl solcher Punkte, vorteilhafter mittels eines Proportionalwinkels η. Da nämlich das Verhältnis $\overline{A''s^{(i)\,\prime\prime}} : \overline{A''s^{(i)\,0}}$ für sämtliche Punkte $s^{(i)}$ konstant ist, so wird man aus zwei solchen zusammengehörigen Strecken, z. B. $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}''$ aus Fig. 253 d, nach Fig. 253 e Winkel η konstruieren und damit zu $\overline{A''s^{(i)\,0}}$ sofort $A''s^{(i)\,\prime\prime}$ abgreifen können.

Für den *Verlauf der Lichtgleichen* gelten ähnliche Gesetze wie für den Verlauf der Eigenschattengrenze (Nr. 123), die ja nur eine der Lichtgleichen ist. Besonders beachte man jedoch, daß nie zwei Lichtgleichen sich in einem regulären Flächenpunkte schneiden dürfen (Nr. 113, Satz 1). In Fig. 253 a z. B. wird die eigentliche Drehfläche längs des obersten und untersten Parallelkreises von den Ebenen dieser Kreise berührt. Diese Kreise sind also selbst Lichtgleichen, wenn auch nicht solche mit ganzzahligem Schattierungsgrad. *Es darf daher keine der gezeichneten Lichtgleichen jene beiden Parallelkreise treffen.* In der Tat verlaufen in Fig. 253 a auf der eigentlichen Drehfläche sämtliche Lichtgleichen zwischen diesen Kreisen.

Fällt auf die Fläche Φ, deren Lichtgleichen schon ermittelt sind, ein Schlagschatten, so erhält ein beschatteter Flächenteil, der

Hosted by Google

im Licht den Schattierungsgrad $\mathfrak{s}$ hatte, jetzt den Schattierungsgrad $\mathfrak{s}_2 = (12 - \mathfrak{s})$ oder bei $\mathfrak{n}$-stufiger Reihe $\mathfrak{s}_2 = (2\mathfrak{n} - \mathfrak{s})$ (vgl. Nr. 112, Satz 2). Die Abschattierung wird auf die in Nr. 113 beschriebene Art vorgenommen; ihre Durchführung an einem Beispiel zeigt Tafel III.

129. Konstruktion der Lichtgleichen auf Zylindern und Drehkegeln. Die obige Konstruktion der Lichtgleichen ist natürlich auf *Drehzylinder* und *Drehkegel* gleichfalls anwendbar. Bei diesen Flächen, wie überhaupt bei allen abwickelbaren Flächen, sind die Lichtgleichen gerade Linien, weil jede Tangentenebene die Fläche längs einer Erzeugenden berührt (Nr. 73, Satz 2).

Fig. 254 a zeigt die Durchführung für einen Drehzylinder φ mit lotrechter Achse. Längs des unteren Parallelkreises P schreibe man

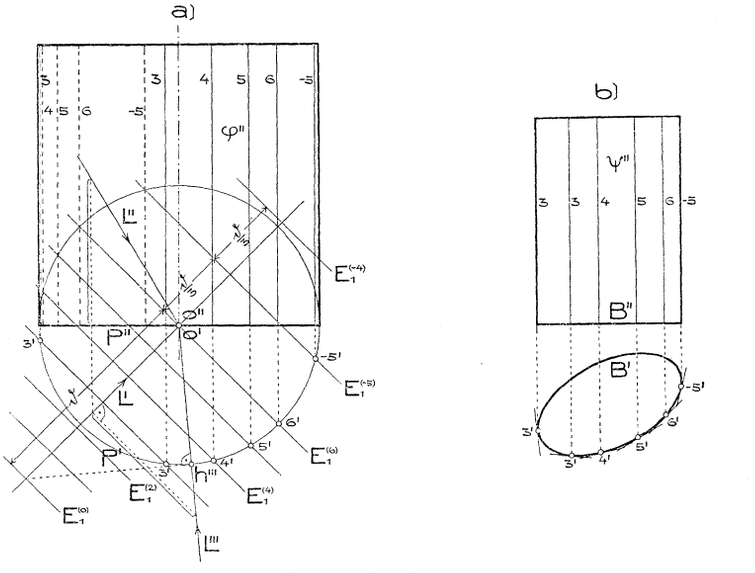


Fig. 254 a, b.

eine Kugel $\varkappa$ ein, zeichne die Spuren $E_1^{(6)}$ und $E_1^{(0)}$ der Ebenen $\varepsilon^{(6)}$ und $\varepsilon^{(0)}$ von $\varkappa$ auf der Ebene von P, teile $\mathfrak{d} = \overline{E_1^{(0)} E_1^{(6)}}$ durch die Parallelen $E_1^{(1)}, E_1^{(2)} \ldots E_1^{(5)}$ in sechs gleiche Teile und ziehe jenseits von $E_1^{(6)}$ im Abstande $\frac{\mathfrak{d}}{3}$ die Parallelen $E_1^{(-5)}, E_1^{(-4)}$. Die durch die Schnittpunkte $3', 4', 5', 6', -5'$ der Spuren $E_1^{(i)}$ mit P' gehenden Erzeugenden sind dann die Lichtgleichen des Zylinders φ.

Für einen beliebigen Zylinder ψ, dessen Erzeugende $\perp \Pi_1$ stehen und dessen Normalschnitt B bekannt ist (Fig. 254 b), ergeben sich die Lichtgleichen, wenn man zu den Tangentenebenen des Drehzylinders φ längs der Lichtgleichen 3, 4, ... die parallelen Tangenten-

Hosted by Google

ebenen an ψ legt. Zu diesem Zwecke braucht man bloß zu den Tangenten an P' in 3′, 4′, 5′ ... die parallelen Tangenten an B' zu legen; durch deren Berührungspunkte gehen dann die Lichtgleichen von ψ. Stehen die Erzeugenden von φ oder ψ zu keiner Rißebene senkrecht, so führe man mittels Seitenrissen diesen Fall auf den des Senkrechtstehens zurück.

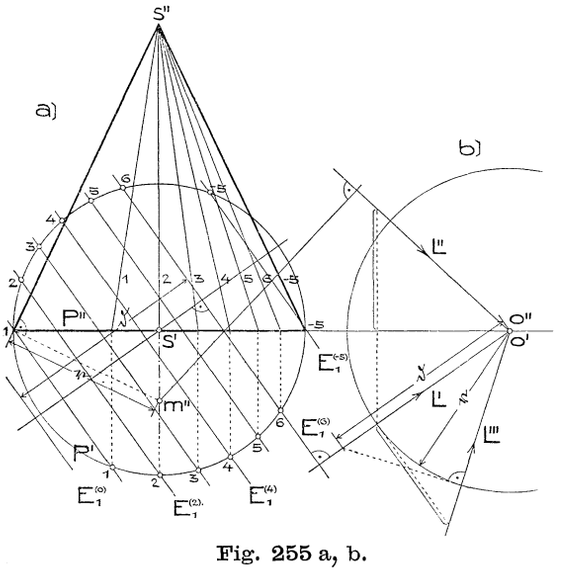


Fig. 255 a, b.

Fig. 255 zeigt die Konstruktion der Lichtgleichen für einen Drehkegel mit zu Π_1 senkrechter Achse. Längs des Basiskreises P wird die Kugel $(m, \mathfrak{r})$ eingeschrieben, für sie in der Nebenfigur 255 b der Abstand $\mathfrak{d} = \overline{E_1^{(0)} E_1^{(6)}}$ ermittelt und damit, wie bei einer allgemeinen Drehfläche, die Konstruktion der Lichtgleichenpunkte auf P ausgeführt. Die Erzeugenden durch diese Punkte sind die gesuchten Lichtgleichen, von denen in Fig. 255 a bloß die sichtbaren gezeichnet wurden.

Ist der Drehkegel in allgemeiner Lage, so führe man mittels Seitenrissen den Fall auf obigen zurück. Bilden Drehkegel oder Drehzylinder Teile einer Drehfläche, so erhält man $\mathfrak{d}$ natürlich rascher mittels des schon gezeichneten Proportionalwinkels δ (Fig. 253 c).

130. Konstruktion der Lichtgleichen mittels einer Normalkugel. Es möge noch auf die weniger genaue aber nach gewissen Vorbereitungen bedeutend rascher ausführbare *Konstruktion der Lichtgleichen einer Drehfläche mittels einer Normalkugel* hingewiesen werden. Wir nehmen an, daß auf einer Kugel ν mit dem Zentrum n — der *Normalkugel* — für die gewählte Lichtrichtung L, etwa 45°-Beleuchtung, die Lichtgleichen nach Nr. 113 im Aufriß schon genau gezeichnet worden seien; in Fig. 256 b ist dies unter Zugrundelegung einer vierstufigen Helligkeitsreihe geschehen. Wählen wir nun auf der gegebenen Drehfläche Φ mit zu Π_1 senkrechter Achse (Fig. 256 a) einen Parallelkreis P, der den Hauptmeridian in p treffen möge, und suchen den Mittelpunkt m der Φ längs P berührenden Kugel $\varkappa$, dann sind die

Hosted by Google

Schnittpunkte der Lichtgleichen von $\varkappa$ mit P auch Punkte der Lichtgleichen von Φ. Um nun diese Punkte zu erhalten, ohne die Lichtgleichen von $\varkappa$ zeichnen zu müssen, denken wir uns die Kugel $\varkappa$ samt ihren Lichtgleichen ähnlich verändert (vergrößert oder verkleinert), bis sie mit ν kongruent wird, und dann durch Parallelverschiebung mit ν zur Deckung gebracht. Der Halbmesser mp von $\varkappa$ geht dabei in den parallelen und gleichsinnigen Halbmesser np_1 von ν und der Parallelkreis P auf $\varkappa$ in den horizontalen Kreis P_1 auf ν durch p_1 über, sodaß $P_1'' \parallel P''$ ist. Wird nun P_1 von den im Aufriß sichtbaren Lichtgleichen auf ν in 3_1, 3_1, 4_1, -3_1 geschnitten, so gehen die Halbmesser $n3_1$, $n3_1$, $n4_1$, ..., wenn man durch die umgekehrten Operationen ν wieder in $\varkappa$ umwandelt, in die parallelen und gleichsinnigen Halbmesser durch m über, die aus P die gesuchten Punkte ausschneiden. Die Ausführung zeigt Fig. 256, wozu noch bemerkt werden möge, daß das Ziehen der Geraden $[n''3_1'']$, $[n''4_1'']$ ... überflüssig ist, sondern längs ihrer bloß das Dreieck angelegt zu werden braucht. Auf diese Weise lassen sich auf beliebig vielen Parallelkreisen von Φ die Schnittpunkte mit den Lichtgleichen ziemlich rasch finden. In den kleinsten und größten Parallelkreisen, ja wegen der auftretenden schleifenden Schnitte schon in der Nähe dieser Parallelkreise, wird man das Übertragen der Punkte aus der Normalkugel nicht durch das Ziehen der parallelen Radien ausführen, sondern die Tatsache verwerten, daß die Punktreihen auf P'' und P_1'' ähnlich sind. Selbstverständlich kann man die Konstruktion auch mit der Wahl eines Kreises P_1 auf ν beginnen und den P_1 entsprechenden Kreis P auf Φ mittels der parallelen Tangenten T_1'', T'' in p_1'' und p'' an die Umrisse suchen. Wählt man insbesondre P_1 tangierend an eine der ganzzahligen Lichtgleichen von ν, so liefert der Berührungspunkt nach der Übertragung einen höchsten oder tiefsten Punkt der Lichtgleiche auf Φ.

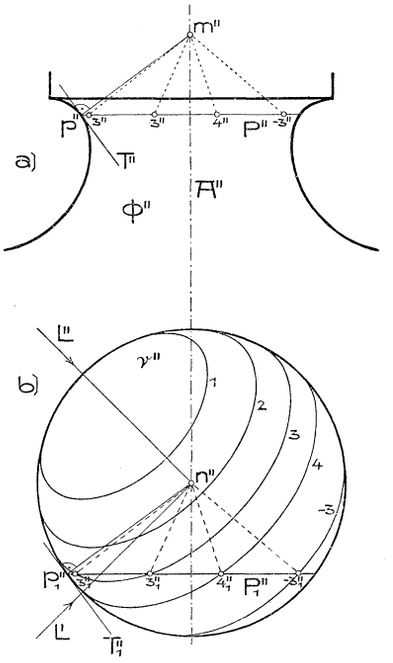


Fig. 256 a, b.

Besonders vorteilhaft für das praktische Zeichnen wird diese Methode dann, wenn man eine Normalkugel (auf stärkerem Zeichenpapier mit Tusche ausgezogen) für wiederholten Gebrauch schon vorbereitet hat, sodaß man sie nur mit Heftnägeln in der Nähe der Figur, an der die Lichtgleichen zu zeichnen sind, zu befestigen braucht.

Hosted by Google

Zeichnet man auf der Normalkugel bloß die Eigenschattengrenze oder benutzt von den schon auf ihr gezeichneten Lichtgleichen bloß die dem höchsten Schattierungsgrad entsprechende, so erhält man durch Anwendung obiger Methode die Eigenschattengrenze einer Drehfläche. Diese *Konstruktion der Eigenschattengrenze mittels einer Normalkugel* ist wegen ihres elementaren Charakters und ihrer leichten Merkbarkeit beachtenswert, wenn sie auch (besonders bei 45°-Beleuchtung) kaum rascher zum Ziele führt als die in Nr. 122 besprochene Konstruktion und jedenfalls weniger genaue Ergebnisse als diese liefert.

Mittels einer Normalkugel ν lassen sich auch die Schattierungsgrade der Flächen eines durch Ebenen begrenzten Körpers finden, indem man die zu ihnen parallelen Tangentenebenen an ν legt (mit Benutzung der äußeren Normalen); die Schattierungsgrade der Berührungspunkte auf ν geben sofort die Schattierungsgrade der entsprechenden Flächen an.

Auf einer *beliebigen krummen Fläche* Φ, für welche man die zu einer gegebenen Ebene parallelen Tangentenebenen zu konstruieren vermag, lassen sich die Lichtgleichen finden, indem man z. B. zu den Tangentenebenen von ν in den Punkten einer Lichtgleiche die Berührungspunkte der parallelen Tangentenebenen an Φ sucht.

131. Umrißermittlung einer Drehfläche, deren Achse gegen die betreffende Rißebene beliebig geneigt ist. Der wirkliche oder wahre Umriß U einer beliebigen Fläche, mithin auch einer Drehfläche Φ, ist nach Nr. 92 ihre Eigenschattengrenze für die Sehstrahlen als Lichtstrahlen und ihr scheinbarer Umriß das Bild des wahren Umrisses. U fällt mit dem zur Rißebene Π parallelen Meridian zusammen, wenn die Drehachse A zu Π parallel ist, und besteht aus einigen Parallelkreisen, wenn $A \perp \Pi$ ist (Nr. 115). Schließt jedoch A mit Π einen zwischen 0° und 90° liegenden Winkel α ein, so muß U nach den früher besprochenen Methoden erst konstruiert werden, wobei aber Vereinfachungen auftreten[1]). Wir knüpfen die Betrachtung an die folgende

Aufgabe: *Von einer Drehfläche Φ ist die Achse A durch Auf- und Grundriß und außerdem der Hauptmeridian seiner Gestalt nach gegeben. Man ermittle den zweiten scheinbaren Umriß der Fläche (Fig. 257).*

Damit A, wie bei den Konstruktionen in Nr. 121, 122 vorausgesetzt wurde, zu einer Rißebene parallel sei, zeichnen wir den Seitenriß

1) Sie stammen im wesentlichen von *R. Niemtschik*: „Direkte Konstruktion der Konturen von Rotationsflächen in orthogonalen und perspektivischen Darstellungen." Stzgsb. Ak. (math. nat.) Wien, 52 (1865), S. 573—622.

Hosted by Google

Φ''' auf eine zu A parallele und zu Π_2 senkrechte Ebene Π_3. Die Konstruktion von A''' zeigt die Nebenfigur 257 a; den Umriß in der dritten Projektion bildet der zu Π_3 parallele und seiner Gestalt nach gegebene Hauptmeridian N. Die zu Π_2 senkrechten, also zu Π_3 parallelen Sehstrahlen P_2 stellen sich im Seitenriß als die zu A'' senkrechten Geraden P_2''' dar; die ihnen zugehörige Eigenschattengrenze U zeichnen wir vorerst im Seitenriß nach der Kugelmethode. Wegen $P_2 \parallel \Pi_3$ stellen sich die Eigenschattengrenzen aller eingeschriebenen Kugeln im Seitenriß als Gerade $\perp P_2'''$ oder $\parallel A''$ dar. Schreiben wir also längs des Parallelkreises K_1 der Fläche die Kugel $\varkappa_1 = (m_1, \mathfrak{r}_1)$ ein, so ist $[m_1''' \parallel A'']$ der Seitenriß ihrer Eigenschattengrenze, mithin der Schnittpunkt $\imath'''$ dieser Geraden mit K_1''' der Seitenriß der beiden auf K_1 liegenden Punkte von U, die gegen die Ebene ν von N symmetrisch liegen. Der im Seitenriß sichtbare dieser Punkte heiße $\imath$. Die Aufrisse dieser Punkte gehören dem Aufriß der Eigenschattengrenze von $\varkappa_1$, d. h. dem um $m_1''(= [m_1''' \mid A'' \cdot A''])$ mit dem Halbmesser $\mathfrak{r}_1$ beschriebenen Kreis an, sind also die Schnittpunkte dieses Kreises mit der Ordnungslinie $[\imath''' \mid A'']$. Der Kreis $(m_1'', \mathfrak{r}_1)$ berührt in $\imath''$ und dem bezüglich A'' symmetrischen Punkt den scheinbaren Umriß U'', weil die Tangente an U in $\imath$ der Tangentialebene an $\varkappa_1$ in $\imath$ angehört und diese sich als Tangente an $(m_1'', \mathfrak{r}_1)$ im Punkte $\imath''$ darstellt. Man erhält auf diese Weise außer einem Punktepaar von U'' zugleich die Tangentenrichtungen in diesen Punkten. U'' hat A'' zur Symmetrieachse. In einem kleinsten Parallelkreis, wie K_2, oder in einem größten, wie K_4, fallen die Mittelpunkte der eingeschriebenen Kugeln mit den Mittelpunkten der Kreise zusammen; die ihnen angehörigen Punkte $\imath\imath$, $\imath v$ von U haben ihre Seitenrisse daher in A''' und ihre Aufrisse $\imath\imath''$, $\imath v''$ sind um die Halbmesser $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_4$ dieser Kreise von A'' entfernt. Die Tangenten an U'' in diesen Punkten sind zu A'' parallel. Die Aufrisse der N angehörigen Punkte n_1, n_2, n_3 von U fallen in A''.

Der Umriß besteht in Fig. 257 aus zwei getrennten Teilen U_1, U_2. Beim Zeichnen von U_1''' und U_2''' beachte man, daß sich diese Kurven dem Seitenriß K''' des obersten Parallelkreises asymptotisch nähern, weil die K angehörigen Punkte von U ins Unendliche fallen. Faßt man nämlich die obige Konstruktion der Punkte von U''' aus denen von N''' rein planimetrisch auf, so entsprechen auch den über n_2''' oder n_3''' hinausliegenden Punkten von N''' reelle Punkte von U'''. Jeder von diesen stellt den Aufriß zweier konjugiert imaginären Punkte von U dar (ähnlich wie in Fig. 199 jeder Punkt der gestrichelten Teile von K'). Den auf K''' liegenden Punkten von N''' entsprechen aber unendlichferne Punkte von U'''. Die Tangenten an U_1''' und U_2''' in den Punkten n_2''' bzw. n_3''' weichen daher etwas von der Richtung von K''' ab. Daß in den Punkten n_1''', n_2''', n_3''' die Kurven U''' und N''' einander nicht berühren, stimmt mit der

Hosted by Google

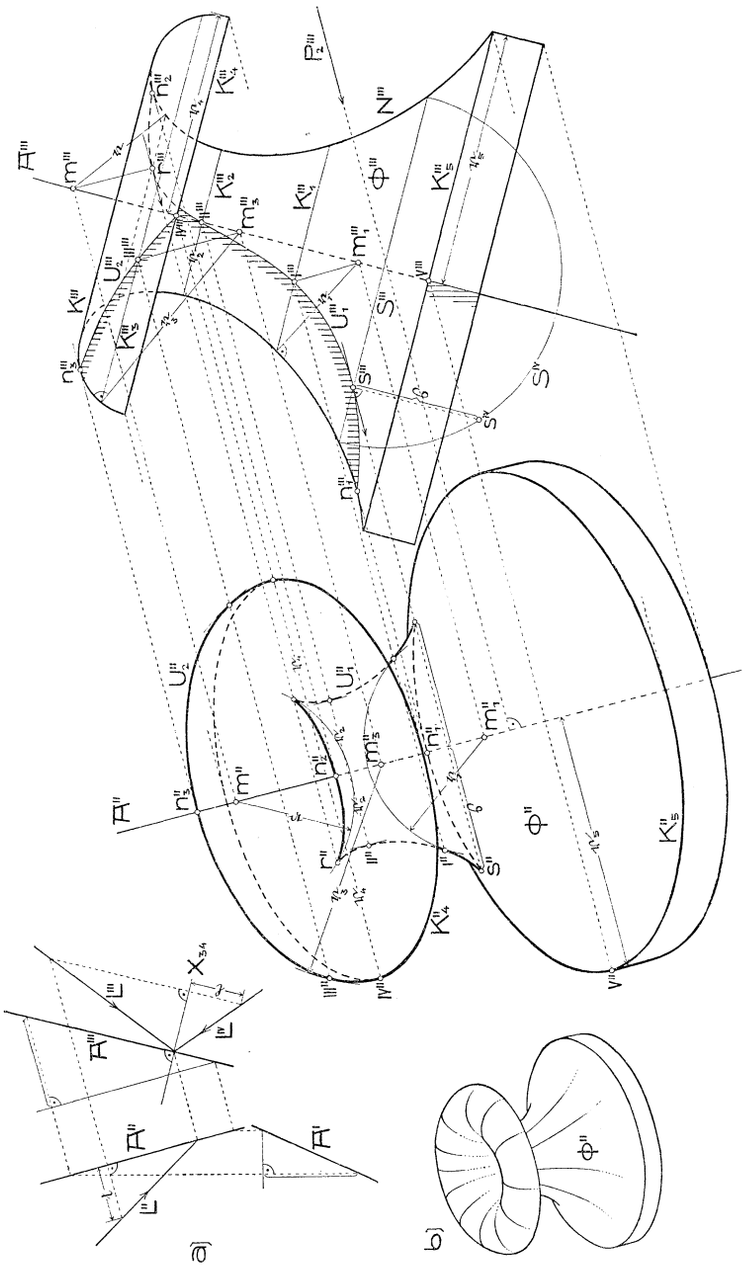


Fig. 257 und 257 a, b.

auf S. 203 (3. Abs. nach Satz 3) erwähnten Ausnahme vom Satze 2 in Nr. 92 überein, weil die Tangenten in n_1, n_2, n_3 an U zur Seitenrißebene senkrecht stehen.

Für die Form des scheinbaren Umrisses U'' ist die Existenz und Lage der Grenzpunkte (Nr. 120, letzter Absatz) auf U von besondrer Wichtigkeit, da ihre Aufrisse, reguläre Grenzpunkte vorausgesetzt, *Spitzen* (Rückkehrpunkte) von U'' sind (Nr. 68, Satz 3). In Fig. 257 lassen sich an U_1''' zwei Tangenten $\| P_2'''$ legen. Da deren Berührungspunkte r''' und s''' nicht N''' angehören, so sind r und s Grenzpunkte von U, d. h. die Tangenten an U in diesen Punkten sind $\| P_2$. Die Aufrisse von r und s können wie früher gefunden werden, indem man z. B. längs des Parallelkreises durch r die Kugel $(m, \mathfrak{r})$ einschreibt (Kontrolle: $[m'''r''']\| A''$) und nun den Kreis $(m'', \mathfrak{r})$ zeichnet. Dieser Kreis berührt wieder in r'' die Kurve U_1'', gibt also zugleich die Richtung der Spitzentangente an.[1]) Fällt jedoch der Mittelpunkt der eingeschriebenen Kugel außerhalb des Zeichenblattes, wie dies für den Punkt s angenommen wurde, dann suche man, um s'' zu erhalten, mittels Umlegung des Parallelkreises S durch s den Abstand $\mathfrak{s} = \overline{s^{IV}s'''} = \overline{sv}$ und trage ihn auf der Ordnungslinie durch s''' von A'' aus ab. Die Spitzentangente dieses Punktes ergibt sich dann als Aufriß der durch s gehenden Erzeugenden des längs S der Fläche Φ umschriebenen Kegels. In den Punkten r'' und s'' sowie in ihren bezüglich A'' symmetrischen Punkten hören die sichtbaren Teile des scheinbaren Umrisses auf[2]).

In Fig. 257 sind noch die Aufrisse der Randkreise K_4 und K_5 (von letzterem nur der sichtbare Teil) eingezeichnet; sie sind Ellipsen,

---

1) Die Tangente an U in r ist Haupttangente von Φ (nach Nr. 120, Satz 4). Die Tangentenebene ϱ der Fläche in r ist dann Schmiegebene von U; denn da die Schnittkurve zwischen ϱ und Φ den Umriß U in r sowohl berührt als schneidet, hat ϱ mit U drei benachbarte Punkte gemeinsam. Der Aufriß von ϱ gibt die Spitzentangente von U'' in r''. Der Aufriß irgend einer Kurve F auf Φ, die durch r geht, aber in diesem Punkt keine zu Π_2 senkrechte Tangente besitzt, berührt in r'' die Spitzentangente ϱ'', weil ϱ die Tangente an F in r enthält.

Damit ist ein Beispiel für das in Nr. 92 (3. Abs. nach Satz 3) erwähnte Vorkommnis gegeben.

2) Besitzt U in einem Punkte q eine Unstetigkeit in bezug auf die Tangente (z. B. einen durch Zusammensetzung verschiedener Kurvenstücke entstandenen Knick) und liegen die von q ausgehenden zwei Halbtangenten auf derselben Seite des Sehstrahls durch q, dann besitzt U'' in q'' einen zeichnerischen Rückkehrpunkt, da sich die Aufrisse der beiden in q zusammenstoßenden Kurventeile in q'' berühren und von diesem Punkt aus nach derselben Seite verlaufen. q'' ist ein wirklicher Rückkehrpunkt (Spitze oder Schnabel) von U'', wenn U als gesetzmäßige Kurve in q bezüglich der Tangente unstetig ist. Auf dieses Vorkommnis hat *R. Schüssler,* Orthogonale Axonometrie, Leipzig u. Berlin 1905, S. 156, hingewiesen.

Hosted by Google

deren große Achsen zu A'' senkrecht stehen und mit den Kreisradien gleich lang sind.

Fig. 257 b zeigt den sichtbaren Teil des eben konstruierten Aufrisses von Φ verkleinert und durch Andeutung einzelner Meridiane anschaulicher gestaltet.

Sollen für eine durch L'', L''' gegebene Lichtrichtung L die an Φ auftretenden Schatten oder Beleuchtungsverhältnisse überhaupt im Aufriß dargestellt werden, so ermittle man zuerst den Seitenriß L^{IV} von L auf eine zu A senkrechte Ebene Π_4 (vgl. Fig. 257 a) und konstruiere nach den im vorhergehenden gelehrten Methoden mit L''' und L^{IV} die Schattengrenzen oder Lichtgleichen im dritten Riß. Da sich hierbei die Abstände der Punkte der Schattenkurven oder Lichtgleichen von Π_3 unmittelbar ergeben (oder doch leicht konstruierbar sind), so lassen sich die Aufrisse der Punkte sofort zeichnen. Im Aufriß werden jene Teile der Schattenkurven oder Lichtgleichen sichtbar sein, die sich im dritten Riß auf der den auftreffenden Sehstrahlen P_2''' zugekehrten Seite von U''' befinden. Es müssen daher im dritten Riß noch Teile der Schattengrenzen oder Lichtgleichen konstruiert werden, die in diesem Riß unsichtbar sind.

Auf die Umrißermittlung der häufig auftretenden Kreisringfläche nach einer andern Methode kommen wir bei einer späteren Gelegenheit (II. Band) zurück.

Übungsaufgaben. Man zeichne Drehkörper, wie sie in der Technik auftreten (Säulenkapitäle und Säulenbasen, Baluster, Hängezapfen, Radabweiser, Ständer, Vasenformen u. dgl.), oder Teile solcher in möglichst großem Maßstabe im Aufriß, konstruiere die bei Parallelbeleuchtung an ihnen auftretenden Schatten oder Lichtgleichen und schattiere sie dementsprechend ab. Die Achse der Drehfläche wähle man gewöhnlich lotrecht oder parallel zur Kreuzrißebene und gegen die Aufrißebene unter einem Winkel von höchstens 30^0 geneigt. Zuweilen wird man auch die Drehachse normal zur Kreuzrißebene oder parallel zur Grundrißebene (mit einer Neigung gegen die Aufrißebene) wählen können, wenn sich nämlich der Drehkörper in der Wirklichkeit in derartigen Stellungen vorfindet.

132. Das einschalige Drehhyperboloid. In Nr. 115 (Fig. 228) haben wir die Konstruktion des Meridians einer durch Drehung einer beliebigen Kurve C erzeugten Fläche besprochen. Wählen wir jetzt C als eine die Drehachse A nicht schneidende und zu ihr nicht rechtwinkelige Gerade E, so läßt sich nachweisen, daß dann die Meridiankurve von zweiter Ordnung ist. Zu diesem Zweck haben wir zu untersuchen, wie oft irgend eine in der Meridianebene μ liegende Gerade G von E während einer Umdrehung um A getroffen wird. *Dies geschieht offenbar ebenso oft, als G bei der Drehung um A die Gerade E trifft.* Nun erzeugt G bei der Drehung um A einen Drehkegel, der E zweimal schneidet;

Hosted by Google

mithin wird E bei der Drehung um A auch die beliebig in μ gewählte Gerade G zweimal treffen oder *die Meridiankurve ist von zweiter Ordnung.* Um ihre Art zu bestimmen, müssen wir ihre unendlichfernen Punkte aufsuchen, d. h. nachsehen, wie oftmals bei der Drehung E parallel zu μ wird. Da eine zu E parallele und A schneidende Gerade bei der Drehung um A einen Kegel erzeugt, der mit μ zwei reelle getrennte Erzeugende gemeinsam hat, so wird es zwei verschiedene reelle zu μ parallele Lagen von E oder zwei reelle getrennte unendlichferne Punkte in der Meridiankurve M geben. Sie ist also eine *Hyperbel.* A, als Symmetrieachse von M, ist eine Achse der Hyperbel und zwar die imaginäre, da ja E auch während der Drehung A nie reell schneidet.

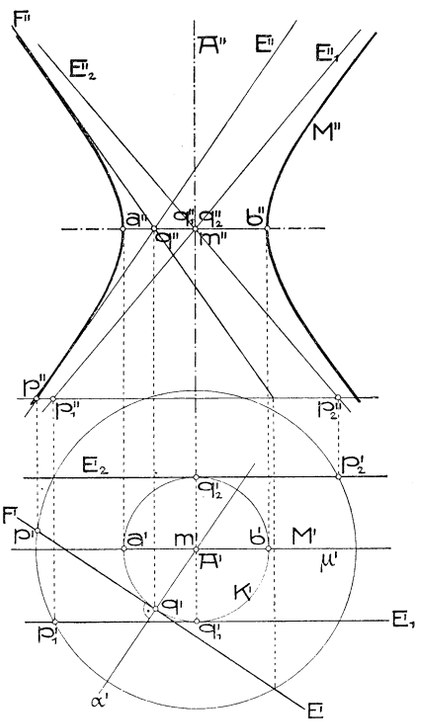


Fig. 258.

Zur Konstruktion dieser Meridianhyperbel M denken wir uns $A \perp \Pi_1$ und die Geraden A und E durch Grund- und Aufriß gegeben (Fig. 258). Das Gemeinlot zwischen A und E stellt sich im Grundriß in wirklicher Länge als der Abstand $\overline{A'E'}$ dar. Sein auf E gelegener Fußpunkt q hat also von A unter allen Punkten auf E die kleinste Entfernung. Gelangt q bei der Drehung nach μ, so liefert er daher die Scheitel a und b von M. Die Grundrisse der verschiedenen Lagen von E sind Tangenten des Kreises K' um A' durch q'. Die zu Π_2 parallelen Tangenten E_1', E_2' an K' sind also die Grundrisse der zu Π_2 parallelen Lagen E_1, E_2 von E. Ihre Aufrisse E_1'', E_2'' findet man, wenn man außer q noch einen andern auf E gewählten Punkt p in die erstprojizierenden Ebenen von E_1 bzw. E_2 hineindreht. Diese Aufrisse geben die Richtungen der unendlichfernen Punkte von M'' an, und da sie durch den Mittelpunkt m'' von $a''b''$, also auch der mit M kongruenten Hyperbel M'' gehen, sind sie schon deren Asymptoten. Durch die reelle Achse $a''b''$ und die Asymptoten ist aber M'' bestimmt und läßt sich punktweise konstruieren (Nr. 86). Da die durch Drehung einer Hyperbel um ihre imaginäre Achse entstehende Fläche *einschaliges* (oder *einmanteliges*) *Drehhyperboloid* heißt, so besteht der

Hosted by Google

Satz 1: *Durch Drehung einer Geraden E um eine zu ihr windschiefe Achse A entsteht ein einschaliges Drehhyperboloid*[1]*). Der auf A liegende Fußpunkt des Gemeinlotes zwischen E und A ist die Mitte, die Länge $\overline{EA}$ dieses Lotes die reelle Halbachse der Meridianhyperbel und deren Asymptoten sind gegen A unter dem Winkel $\widehat{EA}$ geneigt.*

Die durch Spiegelung an der Ebene $\alpha = [A|E']$ aus E hervorgehende Gerade F erzeugt bei ihrer Drehung um A eine Fläche, die das Spiegelbild der obigen in bezug auf α, d. h. mit dieser identisch ist.

In dem eingangs dieser Nummer ausgeschlossenen Fall, daß E rechtwinkelig gegen A sei, umhüllt E einen Kreis. Der außerhalb dieses Kreises liegende Teil seiner Ebene, doppelt überdeckt gedacht, ist als ausgeartetes einschaliges Drehhyperboloid aufzufassen. Seine Meridianhyperbel, deren Nebenachse die Länge Null hat, überdeckt die Gerade $[ab]$ außerhalb der Strecke ab doppelt.

Aus Satz 1 folgt auch leicht die Umkehrung, daß jedes einschalige Drehhyperboloid durch Drehung einer Geraden und zwar auf zwei Weisen erzeugt werden kann, und daraus der

Satz 2: *Durch jeden Punkt eines einschaligen Drehhyperboloids gehen zwei auf der Fläche liegende Gerade oder Erzeugende. Diese Erzeugenden zerfallen in zwei Scharen. Zwei Erzeugende derselben Schar (d. h. solche, die verschiedene Lagen entweder von E oder von F sind) schneiden sich nicht, hingegen schneidet jede Gerade der einen Schar sämtliche Geraden der andern Schar.*

Das Drehhyperboloid ist die einzige windschiefe Drehfläche.

Anmerkung. Betrachtet man in Fig. 154 (S. 183) die Hyperbel K als den Hauptmeridian eines einschaligen Drehhyperboloides, so wird dieses von der zur Hauptmeridianebene μ im Abstand $\mathfrak{a}$ parallelen Ebene im vordersten Punkt des Kehlkreises berührt, also nach zwei Erzeugenden geschnitten, deren Normalriß auf μ die Asymptoten U_1, U_2 von K sind. Der Parallelkreis irgend eines Punktes p von K schneidet diese Erzeugenden in zwei Punkten, die von der Hauptmeridianebene den Abstand $\mathfrak{a}$ haben und sich im Normalriß auf μ als die Punkte e_1, e_2 von U_1 bzw. U_2 abbilden. Ist nun die Meridianhyperbel K durch U_1, U_2 und p gegeben, so findet man umgekehrt $\mathfrak{a}$, wenn man den nach μ umgeklappten Parallelkreis durch p, d. i. $(n, \overline{np})$, etwa mit $[e_1\ np]$ schneidet; der Abstand eines dieser Schnittpunkte von $[np]$ ist der Halbmesser des Kehlkreises, also die reelle Halbachse $\mathfrak{a}$ von K. Damit ist ohne Rechnung die Konstruktion in Fig. 154 bewiesen.

1) Diesen Satz hat *Chr. Wren* 1669 ausgesprochen. *A. Parent* bewies ihn 1702 durch Rechnung, bei der schon Raumkoordinaten zur Verwendung kamen. Vgl. *M. Cantor*, Vorl. üb. Gesch. d. Math., III (2. Aufl. 1901), S. 418.

Hosted by Google

133. Ordnung der durch Drehung einer algebraischen Kurve erzeugten Fläche; Folgerungen daraus. Mit Hilfe des Satzes, daß durch Rotation einer Geraden um eine andre eine Fläche 2. Ordnung entsteht, können wir nun auch die Ordnung der Fläche Φ beurteilen, die eine beliebige algebraische Raumkurve n^{ter} Ordnung C bei der Drehung um eine beliebige Gerade A erzeugt. Die Ordnung von Φ ist nämlich gleich der Anzahl ihrer Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden G oder gleich der Zahl, die angibt, wie oft C bei der Drehung um A die Gerade G trifft. Dies geschieht aber ebenso oft, als G bei der Drehung um A die Kurve C trifft oder als die durch G erzeugte Drehfläche 2. Ordnung die Kurve C schneidet. Da diese Zahl (nach Nr. 71, Satz 5) $2n$ ist, so haben wir den

Satz 1: *Die durch Drehung einer (ebenen oder räumlichen) Kurve n^{ter} Ordnung um eine Achse allgemeiner Lage erzeugte Fläche besitzt die Ordnung $2n$.*

Diese Ordnung kann sich natürlich bei besondern Lagen der Achse gegenüber der Kurve vermindern.

Insbesondre erzeugt ein Kegelschnitt bei der Drehung um eine beliebige seiner Ebene angehörige oder nichtangehörige Achse eine Fläche 4. Ordnung.

Liegt A in der Ebene des erzeugenden Kegelschnittes C, so besteht die Meridiankurve aus C und ihrem Spiegelbilde C_1 bezüglich A. C und C_1 haben die beiden Schnittpunkte mit A gemeinsam, schneiden sich daher noch in zwei bezüglich A symmetrischen (reellen oder konjugiert imaginären) Punkten. Diese Punkte erzeugen bei der Drehung denselben Parallelkreis, längs dessen sich die Fläche selbst durchschneidet, der also eine *Doppelkurve* D der Fläche bildet. Berührt eine Ebene ε diese Fläche 4. Ordnung in zwei Punkten t_1, t_2, so hat ihre Schnittkurve 4. Ordnung t_1 und t_2 (Nr. 73, Satz 5), außerdem aber auch die Schnittpunkte mit D (die nicht auf $[t_1 t_2]$ liegen können) zu Doppelpunkten. Eine ebene Kurve 4. Ordnung mit solchen vier Doppelpunkten zerfällt aber in zwei Kurven 2. Ordnung (Nr. 61, Satz 4). Dies gibt den

Satz 2: *Eine Drehfläche, deren Meridian aus zwei bezüglich der Achse symmetrischen Kurven 2. Ordnung besteht, wird von jeder sie doppelt berührenden Ebene in zwei Kurven zweiter Ordnung geschnitten, die durch die Berührungspunkte der Ebene mit der Fläche gehen.*

Wird insbesondre C als Kreis gewählt, so haben C und C_1 außer den Schnittpunkten mit A die absoluten Punkte ihrer Ebene gemeinsam (Nr. 84, Satz 1). Der Doppelkreis D der durch C erzeugten *Wulstfläche* ist also der *absolute Kegelschnitt* (Nr. 109, Satz 2). Jeder ebene Schnitt dieser Fläche ist dann eine Kurve 4. Ordnung mit den absoluten Punkten ihrer Ebene als Doppelpunkten (eine sogenannte *zyklische Kurve 4. Ord-*

Hosted by Google

nung). Berührt die schneidende Ebene die Fläche in zwei Punkten, so zerfällt nach Satz 2 die Schnittkurve in zwei Kegelschnitte, und zwar, weil sie durch die absoluten Punkte gehen, in zwei *Kreise*. Damit ist auf andre Art der in Nr. 116 erwähnte Satz bewiesen.

Auch der dort (S. 279, vor Fußnote 1) angeführte allgemeinere Satz, daß jede die Wulstfläche Φ doppeltberührende Kugel sie in zwei Kreisen schneidet, folgt auf ähnliche Art. Denn die Schnittkurve ist in ihrer Gesamtheit von der 8. Ordnung. Nun geht die Kugel durch den absoluten Kegelschnitt D hindurch, schneidet also Φ zweimal in D (Kurve 4. Ordnung); der übrig bleibende Teil der Schnittkurve muß demnach eine Raumkurve 4. Ordnung sein. Da sie zwei Doppelpunkte in den Berührungspunkten der Kugel mit Φ besitzt, so zerfällt sie in zwei Kurven 2. Ordnung (Nr. 98), die, als Kurven auf einer Kugel, Kreise sein müssen.

134. Die Drehflächen zweiter Ordnung. Mittels der in Nr. 133 angewandten Schlußweise ergibt sich ferner der

Satz 1: *Durch Drehung eines Kegelschnittes M um eine seiner Achsen A entsteht eine Fläche zweiter Ordnung.*

Denn das durch Drehung einer beliebigen Geraden G des Raumes um A erzeugte Hyperboloid schneidet die Ebene μ von M in einer Hyperbel H, die gleichfalls A zur Achse hat. Die vier Schnittpunkte von M und H liegen dann paarweise bezüglich A symmetrisch. Jedes solche Paar symmetrischer Punkte erzeugt bei der Drehung denselben Parallelkreis; G wird daher nur von zwei Parallelkreisen der Drehfläche geschnitten oder die Drehfläche ist von der zweiten Ordnung.

Da jeder Parallelkreis dieser Fläche von zwei Punkten des Meridians also doppelt beschrieben wird, so muß die Drehfläche zweiter Ordnung doppelt überdeckt gedacht werden, ist mithin, in Übereinstimmung mit Satz 1 in Nr. 133, eine ausgeartete Fläche 4. Ordnung.

Jenachdem M eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist, nennt man die Drehfläche *Ellipsoid*, *Hyperboloid* oder *Paraboloid*. Ein Drehellipsoid (Rotationsellipsoid) heißt *verlängert* oder *eiförmig*, wenn als Drehachse die große Achse von M (Fig. 259 a), *verkürzt* oder *abgeplattet*, wenn als solche die kleine Achse von M (Fig. 259 b) gewählt wird. Die Kugel bildet einen Sonderfall des Ellipsoids. Ein Drehhyperboloid ist *einschalig* oder *einmantelig*, wenn die Drehachse mit der imaginären Achse von M (Fig. 259 c), *zweischalig* oder *zweimantelig*, wenn sie mit der reellen Achse von M (Fig. 259 d) zusammenfällt. Da die Parabel nur eine Achse im Endlichen hat, so gibt es nur ein Drehparaboloid[1]) (Fig. 259 e).

1) Die zweite Achse einer Parabel ist ihre unendlichferne Tangente (Nr. 87). Eine Drehung um eine unendlichferne Gerade ist identisch mit einer Parallelverschiebung; mithin müßte der parabolische Zylinder (Nr. 90, S. 196) als das zweite Drehparaboloid angesehen werden. Von diesem Gesichtspunkte aus be-

Hosted by Google

Die unendlichferne Ebene Ω wird von den Drehellipsoiden in imaginären, von den Drehhyperboloiden in reellen Kurven 2. Ordnung geschnitten. Bei einem Hyperboloid erfüllen die Asymptoten der Meridiane einen Drehkegel, der jene Fläche längs ihrer unendlichfernen Kurve berührt. Man nennt diesen Kegel den *Asymptotenkegel* der Fläche; er liegt innerhalb derselben beim einschaligen, außerhalb derselben beim zweischaligen Hyperboloid (vgl. Fig. 259 c, d); bei ersterer Fläche sind (nach Nr. 132, Satz 1) die Erzeugenden denen des Asymptotenkegels parallel. Das Paraboloid berührt die unendlichferne Ebene. Aus dem

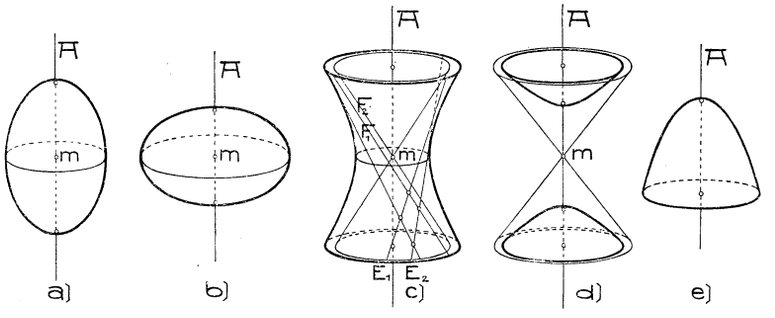


Fig. 259 a—e.

Gesagten folgt sofort, daß die Schnittkurve einer Ebene ε mit einem Ellipsoid stets eine Ellipse, die Schnittkurve mit einem Paraboloid eine Ellipse (ε nicht $\| A$) oder Parabel ($\varepsilon \| A$) und die Schnittkurve mit einem Hyperboloid eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, jenachdem die Parallelebene durch die Mitte m der Fläche den Asymptotenkegel nicht (reell) schneidet, berührt oder (reell) schneidet. Es sei noch ausdrücklich hervorgehoben, daß hierin die kreisförmigen Schnitte, als Sonderfälle von elliptischen, nicht eigens erwähnt wurden und auch im folgenden meist unerwähnt bleiben werden. Die ebenen Schnitte einer Drehfläche zweiter Ordnung können ähnlich wie die eines Drehkegels konstruiert werden (vgl. Nr. 91). Es gilt hier übrigens auch, wie ohne Beweis erwähnt sei, der Satz, daß jede der Fläche eingeschriebene und die schneidende Ebene berührende Kugel diese in den Brennpunkten der Schnittkurve berührt.

Fig. 260 zeigt eine einfache Anwendung auf das elliptische Gewölbe über dem rechteckigen Grundriß $abcd$. Das Gewölbe soll aus einem Teil eines Drehellipsoides bestehen, dessen Meridian durch die Punkte a, b, c, d geht, dessen Drehachse zur längeren Seite ab des Rechtecks parallel ist und dessen höchster Punkt s (Gewölbescheitel)

trachtet, sind alle Zylinder als Drehflächen mit unendlichferner Drehachse aufzufassen, die Normalschnitte als die Meridiane, die Erzeugenden als die Parallelkreise.

Hosted by Google

die gegebene Höhe $\mathfrak{h}$ über der als Π_1 betrachteten Kämpferebene $abcd$ hat. Trägt man vom Mittelpunkte s' des Rechtecks auf $[s' \| bc]$ die Strecke $\overline{s's_0} = \mathfrak{h}$ ab, so wird der Schnitt des Ellipsoides mit Π_1 eine Ellipse sein, die durch die kleine Halbachse $s's_0$ und etwa noch durch den Punkt b bestimmt ist. Schneidet der Kreis $(s', \mathfrak{h})$ die Gerade $[ab]$ in x, so geht durch $y = [s'x \cdot bc]$ der Kreis über der großen Achse (Umkehrung der Konstruktion in Nr. 75, c)). Macht man also $\overline{s'e} = \overline{s'f} = \overline{s'y}$, so ist ef die große Achse des Π_1 angehörigen Meridians.

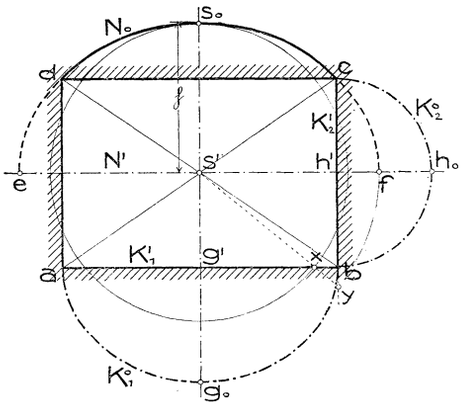


Fig. 260.

Der zu $[ab]$ parallele und zu Π_1 senkrechte Gewölbeschnitt N durch s fällt nach der Umklappung in Π_1 mit dem Bogen cd der eben gezeichneten Ellipse zusammen. Das Gewölbe schneidet die Stirnflächen durch $[ad]$ und $[bc]$ nach Halbkreisen (z. B. K_2^0), die Stirnflächen durch $[ab]$ und $[cd]$ nach halben Ellipsen, von denen die Umklappung K_1^0 einer solchen gezeichnet ist. Die Diagonalschnitte des Gewölbes sind halbe Ellipsen mit der Hauptachse $= \overline{ac}$ und der halben kleinen Achse $= \mathfrak{h}$.

Das einschalige Hyperboloid ist die einzige Drehfläche 2. Ordnung mit hyperbolischen Punkten; alle übrigen besitzen elliptische oder, wie Drehkegel und Drehzylinder, parabolische Punkte.

135. Die allgemeinen Flächen zweiter Ordnung. Aus einer Raumfigur $\mathfrak{R}$ soll eine andre $\mathfrak{R}^\times$ dadurch abgeleitet werden, daß man durch jeden Punkt p von $\mathfrak{R}$ parallel zu einer vorgegebenen Richtung eine Gerade zieht, sie mit einer festen Ebene α in a schneidet und nun auf $[ap]$ einen Punkt $p^\times$ so ermittelt, daß mit Berücksichtigung des Sinnes der Strecken $\overline{ap^\times} = \mathfrak{k} \cdot \overline{ap}$ ist, unter $\mathfrak{k}$ eine konstante Zahl verstanden. In jeder zur festen Richtung parallelen Ebene ε bilden die entsprechenden Punkte von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}^\times$ zwei perspektiv-affine Systeme mit $[\alpha\varepsilon]$ als Affinitätsachse (Nr. 38, Satz 1). Den Punkten einer Geraden von $\mathfrak{R}$ entsprechen mithin die Punkte einer Geraden von $\mathfrak{R}^\times$ und damit den Punkten einer beliebigen Ebene von $\mathfrak{R}$ die Punkte einer Ebene von $\mathfrak{R}^\times$ (vgl. Fußnote S. 8). Die Punkte von α und die Punkte der unendlichfernen Ebene entsprechen sich selbst. Man nennt diese Verwandtschaft zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}^\times$ eine *perspektive Affinität*, α die *Affinitätsebene* und die vorgegebene Richtung die *Richtung der Affinitätsstrahlen*. Durch eine solche Affinität wird eine

Hosted by Google

Fläche in eine von gleicher Ordnung und Klasse mit denselben unendlichfernen Elementen übergeführt *(transformiert)*.

Übt man auf eine Drehfläche 2. Ordnung eine solche affine Transformation aus, indem man eine Meridianebene μ als Affinitätsebene und die dazu senkrechte Richtung als die der Affinitätsstrahlen betrachtet, oder kürzer gesagt, ändert man die Abstände sämtlicher Punkte der Drehfläche von einer Meridianebene μ in demselben Verhältnis, so gelangt man zu einer *allgemeinen Fläche 2. Ordnung*. Die aus den obigen Arten von Drehflächen durch diese Transformation hervorgehenden allgemeinen Flächen heißen: *Dreiachsiges Ellipsoid, einschaliges und zweischaliges Hyperboloid, elliptisches Paraboloid.* Über deren Gestalt können dieselben Figuren 259 Aufschluß geben, wenn jetzt die zur Achse A senkrechten Schnitte ähnliche Ellipsen statt Kreise darstellen; Fig. 259a u. b stellen dann dieselbe Flächenart dar. Zufolge der Eigenschaft der affinen Transformation, daß jede Gerade in eine Gerade übergeht, besitzt das allgemeine einschalige Hyperboloid wieder zwei Scharen von Erzeugenden, für welche genau die beim einschaligen Drehhyperboloid erwähnten Eigenschaften gelten. Der Asymptotenkegel der Drehhyperboloide geht in den Asymptotenkegel der allgemeinen Hyperboloide über. Er ist jetzt ein allgemeiner Kegel 2. Ordnung; beim einschaligen Hyperboloid ist jede Erzeugende des Asymptotenkegels zu zwei Erzeugenden des Hyperboloides parallel.

Betrachten wir nun kurz die Flächen 2. Ordnung unabhängig von ihrer Entstehungsweise aus den Drehflächen 2. Ordnung. — Jede Tangentenebene einer Fläche 2. Ordnung Φ schneidet diese in einer Kurve 2. Ordnung mit einem Doppelpunkt im Berührungspunkt (Nr. 73, Satz 5), also in zwei geraden Linien (Nr. 61, Satz 7). Daraus folgt:

Satz 1: *Jede Fläche zweiter Ordnung besitzt zwei Scharen von geradlinigen Erzeugenden, die jedoch auf Flächen mit elliptischen Punkten imaginär sind und auf Flächen mit parabolischen Punkten (Kegel- und Zylinderflächen) in eine Schar zusammenfallen.*

Hat eine Fläche 2. Ordnung einen hyperbolischen Punkt p, so sind ihre sämtlichen Punkte hyperbolisch. Denn die Tangentenebene in p schneidet dann Φ nach einem reellen Geradenpaar E, F; sei nun q irgend ein andrer Punkt von Φ, so wird die Fläche von $[Eq]$ und $[Fq]$ nach Kurven 2. Ordnung geschnitten, von denen E bzw. F Teile sind, deren zweite Teile daher auch reelle gerade Linien durch q sein müssen. Durch q gehen also zwei reelle Erzeugende oder q ist ebenfalls ein hyperbolischer Punkt von Φ. Die Fläche ist dann von zwei Scharen (reeller) gerader Linien überdeckt, von denen keine zwei derselben Schar sich schneiden (es würden sonst in deren Ebene drei Erzeugende liegen), hingegen jede Gerade der einen Schar sämtliche Geraden der andern Schar schneidet. Wählt man drei Erzeu-

Hosted by Google

gende E_1, E_2, E_3 einer Schar (E) aus, so besteht die andre Schar (F) aus den E_1, E_2, E_3 schneidenden Geraden des Raumes. Die Flächen 2. Ordnung mit hyperbolischen Punkten sind also windschiefe Regelflächen (Nr. 72).

Umgekehrt läßt sich zeigen, *daß alle Geraden F, die drei windschiefe Gerade E_1, E_2, E_3 des Raumes schneiden, eine Fläche 2. Ordnung erfüllen.* Die Geraden F erhält man z. B. als Schnittlinien der Ebenenpaare, die sich aus E_2 und E_3 durch die Punkte von E_1 legen lassen. Diese Ebenenpaare schneiden nun auf einer beliebig gewählten Geraden G projektive Punktreihen aus. Irgend einem Punkt g von G, als Schnittpunkt mit einer Ebene durch E_2 aufgefaßt, entspricht nämlich der Schnittpunkt $g' = [g E_2 E_1 E_3 G]$ mit der zugeordneten Ebene durch E_3 ein-eindeutig. Nach Nr. 4, Satz 3 fällt dann zweimal ein Punkt g mit seinem entsprechenden g' zusammen. Das Zusammenfallen von g mit g' ist aber die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Gerade F die Gerade G schneidet. Mithin schneidet jede der Fläche Φ nicht angehörige Gerade G diese in zwei Punkten oder Φ ist von zweiter Ordnung.

Bei den windschiefen Regelflächen 2. Ordnung unterscheidet man zwei gestaltlich verschiedene Arten, jenachdem die Fläche die unendlichferne Ebene Ω schneidet oder berührt. Letzteres tritt dann und nur dann ein, wenn Ω zwei Flächenerzeugende E_u, F_u enthält oder, was dasselbe aussagt, wenn die Erzeugenden F und die Erzeugenden E zu je einer Ebene parallel sind. Wenn also drei windschiefe Gerade E_1, E_2, E_3 zu einer Ebene parallel sind, so hat die durch sie bestimmte Regelfläche 2. Ordnung mit Ω eine Erzeugende F_u, mithin noch eine Erzeugende E_u gemeinsam, und die Fläche berührt Ω. Man nennt diese Fläche zum Unterschied vom elliptischen Paraboloid ein *hyperbolisches Paraboloid*, weil ihre sämtlichen Punkte hyperbolisch sind (oder weil ihre ebenen Schnitte außer Parabeln nur Hyperbeln sein können). Diese Fläche 2. Ordnung war unter den oben aus den Drehflächen abgeleiteten nicht enthalten, weil die einzige Drehregelfläche das einschalige Hyperboloid ist. Fig. 261 zeigt einen Teil dieser sattelförmigen Fläche, begrenzt durch zwei Parabeln P_1, P_2 und eine Hyperbel H.

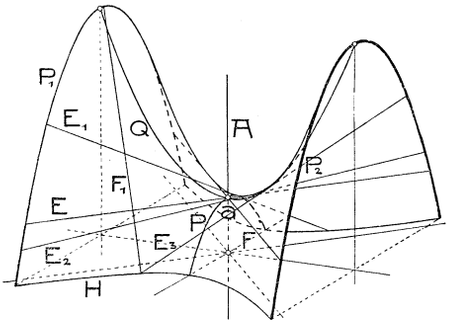


Fig. 261.

Wenn die Erzeugenden E_1, E_2, E_3 zu keiner Ebene parallel sind, so ist die durch sie bestimmte Regelfläche ein *einschaliges Hyperboloid* (Fig. 259 c).

Hosted by Google

Es gibt, von den Kegelflächen und Ebenenpaaren abgesehen, fünf Arten allgemeiner Flächen 2. Ordnung:

1. Dreiachsiges Ellipsoid,
2. Einschaliges } Hyperboloid,
3. Zweischaliges }
4. Hyperbolisches } Paraboloid.
5. Elliptisches }

Die Einteilung in Ellipsoide, Hyperboloide und Paraboloide bezieht sich auf das Verhalten der Fläche gegen die unendlichferne Ebene Ω, *ob nämlich die Fläche Ω nicht (reell) schneidet, (reell) schneidet* oder *berührt.* Die weitere Zweiteilung der Hyperboloide und Paraboloide bezieht sich darauf, ob sie Regelflächen oder Nichtregelflächen sind.

136. Einige Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung und Andeutungen über ihre konstruktive Behandlung. Umschreibt man einer Fläche 2. Ordnung Φ aus einem Punkte s einen Kegel (Fig. 262), so ist dieser von 2. Ordnung. Denn eine beliebige Ebene durch s schneidet Φ in einer Kurve 2. Ordnung, an die sich aus s zwei Tangenten legen lassen (Nr. 60, S. 121). Die Berührungskurve dieses Kegels mit Φ heiße S. Der Kegel sollte nun Φ in einer Kurve 4. Ordnung schneiden; da aber alle Punkte von S Doppelpunkte der Durchdringungskurve sind (Nr. 73, Satz 5), so ist S eine doppelt zu zählende Kurve 2. Ordnung. Wir haben demnach den

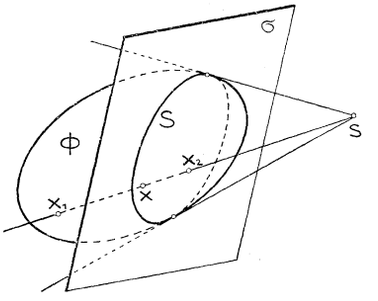


Fig. 262.

Satz 1: *Der einer Fläche 2. Ordnung Φ aus einem beliebigen Punkt umschriebene Kegel berührt Φ längs einer Kurve 2. Ordnung.*

Dies gilt insbesondre auch, wenn s unendlichferne liegt, sodaß *die Eigenschattengrenze einer Fläche 2. Ordnung für Zentral- oder Parallelbeleuchtung sowie ihr scheinbarer Umriß in einem Zentral- oder Parallelriß eine Kurve 2. Ordnung ist.*

Aus den Polareigenschaften der Kurven 2. Ordnung (Nr. 85) folgt, daß in jeder durch s gelegten, Φ schneidenden Ebene die zu s bezüglich Φ harmonisch konjugierten Punkte $x((sxx_1x_2) = -1)$ einer Geraden angehören. Da für je zwei Ebenen durch s die zugehörigen Geraden sich schneiden, so folgt (Fußnote S. 8)

Satz 2: *Die zu s bezüglich Φ harmonisch konjugierten Punkte erfüllen eine Ebene σ, die Polarebene von s bezüglich Φ.*

Hosted by Google

Zu einem reellen Punkt s gehört (Φ als reell vorausgesetzt) stets eine reelle Polarebene σ. S ist die Schnittkurve von σ mit Φ und kann reell oder imaginär sein; im ersten Fall liegt s außerhalb, im zweiten Fall innerhalb Φ. Gehört s der Fläche an, so ist σ ihre Tangentenebene in s.

Jede Ebene ist Polarebene eines Punktes, den man ihren *Pol* nennt.

Durch die Fläche Φ werden also die Punkte und Ebenen des Raumes (als Pol und Polarebene) auf ähnliche Weise einander eineindeutig zugeordnet wie durch eine Kurve 2. Ordnung die Punkte und Geraden ihrer Ebene (Nr. 85). Man nennt diese Zuordnung oder Verwandtschaft eine *Polarität* oder auch ein *Polarsystem* im Raume. Den Punkten einer Geraden entsprechen die Ebenen durch eine zweite Gerade, ihre *Polare*. Den Punkten einer Ebene σ entsprechen die Ebenen durch den Pol von σ. Geht eine Gerade durch den Pol einer Ebene, so sagt man, die Gerade und die Ebene sind *konjugiert*.

Der Pol der unendlichfernen Ebene Ω heißt der *Mittelpunkt* der Fläche. Für ein Paraboloid fällt er in den Berührungspunkt mit Ω, liegt also unendlichfern. Jede durch den Mittelpunkt gehende Gerade oder Ebene heißt ein *Durchmesser* bzw. eine *Durchmesserebene* der Fläche. Jedem Durchmesser gehört eine *konjugierte Durchmesserebene* zu, die Polarebene seines unendlichfernen Punktes. Sie ist der Ort der Mittelpunkte der zum Durchmesser parallelen Sehnen von Φ.

Steht ein Durchmesser auf der ihm konjugierten Durchmesserebene senkrecht, so heißt er eine *Hauptachse* oder kurz *Achse* der Fläche 2. Ordnung. Nähere Untersuchungen zeigen, *daß es für die Flächen mit endlichfernem Mittelpunkt* (Ellipsoide und Hyperboloide) *drei paarweise aufeinander senkrecht stehende Achsen gibt.* Jede ist zur Verbindungsebene der beiden andern konjugiert; mithin besitzen die allgemeinen Mittelpunktsflächen 2. Ordnung drei Symmetrieebenen, die *Hauptebenen.*

Für ein Paraboloid Φ sind wie für eine Parabel (Nr. 87) alle Durchmesser zueinander parallel. Jeder Durchmesser schneidet Φ in einem endlichfernen Punkt, dessen Tangentenebene zum Durchmesser konjugiert ist. Es gibt dann einen Durchmesser (im Endlichen), dessen konjugierte Tangentialebene auf ihm senkrecht steht, die *Achse des Paraboloides.* Durch sie gibt es dann zwei Symmetrieebenen der Fläche. Für das in Fig. 261 dargestellte hyperbolische Paraboloid ist A die Achse, a der *Scheitel;* die Symmetrieebenen durch A halbieren die Winkel der Scheitelerzeugenden E, F und schneiden die Fläche nach den Parabeln P und Q.

Sobald eine Rißebene zu einer Hauptebene der Fläche 2. Ordnung parallel ist, läßt sich der scheinbare Umriß der Fläche, als kongruenter Kegelschnitt mit dem in der parallelen Hauptebene liegenden *Haupt-*

Hosted by Google

schnitt unmittelbar zeichnen. Wählt man zwei zugeordnete Rißebenen parallel zu zwei Hauptebenen, dann sind auch unschwer die Grundaufgaben für die Flächen 2. Ordnung zu lösen. Handelt es sich um eine Mittelpunktsfläche oder um ein elliptisches Paraboloid, so kann man dabei die in Nr. 135 erwähnte Affinität zwischen der Fläche und einer Drehfläche 2. Ordnung benutzen.

Die *Regelflächen 2. Ordnung* gestatten auch ohne Kenntnis der Hauptschnitte eine ziemlich einfache konstruktive Behandlung. Seien drei Erzeugende E_1, E_2, E_3 einer solchen Fläche durch zwei zugeordnete Normalrisse gegeben, so findet man eine beliebige Erzeugende der zweiten Schar (F), wenn man etwa durch E_3 eine Ebene legt, deren Schnittpunkte mit E_1, E_2 aufsucht und diese Punkte verbindet. Aus drei so gefundenen Erzeugenden F_1, F_2, F_3 findet man auf gleiche Weise beliebige weitere Erzeugende der Schar (E). Durch jeden Punkt t von E_3 geht eine Erzeugende der Schar (F); diese Erzeugende enthält jeden der Punkte $[tE_i \cdot E_j]$, wo E_i und E_j irgend zwei Erzeugende der Schar (E) bezeichnen. Insbesondre gibt es zu jeder Erzeugenden der Schar (E) eine parallele Erzeugende der Schar (F).

Die Aufrisse aller Erzeugenden umhüllen (zufolge Nr. 92, Satz 2) den zweiten scheinbaren Umriß der Fläche, der (nach Satz 1 eine Kurve 2. Ordnung, mithin auch) eine Kurve 2. Klasse ist. Steht eine Erzeugende E zu Π_2 senkrecht, so gilt dasselbe von einer Erzeugenden F und der zweite scheinbare Umriß der Fläche besteht aus den Strahlbüscheln mit den Scheiteln E'', F''. Die Kurve 2. Klasse artet in ein Punktepaar aus (Nr. 60, 2. Abs. nach Satz 2).

Die Tangentenebene der Fläche in einem gegebenen Punkt ist die Verbindungsebene der beiden auf die oben angeführte Weise konstruierbaren Erzeugenden durch diesen Punkt. Soll umgekehrt zu einer Ebene τ durch eine Erzeugende, etwa E_3, der Berührungspunkt ermittelt werden, so suche man die Schnittpunkte $[\tau E_1]$ und $[\tau E_2]$; ihre Verbindungslinie, als die zweite τ angehörende Erzeugende, schneidet E_3 im gesuchten Berührungspunkt.

Damit lassen sich bei gegebener Lichtrichtung *Punkte der Eigenschattengrenze* finden. Um den einer Erzeugenden E angehörigen Punkt der Eigenschattengrenze zu erhalten, hat man bloß durch E die zur Lichtrichtung parallele Ebene zu legen und ihren Berührungspunkt mit der Fläche aufzusuchen. Führt man dies für mehrere Erzeugende durch, so gelangt man nach Satz 1 zu Punkten einer Kurve 2. Ordnung.

Hosted by Google

VII. Kapitel.

Schraubenflächen.

137. Erzeugung der Schraubenflächen; Eigenschaften und Benennungen. Die aus einer gleichförmigen Drehung um eine Gerade A und einer gleichförmigen Schiebung parallel zu A zusammengesetzte Bewegung des ganzen Raumes heißt eine *Schraubenbewegung* oder *Schraubung*. Eine solche Bewegung ist bestimmt durch die *Achse* A, den *Parameter* oder die *Steigung* $\mathfrak{k} = \frac{\mathfrak{z}}{\varphi}$, d. i. durch das konstante Verhältnis der Schiebungsgröße $\mathfrak{z}$ zum Dreh- oder Schraubwinkel φ (im Bogenmaß), und durch ihren *Sinn* (rechtsgängig oder linksgängig; Nr. 105). Die zu einer ganzen Umdrehung $\varphi = 2\pi$ gehörige Schiebung $\mathfrak{h}$ heißt die *Ganghöhe* der Schraubung. $\mathfrak{k}$ gibt die zur Drehung um $\varphi = 1$ gehörige Schiebung an und wird dann die *reduzierte Ganghöhe* genannt.

Sämtliche Punkte des Raumes beschreiben bei dieser Bewegung gleichsinnige Schraubenlinien mit der Achse A und der Ganghöhe $\mathfrak{h}$. Hat p von A die Entfernung $\mathfrak{r}$, so ist die Steigung der von p beschriebenen Schraubenlinie $\frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{r}}$ (Nr. 105, Gl. (d)), nimmt also mit wachsendem $\mathfrak{r}$ ab. A ist eine Schraubenlinie mit unendlich großer Steigung, entsprechend der Tatsache, daß bei der Schraubung A in sich selbst verschoben wird. Für $\mathfrak{k} = 0$ artet die Schraubung in eine Drehung, für $\mathfrak{k} = \infty$ in eine Schiebung $\parallel A$ aus.

Die durch Schraubung einer beliebigen Kurve C (der *Erzeugenden*) erzeugte Fläche Φ heißt eine *Schraubenfläche*. Die Punkte von C beschreiben auf Φ koachsiale Schraubenlinien gleicher Ganghöhe; diese sollen im folgenden als die *Bahnschraubenlinien* von Φ bezeichnet werden[1]). Durch diese Schraubung wird Φ in sich selbst verschoben, ähnlich wie eine Drehfläche bei der Drehung um ihre Achse oder eine Zylinderfläche bei der Schiebung in der Richtung der Erzeugenden. Die Schraubenflächen stellen eine Verallgemeinerung der Drehflächen dar und haben mit diesen manche Eigenschaften gemeinsam. Den Parallelkreisen der Drehflächen sind die Bahnschraubenlinien der Schraubenflächen analog; durch jeden Punkt von Φ geht nur eine Bahnschraubenlinie. Aus der Verschiebbarkeit der Schraubenfläche in sich folgt, daß sie durch Schraubung irgend einer auf ihr gezogenen Kurve erhalten werden kann, wenn diese sämtliche Bahnschraubenlinien der Fläche reell schneidet; ferner daß die Schnitte

1) Es gibt selbstverständlich auch Schraubenflächen, auf denen außer diesen Schraubenlinien noch andre existieren; man braucht ja z. B. nur C selbst als Schraubenlinie zu wählen.

Hosted by Google

mit Ebenen durch die Achse A *(Meridiane)* und mit Ebenen senkrecht zu A *(Normalschnitte)* untereinander kongruent sind. Da jede Meridianebene unendlich oft mit sich zur Deckung kommt, so ist der Meridian einer Schraubenfläche eine periodische (d. h. aus unendlich vielen kongruenten Zweigen bestehende) Kurve. Häufig erweist es sich als vorteilhaft, den Meridian oder den Normalschnitt einer Schraubenfläche als ihre Erzeugende zu betrachten.

Eine Schraubenfläche läßt sich auffassen: a) als Ort der verschraubten Erzeugenden C, b) als Ort koachsialer, gleichsinniger Schraubenlinien von gleicher Ganghöhe, die eine gegebene Kurve C schneiden. Die letztere Auffassung wollen wir, in Analogie mit den Drehflächen, im folgenden bevorzugen.

Eine Schraubenfläche heißt *geschlossen* oder *offen*, jenachdem die Achse der Fläche angehört oder nicht oder, was dasselbe aussagt, jenachdem die Erzeugende C die Achse trifft oder nicht. In letzterem Fall gibt es auf C Punkte, deren Entfernungen von A Minima sind. Die Bahnschraubenlinien dieser Punkte heißen *Kehlschraubenlinien*. Ferner werden die Bahnschraubenlinien solcher Punkte auf C, die von A eine Maximalentfernung haben, zuweilen *Äquatorschraubenlinien* genannt.

Ist die Erzeugende geradlinig, so heißt die Fläche *Regelschraubenfläche*. Jenachdem die erzeugende Gerade gegen die Achse recht- oder schiefwinkelig geneigt ist, heißt diese Fläche *gerade* oder *schief*. Man unterscheidet demnach vier Arten von Regelschraubenflächen:

a) *geschlossene gerade*, b) *offene gerade*, c) *geschlossene schiefe*, d) *offene schiefe*.

Diese Flächen sind im allgemeinen windschief (Nr. 72); unter d) befinden sich aber auch die in Nr. 105 behandelten abwickelbaren Schraubenflächen.

138. Darstellung der allgemeinen Schraubenfläche; Lösung einiger Grundaufgaben[1]). Zur Bestimmung einer Schraubenfläche soll

1) Die allgemeinen Schraubenflächen sind verhältnißmäßig wenig in konstruktiver Hinsicht bearbeitet worden. Die ersten Andeutungen darüber finden sich bei *J. N. P. Hachette*, Traité de géom. descr., 2e éd., Paris 1828, note II, p. 289. Allgemeine Methoden zu ihrer konstruktiven Behandlung gab *J. de la Gournerie*, Traité de géom. descr., 3e partie, Paris 1864, p. 169—179, an und schloß daran einige analytische Untersuchungen. Wertvolle Ergebnisse lieferte die inhaltsreiche Abhandlung von *L. Burmester*, „Kinematisch-geometrische Konstruktionen der Parallelprojektion der Schraubenflächen und insbesondere des Schattens derselben", Z. Math. Phys. 18 (1873), S. 185—202, der schon in dem Werke „Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmäßig gestalteter Flächen", Leipzig 1871 (2. Aufl. 1875), I. T., 4. Kap. und II. T., 4. Kap., eine auf rechnerischer Grundlage aufgebaute Beleuchtungslehre der allgemeinen Schraubenflächen vorausgegangen war. Ferner sei noch auf *K. Pohlke*, Darst. Geometrie, II. Abt., Berlin

Hosted by Google

die Achse A, die wir im folgenden stets $\perp \Pi_1$ annehmen wollen, die erzeugende Kurve C, die Ganghöhe $\mathfrak{h}$ (oder die reduzierte Ganghöhe $\mathfrak{k}$) und der Schraubungssinn gegeben sein. Die Grundrisse der Bahnschraubenlinien auf Φ sind dann konzentrische Kreise um $A' = [A\,\Pi_1]$. Denken wir uns auf jeder Schraubenlinie P den Bewegungssinn nach abwärts (die *Fallrichtung*) durch einen Pfeil angegeben, so wird auch der Grundriß P' einen Durchlaufungssinn (eine *Orientierung*) erhalten und zwar, von A' aus beurteilt, rechtsum oder linksum, jenachdem P rechts- oder linksgängig ist (Nr. 105). Der auf diese Weise in der Ebene Π_1 festgelegte Drehsinn soll in der Folge ihr *positiver Drehsinn* heißen. Aus dem so orientierten Grundriß einer Schraubenlinie kann sofort auf deren Sinn geschlossen werden. Wir wollen uns auch jede Tangente T von P, ja auch andre Gerade, im Sinn ihres Falles, also nach abwärts, durchlaufen und dementsprechend ihre Grundrisse orientiert denken. Der Sinn von T' stimmt dann im Berührungspunkt p' (Fig. 263) mit dem von P' überein.

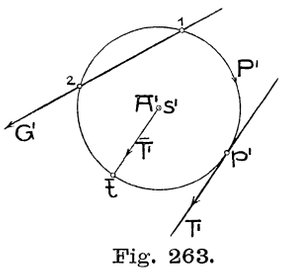


Fig. 263.

Auf einen Vorteil dieser Orientierung möge sofort hingewiesen werden. Wählen wir auf A einen oberhalb Π_1 gelegenen Punkt s im Abstande $\mathfrak{k}$ von Π_1 ($\overline{A's} = \mathfrak{k}$), so liegt der erste Spurpunkt $\bar{t}$ einer durch s parallel zur Tangente T gelegten Geraden $\bar{T}$ auf P' (vgl. Nr. 105). Achtet man auf die Orientierung von P', so läßt sich $\bar{t}$ mittels des Grundrisses allein eindeutig finden; man hat bloß den durch $s' = A'$ gleichsinnig parallel mit T' gezogenen Halbstrahl $\bar{T}'$ mit P' zum Schnitt zu bringen. Umgekehrt findet man zu $\bar{t}$ eindeutig T' und damit den Berührungspunkt p', da es zur orientierten Geraden $[s'\bar{t}]$ nur eine gleichsinnig parallele Tangente an einen orientierten Kreis P' gibt. Man hat also den

Satz 1: *Die Punkte des Kreises P', diesen als Basis des durch s gelegten Richtkegels der Tangentenfläche der Schraubenlinie P betrachtet, sind hierdurch ein-eindeutig zugeordnet den orientierten Tangenten von P', diese als Grundrisse von Tangenten an P betrachtet.*

1876, 9. Kap., *W. Fiedler,* Darst. Geometrie, II. T., 3. Aufl., Leipzig 1885, S. 455 f., die Aufsätze von *J. Sobotka,* Stzgsb. Ak. (math. nat.) Wien 101 (1892), S. 899 f., 102 (1893), S. 1204 f., Monatsh. Math. Phys. 4 (1893), S. 59—63, sowie *Rohn-Papperitz,* Lehrb. d. darst. Geom., I. B., 3. Aufl., Leipzig 1906, Nr. 449—456 verwiesen.

Zahlreicher sind die Arbeiten über Regelschraubenflächen, deren auch jedes Lehrbuch der darstellenden Geometrie gedenkt. Am ausführlichsten bespricht sie wohl *J. de la Gournerie* in dem oben angeführten Werke, nachdem er vorher in dem „Mémoire sur les lignes d'ombre et de perspective des héliçoïdes gauches", J. Éc. Polyt. Cah. 34 (1851), die Formen der Eigenschattengrenze und des Umrisses an diesen Flächen auf rechnerischem Wege untersucht hatte.

Hosted by Google

Ferner sei noch erwähnt, daß für die zwei Schnittpunkte einer orientierten Geraden G' mit einem Kreise eine dem Sinn von G' entsprechende Reihenfolge festgelegt ist, wodurch einer als erster, der andre als zweiter Schnittpunkt bezeichnet werden kann (Fig. 263).

Wir nehmen nun an, C sei durch Auf- und Grundriß gegeben. Nach Nr. 105 lassen sich die durch beliebige Punkte von C gehenden Bahnschraubenlinien der Fläche Φ zeichnen. Den Schnitt von Φ mit einer beliebigen Ebene ε erhielte man durch Aufsuchung der Schnittpunkte einer Anzahl solcher Schraubenlinien mit ε (nach Nr. 70). Damit wären auch die Schnittpunkte einer Geraden mit Φ konstruierbar und insbesondre die Aufgabe lösbar, zu dem einen Riß eines Φ angehörigen Punktes den andern zu finden. Diese Konstruktionen lassen aber bedeutende Vereinfachungen zu.

Es handelt sich bei ihnen beständig um eine rasche Lösung der folgenden

Aufgabe 1: *In der Φ erzeugenden Schraubung zu einem gegebenen Drehwinkel φ die zugehörige Verschiebung ζ oder umgekehrt zur Verschiebung ζ den Drehwinkel φ zu finden.*

Die Lösung dieser Aufgabe ist gegeben, sobald man eine durch diese Schraubung erzeugte Schraubenlinie P_0 im Grund- und Aufriß gezeichnet hat (Fig. 264). Legt man nämlich den gegebenen Winkel φ so in Π_1, daß sein Scheitel sich mit A' deckt, und schneiden nun seine Schenkel P_0' in p_0' und q_0', so ist ζ der aus dem Aufriß entnehmbare Unterschied der ersten Tafelabstände der Punkte p_0, q_0 auf P_0. Zu p_0' und q_0' gehören zwar unendlich viele Punkte p_0'' und q_0'' auf P_0'', deren zugehörige ζ sich um ganze Vielfache von $\mathfrak{h}$ unterscheiden; zu einem Winkel $\varphi < 2\pi$ gehört aber nur ein $\zeta < \mathfrak{h}$. Ist umgekehrt ζ gegeben, so wähle man auf P_0'' zwei Punkte von diesem Höhenunterschiede und suche dazu die Grundrisse; ihre Verbindungslinien mit A' schließen dann den Winkel φ ein, der noch um sovielmal 2π vermehrt werden muß, als ζ Vielfache von $\mathfrak{h}$ enthält. Soll jetzt die

Aufgabe 2: *Aus dem gegebenen Grundriß p' eines Punktes p einer Schraubenfläche den Aufriß p'' zu finden*

gelöst werden, so denke man sich durch p die Bahnschraubenlinie P von Φ gezogen, die C in einem Punkte q schneiden wird. Als q' (Fig. 264) kann irgend einer der Schnittpunkte von C' mit dem um A' geschlagenen Kreis P' durch p' angesehen werden und q'' auf C'' ist dadurch bestimmt (Nr. 69). p geht nun aus q durch die Schraubung um den Winkel $\varphi = \overset{\frown}{q'A'p'}$ hervor, dessen Sinn beachtet werden muß. Sucht man also mittels der Schraubenlinie P_0 das zugehörige ζ, so liegt p'' in der Ordnungslinie durch p' um die Strecke ζ unter- oder oberhalb q'', jenachdem der Sinn von φ mit dem von P_0' über-

Hosted by Google

einstimmt oder nicht. Den unendlich vielen Werten von z entsprechen unendlich viele, um h voneinander entfernte Punkte p''.

Durch wiederholte Anwendung dieser Konstruktion läßt sich der zu Π_2 parallele, im Aufriß also in wahrer Gestalt erscheinende Meridianschnitt der Fläche *(Hauptmeridian)* sofort zeichnen, da ja sein Grundriß die durch A' parallel X_{12} gelegte Gerade ist.

Zum *Schnitt N von Φ mit Π_1* gelangt man, wenn man jeden Punkt von C seinem ersten Tafelabstand entsprechend verschraubt und zwar nach ab- oder aufwärts, jenachdem der Punkt sich ober- oder unterhalb Π_1 befindet. Fig. 264 zeigt die Ausführung für den Punkt a von C, der durch die Verschraubung in a_1 übergeht. Die Ergänzung zu 2π des $\overline{X_{12}a''}$ entsprechenden Drehwinkels ist mit einem doppeltgezeichneten Bogen versehen.

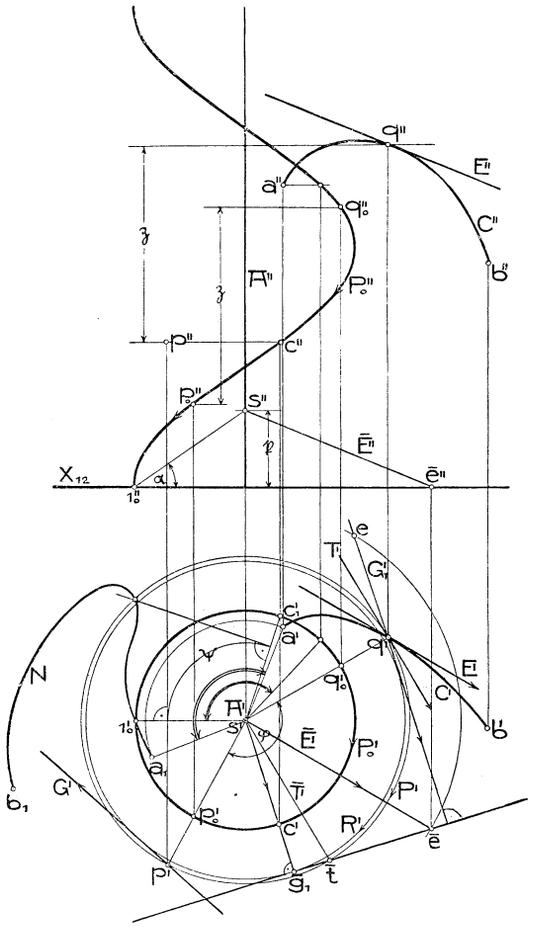


Fig. 264.

Mit Hilfe von N kann jetzt auch die

Aufgabe 3: *Zum Aufriß p'' eines Punktes von Φ den Grundriß p' zu suchen*

gelöst werden. Würde nämlich N dem Abstande $\overline{X_{12}p''} = \overline{\Pi_1 p}$ entsprechend nach aufwärts verschraubt (p oberhalb Π_1 befindlich angenommen) und hieße die neue Lage N_1, so müßte p' einer der Schnittpunkte von N_1' mit der Ordnungslinie durch p'' sein. N_1' geht aber aus N durch eine negative Drehung um A' um den der Strecke $\overline{X_{12}p''}$ entsprechenden Schraubwinkel ψ hervor. Dreht man wieder um diesen Winkel zurück, so geht N_1' in N über und p' in einen der Schnittpunkte von N mit der um den Winkel ψ gedrehten Ordnungslinie durch p'' (diese als Π_1 angehörig aufgefaßt). Es ergibt sich also folgende Konstruktion für p':

Hosted by Google

Die Ordnungslinie durch p'' wird um A' um den dem Abstande $\overline{X_{12}p''}$ entsprechenden Schraubwinkel im Sinne von P_0' gedreht und mit N geschnitten; die um denselben Winkel zurückgedrehten Schnittpunkte sind die Punkte p'.

Schneidet P_0 die Ebene Π_1 in 1_0 und zieht man durch den mit p'' gleichhohen Punkt c'' von P_0'' die Ordnungslinie, so trifft sie P_0' in dem Grundriß c' des auf P_0 liegenden Punktes c und es ist $\widehat{c'A'1_0'} = \psi$. Gehört $1_0'$, wie in Fig. 264, der Geraden $[A' \| X_{12}]$ an, so liegt der zweite Schnittpunkt c_1' der Ordnungslinie durch c'' und des Kreises P_0' schon derart, daß $\widehat{1_0'A'c_1'} = \psi$ ist, also das Abtragen von ψ erspart wird.

Unter Verwendung von N lassen sich Punkte der *Schnittkurve einer Ebene ε mit Φ* auf folgende Art ermitteln. Man wählt in ε irgend eine erste Hauptlinie, verschraubt diese nach Π_1 und die Schnittpunkte mit N wieder um denselben Winkel zurück.

Zur Ausführung der letzten Konstruktion ließe sich statt N auch der Hauptmeridian verwenden.

139. Konstruktion von Tangentenebenen an eine allgemeine Schraubenfläche und die dieser längs Bahnschraubenlinien umschriebenen abwickelbaren Flächen. Die Tangentenebene an Φ in einem Punkte q von C (Fig. 264) ist durch die Tangente E an C und die Tangente T an die Bahnschraubenlinie P durch q bestimmt. Um die *Tangentenebene in irgend einem Flächenpunkte p* zu erhalten, schraubt man p in C hinein, etwa nach q, legt hier die Tangentenebene und schraubt diese um denselben Winkel wieder zurück. Dabei ist die Verwendung der ersten Fallinien der Tangentenebenen von Vorteil. Wir legen durch den schon vorhin erwähnten Punkt s auf A die Geraden $\overline{E} \| E$ und $\overline{T} \| T$ und suchen ihre ersten Spurpunkte $\overline{e} = [\overline{E}\,\Pi_1]$ und $\overline{t} = [\overline{T}\,\Pi_1]$, wobei letzterer auf P' liegt und mittels des Grundrisses allein gezeichnet werden kann. Das aus s auf $[\overline{e}\,\overline{t}]$ gefällte Lot $[s\overline{g}_1]$ ist zur ersten Fallinie G_1 der Tangentenebene in q parallel; sein orientierter Grundriß ist der Halbstrahl $[s'\overline{g}_1]$. Die Schraubung, welche q in p überführt, führt auch G_1 in die Fallinie G der Tangentenebene in p über; G' geht daher aus G_1' durch die Drehung $(A', \widehat{q'A'p'})$ hervor, bei der also A' das Drehzentrum und $\widehat{q'A'p'}$ der Drehwinkel ist. Zeichnet man den G_1' berührenden orientierten Kreis R' um A', *so ist G' jene der beiden aus p' an R' legbaren Tangenten*, die aus G_1' durch eine Drehung um A' hervorgehen kann, oder *von der p' erster oder zweiter Schnittpunkt mit P' ist, jenachdem q' als erster oder zweiter Schnittpunkt von G_1' mit P' auftritt.* G' kann auch ohne Benutzung des Kreises R' erhalten werden, wenn man beachtet, daß die durch P' auf G_1' und G' abgeschnittenen Sehnen gleich lang sein

Hosted by Google

müssen. Da G dieselbe Horizontalneigung wie G_1 oder $[s\bar{g}_1]$ besitzt, so läßt sich ihr Aufriß auf verschiedene Arten zeichnen.

Die Tangentenebenen an Φ in den Punkten einer Bahnschraubenlinie P umhüllen, da sie durch Schraubung auseinander hervorgehen, eine Φ längs P berührende Böschungsfläche (Nr. 106); ihre Erzeugenden sind (nach Nr. 106, Satz 2) die Fallinien der Tangentenebenen, gehen also durch Schraubung aus G_1 hervor. Daraus folgt

Satz 1: *Die einer allgemeinen Schraubenfläche Φ längs einer Bahnschraubenlinie umschriebene abwickelbare Fläche ist eine (abwickelbare) Schraubenfläche, deren Erzeugende die ersten Fallinien der Tangentenebenen an Φ in den Punkten jener Schraubenlinie sind.*

Die Gratlinie R der längs P umschriebenen Fläche stellt sich im Grundriß als der Kreis R' dar. Da G_1 Tangente der Schraubenlinie R ist, welche gleichfalls die reduzierte Ganghöhe $\mathfrak{k}$ hat, so liegt $\bar{g}_1$ auf R'. Dieser mit P_0' gleichsinnige Kreis ist also durch $\bar{g}_1$ bestimmt und berührt $[\bar{t}\,\bar{e}]$.

Nun geht (vgl. Fig. 264) G_1' aus $[\bar{t}\,\bar{e}]$ durch die Drehung $(s', -90^0)$ hervor. Diese Drehung führt $\bar{t}$ in q' und $\bar{e}$ in einen Punkt e von G_1' über, sodaß $G_1' = [eq']$ ist. Um uns kürzer ausdrücken zu können, wollen wir e als den E in Π_1 *zugeordneten Punkt*[1]) bezeichnen. *Man erhält also zu einer beliebigen Geraden E des Raumes den zugeordneten Punkt e in Π_1, wenn man durch s die Parallele $\bar{E}$ zu E legt und auf ihren ersten Spurpunkt $\bar{e}$ die Drehung $(s', -90^0)$ ausübt.* Parallelen Geraden des Raumes ist in Π_1 derselbe Punkt zugeordnet. Obiges Ergebnis läßt sich dann folgendermaßen aussprechen:

Satz 2: *Der Grundriß G_1' der steilsten Tangente der Schraubenfläche in einem Punkte q geht durch den der Tangente E an die erzeugende Kurve C in Π_1 zugeordneten Punkt e*[2]).

Aus Nr. 120, Satz 3 folgt ferner:

Satz 3: *In jedem Punkt einer Schraubenfläche (mit lotrechter Achse) sind die Tangente an die hindurchgehende Bahnschraubenlinie und die Fallinie der Tangentenebene (steilste Tangente) konjugierte Tangenten der Fläche.*

140. Konstruktion der Eigenschattengrenze und des Umrisses einer allgemeinen Schraubenfläche. Die der Schraubenfläche Φ längs einer Bahnschraubenlinie P umschriebene abwickelbare Fläche ψ ist das

1) *Rohn-Papperitz*, Lehrb. d. darst. Geometrie, 3. Aufl. (Leipzig 1906) I. Bd., S. 403 nennen e den *Pol* von E bezüglich der Schraubung.

2) Weil C als eine beliebig durch q auf der Fläche gezogene Kurve angesehen werden kann, ist G_1' der Ort der den Flächentangenten des Punktes q in Π_1 zugeordneten Punkte.

Hosted by Google

Analogon zu dem einer Drehfläche längs eines Parallelkreises umschriebenen Kegel und kann zur Konstruktion der Eigenschattengrenze in ähnlicher Weise verwendet werden. Man ermittelt nämlich nach Nr. 105, S. 245 die für einen Schraubengang aus zwei Erzeugenden F_1 und F_2 bestehende Eigenschattengrenze von ψ; ihre Schnittpunkte mit P sind dann die beiden auf diesem Gange befindlichen Punkte f_1, f_2 der Eigenschattengrenze F von Φ. Die Konstruktion kann im Grundriß allein durchgeführt werden, sobald man den Schlagschatten s_s von s auf Π_1 und (nach Nr. 139) den Grundriß R' der Gratlinie von ψ konstruiert hat (Fig. 265). Da R' die Basis des durch s gelegten Richtkegels von ψ ist, so bilden die Erzeugenden $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ nach den Berührungspunkten $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ der aus s_s an R' gelegten Tangenten die Eigenschattengrenze des Richtkegels und die hierzu parallelen Tangenten F_1, F_2 an R, deren Grundrisse F_1', F_2', als orientierte Tangenten an den orientierten Kreis R', eindeutig bestimmt sind, die Eigenschattengrenze von ψ. Eine kleine Schwierigkeit tritt nur dadurch auf, daß von den zwei Schnittpunkten etwa der Geraden F_1' mit dem Kreis P' bloß einer Grundriß des Schnittpunktes f_1 von F_1 mit P sein kann. Diese Schwierigkeit wird durch die in Nr. 139 gemachte Bemerkung behoben, daß f_1' erster oder zweiter Schnittpunkt von F_1' mit P' ist, jenachdem der C' angehörige Punkt q' von P' erster oder zweiter Schnittpunkt von G_1' (G_1 Fallinie der Tangentenebene an Φ in q) mit P' ist.

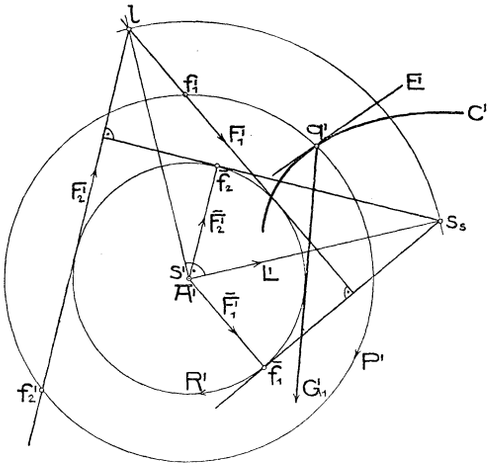


Fig. 265.

Diese Konstruktion gestattet noch eine Vereinfachung. Die Drehung $(s', -90^0)$ führt die aus s_s an R' gelegten orientierten Tangenten in die Geraden F_1', F_2', den Punkt s_s also in den Schnittpunkt $[F_1'F_2']$ über, der mithin identisch ist mit dem der Lichtrichtung L in Π_1 zugeordneten Punkt l. Die Eigenschattengrenze der Fläche ψ besteht daher aus jenen Erzeugenden, deren Grundrisse durch l gehen.

Dies zusammenfassend hat man

Satz 1: *Um die einer beliebigen Bahnschraubenlinie P von Φ angehörigen Punkte der Eigenschattengrenze im Grundriß zu erhalten, kon-*

struiere man für den Schnittpunkt q von P mit C den Grundriß G_1' der steilsten Flächentangente und drehe diesen um A' bis er durch den (der Lichtrichtung in Π_1 zugeordneten) Punkt l geht. Die zwei gedrehten Lagen von q' sind dann die gesuchten Punkte f_1', f_2'.[1])

Durch Ausführung dieser Konstruktion für eine hinreichende Zahl von Schraubenlinien und stetiges Verbinden der erhaltenen Punkte ergibt sich der Grundriß der Eigenschattengrenze F; nach Nr. 138 lassen sich zu den gefundenen Punkten von F' auch die Aufrisse ermitteln und damit F'' zeichnen.

Aus obiger Betrachtung ergibt sich auch

Satz 2: *Die Eigenschattengrenze einer Schraubenfläche Φ ist der Ort aller Punkte, für welche die steilsten Tangenten die Gerade $[l \| A]$ schneiden (oder: für welche die Grundrisse der steilsten Tangenten durch l gehen).*

Kennt man den Normalschnitt der Schraubenfläche, so kann man zur Konstruktion ihrer Eigenschattengrenze auch den aus Satz 2 unmittelbar hervorgehenden Satz benutzen:

Satz 3[2])***:*** *Alle Punkte eines Normalschnittes, deren Normalen die Gerade $[l \| A]$ schneiden, gehören der Eigenschattengrenze der Schraubenfläche an.*

Das über die Eigenschattengrenze Gesagte gilt sinngemäß auch für den wirklichen Umriß einer Schraubenfläche Φ. Wählt man ($A \perp \Pi_1$ vorausgesetzt) die Lichtrichtung insbesondre senkrecht zur Aufrißebene, so ist die zugehörige Eigenschattengrenze U_2 von Φ ihr wahrer zweiter Umriß. l ist in diesem Fall der unendlichferne Punkt von X_{12}; konstruiert man damit U_2' und sucht dazu U_2'', so bildet diese Kurve den zweiten scheinbaren Umriß der Fläche. Der wahre erste Umriß U_1 besteht aus den Kehl- und Äquatorschraubenlinien; der erste scheinbare Umriß U_1' setzt sich daher aus Kreisen um A' zusammen. Um bei beliebiger Lage der Schraubenachse A den zweiten scheinbaren Umriß von Φ zu erhalten, wird man von A, C und der zu Π_2 senkrechten Richtung L_2 als Lichtrichtung den Seitenriß auf eine zu A normale Ebene ermitteln, nach obigem die Eigenschattengrenze von Φ in diesem Riß konstruieren und wieder rückwärts ihren Aufriß suchen.

141. Konstruktion der Eigenschattengrenze und des Umrisses von Regelschraubenflächen. Bei einer Regelschraubenfläche tritt an Stelle der Kurve C eine Gerade E (Fig. 266). Zufolge des Satzes 2

1) Dieser Satz findet sich im wesentlichen bei *Rohn-Papperitz*, a. a. O. S. 405.
2) Vgl. *L. Burmester*, Z. Math. Phys. 18 (1873), S. 188.

Hosted by Google

in Nr. 139 gehen die Grundrisse der steilsten Tangenten an Φ in den Punkten von E durch einen festen Punkt, nämlich den E in Π_1 zugeordneten Punkt e. Die steilsten Tangenten selbst treffen dann die Gerade $[e \| A]$. Aus dieser Bemerkung und Nr. 140, Satz 2 folgt, daß der Schnittpunkt f' von $[le]$ mit E' und kein andrer Punkt dieser Geraden dem Grundriß F'' der Eigenschattengrenze von Φ angehört, oder der

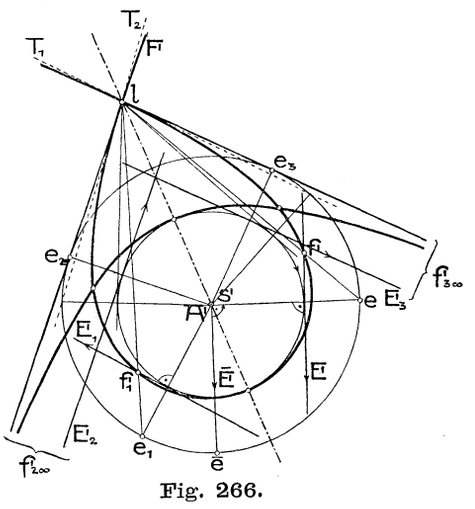


Fig. 266.

Satz 1: *Auf jeder Erzeugenden E einer Regelschraubenfläche befindet sich ein Punkt ihrer Eigenschattengrenze. Man erhält seinen Grundriß als Schnitt von E' mit der Verbindungslinie der der Lichtrichtung und der Erzeugenden in Π_1 zugeordneten Punkte l und e.*

Da die verschiedenen Lagen von E' Tangenten eines Kreises um $s' = A'$ und die verschiedenen Lagen von e Punkte eines zweiten, konzentrischen Kreises sind, die auf den zu E' normalen Geraden aus s' liegen, so lassen sich beliebig viele Punkte von F'' leicht finden. Nähere Untersuchungen zeigen, daß F'' im allgemeinen eine (rationale) Kurve 4. Ordnung mit drei Doppelpunkten ist, die $[s'l]$ zur Symmetrieachse hat; einer der Doppelpunkte ist l, entsprechend den beiden durch l möglichen Lagen von E' (die gestrichelten Geraden T_1, T_2 sind in Fig. 266 die Tangenten an F' in l), die beiden andern sind entweder reell (getrennt oder vereint) oder konjugiert imaginär[1]).

Genau das gleiche wie für die Eigenschattengrenze gilt für den Umriß bei beliebiger Parallelprojektion, insbesondre auch für den Aufriß der Schraubenfläche, wenn $A \perp \Pi_1$ steht. Dieser *zweite scheinbare Umriß* U'' ist, wie jeder scheinbare Umriß einer Regelfläche, als Strahlkurve schon durch den Aufriß einer hinreichenden Anzahl Erzeugender gegeben, wie es Fig. 267 für den durch eine Schraubenlinie P und die Achse A begrenzten Teil *einer geschlossenen schiefen Regelschraubenfläche* zeigt. Verschiedene Lagen E_i der Erzeugenden E ergeben sich, wenn man die den Drehwinkeln $\frac{i \cdot 2\pi}{n}$ (in der Figur $n = 12$) entsprechenden Lagen eines beliebigen Punktes p der Erzeu-

1) Näheres über die Formen dieser Kurve findet man etwa bei *Rohn-Papperitz,* a. a. O. Nr. 485—487.

Hosted by Google

genden nach Nr. 105 und die Lagen ihres Schnittpunktes mit A durch wiederholtes Auftragen von $\frac{h}{n}$ zeichnet. Die auf den einzelnen Erzeugenden E_i gelegenen Punkte u_i des zweiten Umrisses U findet man nach Satz 1 sofort im Grundriß, indem L als die zu Π_2 normale Richtung wählt; l ist jetzt der unendlichferne Punkt von X_{12}. Wenn man nun durch s (hinreichend genau als Schnittpunkt von A mit der durch p_0 parallel zur Tangente an P in p_3 gezogenen Geraden erhältlich) etwa zur Anfangslage E_0 von E die Parallele $\bar{E}_0$ legt, so geht durch ihren ersten Spurpunkt $\bar{e}_0$ der Ortskreis B der Punkte e. Zieht man schließlich durch den Endpunkt des gegen E_i' unter -90^0 geneigten Halbmessers von B die Parallele zu X_{12} (die Verbindungslinie mit l), so schneidet sie auf E_i' den Punkt u_i' von U' aus. Der auf E_i'' gelegene Aufriß u_i'' ist der Berührungspunkt dieser Geraden mit U''.

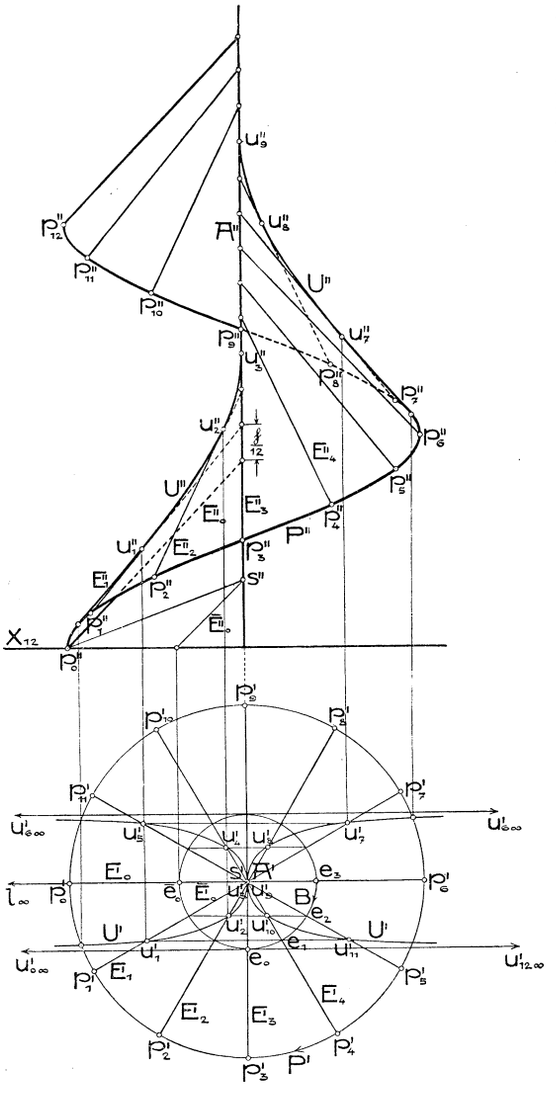


Fig. 267.

Für die *gerade geschlossene Regelschraubenfläche*, auch *Wendelfläche* genannt, zeigt Fig. 268 die Konstruktion der Eigenschattengrenze für die Lichtrichtung L. Weil hier die Punkte e_i unendlichfern liegen, so ist nach Satz 1 auf jeder Erzeugenden E_i' der Punkt f_i' des Grundrisses der Eigenschattengrenze F der Fußpunkt des aus l auf E_i' gefällten Lotes, also F' der (für einen Schraubengang doppelt überdeckte) Kreis mit lA' als Durchmesser. Es besteht demnach der

Satz 2: *Der Grundriß der Eigenschattengrenze einer Wendelfläche*

Hosted by Google

für die Lichtrichtung L ist jener Kreis, von dem A′ und der L in Π_1 zugeordnete Punkt l Gegenpunkte sind[1]).

In Fig. 268 denken wir uns bloß den von der Schraubenlinie P und der Achse A begrenzten Teil der Wendelfläche dargestellt, wie solcher als untere Begrenzungsfläche der Stufen von *Wendeltreppen* auftritt. Dementsprechend ist auch bloß ein Teil der Eigenschattengrenze im Aufriß voll ausgezogen.

Da bei dieser Fläche die Tangentialebene in einem Punkt die Tangente an die hindurchgehende Bahnschraubenlinie zur Fallinie hat, so sind zufolge Nr. 139, Satz 3 und Nr. 117, b) die Bahnschraubenlinien Haupttangentenkurven. Weil ferner diese Schar von Haupttangentenkurven die andre, aus den Erzeugenden bestehende Schar rechtwinkelig schneidet, ist die Wendelfläche eine Minimalfläche.

Der Schlagschatten von Randkurven einer Regelschraubenfläche auf diese kann leicht mittels des Schlagschattens dieser Kurven (Nr. 105) und einzelner Erzeugenden auf Π_1 nach der Methode des Zurückführens (Nr. 95) gefunden werden.

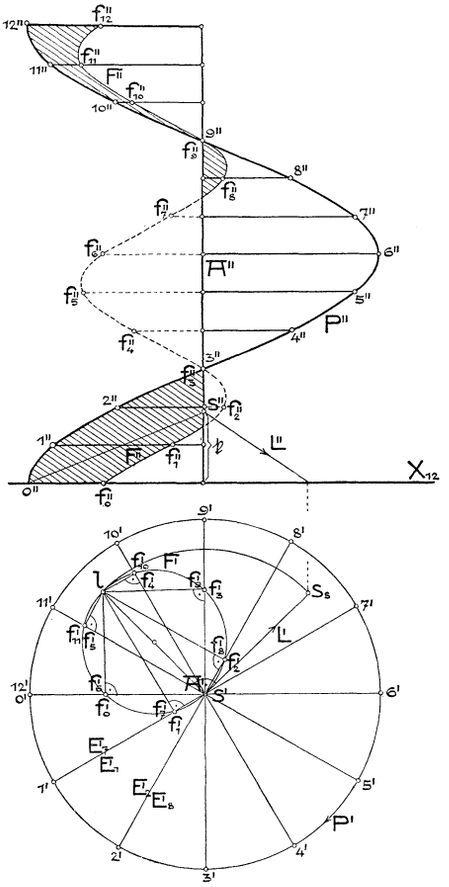


Fig. 268.

Die schiefe und die gerade geschlossene Regelschraubenfläche treten an den gewöhnlichen *scharfgängigen* bzw. *flachgängigen Schrauben* auf. Das Gewinde der ersteren hat als Meridianschnitt ein gleichschenkeliges (oder gleichseitiges) Dreieck[2]) mit zur Achse A paralleler Grundlinie; die Ganghöhe der Schraubung ist dieser Grundlinie gleich. Der Aufriß dieser Schraube (Fig. 269 a) wird konstruiert, indem man

1) Es folgt hieraus unschwer, daß die Eigenschattengrenze F selbst eine Schraubenlinie auf dem Drehzylinder über F' mit der Ganghöhe $\frac{\mathfrak{h}}{2}$ ist.

2) In Wirklichkeit sind die Ecken dieses Dreiecks abgerundet oder abgestumpft, was aber hier vernachlässigt werden möge.

Hosted by Google

die von den Eckpunkten des Meridiandreiecks beschriebenen Schraubenlinien zeichnet. Der Umriß der von den Schenkelseiten des Dreiecks erzeugten Schraubenflächen wäre nach Fig. 267 zu konstruieren, kann aber hier angenähert als geradlinig betrachtet werden. Das Gewinde der flachgängigen Schraube (Fig. 269 b) hat als Meridianschnitt ein

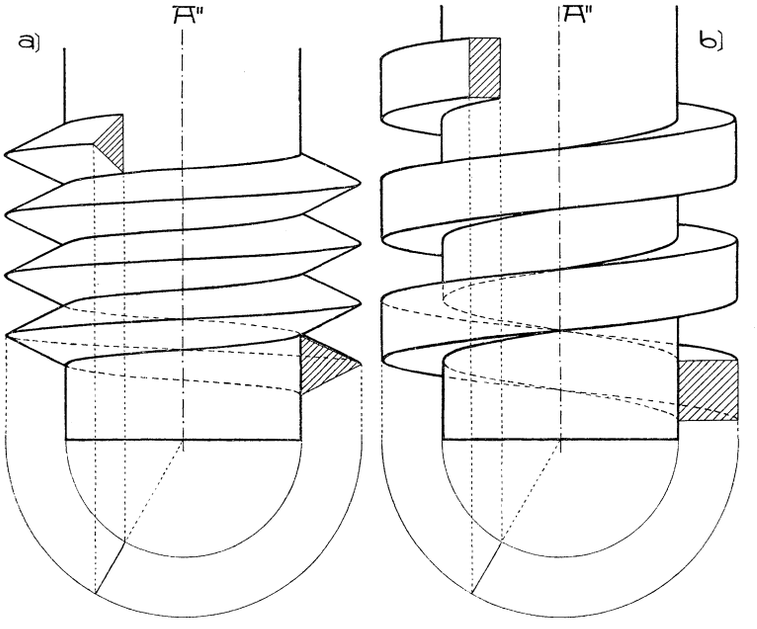


Fig. 269 a, b.

Rechteck (oder Quadrat) mit zur Achse A parallelen Seiten; die Ganghöhe der Schraubung ist gleich der doppelten Länge dieser Seiten.

Zu diesen *Schrauben* (auch *Schraubenspindeln* genannt) gehören entsprechende *Schraubenmuttern*, das sind Körper, die einen mit der Spindel kongruenten Hohlraum besitzen.

Sowohl allgemeine als auch Regelschraubenflächen treten ferner an gewissen Barocksäulen, dann an steinernen und hölzernen Wendeltreppen auf und zwar oft in ziemlich komplizierten Formen.

Hosted by Google

VIII. Kapitel.

Windschiefe und graphische Flächen.

142. Erzeugung windschiefer Flächen; Lösung einiger Grundaufgaben. Einige Sätze über algebraische windschiefe Flächen. Man versteht (nach Nr. 72) unter windschiefen Flächen Regelflächen, bei denen je zwei benachbarte Lagen der Erzeugenden sich im allgemeinen nicht schneiden. Nur für einzelne Erzeugende, die sogenannten *Torsallinien*, darf ein solches Schneiden stattfinden; längs solcher Erzeugenden verhält sich die Fläche wie eine abwickelbare. Eine windschiefe Fläche entsteht im allgemeinen, wenn eine Gerade sich nach irgend einem Gesetz im Raume bewegt. Das Gesetz dieser Bewegung kann z. B. in der Forderung bestehen, daß die Gerade beständig drei vorgegebene *Leitkurven* C_1, C_2, C_3 schneiden oder auch drei vorgegebene Flächen berühren soll. Die Leitkurven dürfen eben oder gewunden sein und auch gemeinsame Punkte besitzen. Eine der Leitkurven kann auch im Unendlichen liegen (gegeben durch einen Kegel); ferner können eine, zwei oder alle drei Leitlinien gerade sein. Im letzteren Fall ergeben sich die in Nr. 135 u. 136 besprochenen Regelflächen 2. Ordnung.

Bei der offenen schiefen Regelschraubenfläche lassen sich zwei koachsiale, gleichsinnige Schraubenlinien gleicher Ganghöhe und die unendlichferne Kurve 2. Ordnung eines koachsialen Drehkegels als Leitlinien auffassen. Bei der geschlossenen schiefen Regelschraubenfläche tritt an Stelle einer der Schraubenlinien die Schraubenachse. Die Wendelfläche besitzt außer einer Schraubenlinie und deren Achse A noch die unendlichferne Gerade der zu A normalen Ebenen als Leitlinie.

Jede windschiefe Fläche mit einer unendlichfernen und einer endlichfernen Leitgeraden heißt *Konoid*, und zwar *gerades* oder *schiefes*, jenachdem die unendlichferne Gerade in der zur endlichfernen Geraden normalen Ebene liegt oder nicht. Die Wendelfläche ist demnach ein *gerades Schraubenkonoid*. Von manchen Geometern wird jede windschiefe Fläche mit unendlichferner Leitgeraden Konoid genannt.

Die Parallelen zu den Erzeugenden einer windschiefen Fläche durch einen gegebenen Punkt bilden den *Richtkegel* der Fläche. Er schneidet die unendlichferne Ebene in derselben Kurve wie die Fläche. Für manche windschiefe Flächen, wie die Konoide, geht dieser Kegel in eine *Richtebene* über.

Sind die Kurven C_1, C_2, C_3 durch zugeordnete Normalrisse gegeben, so findet man Erzeugende der durch sie bestimmten windschiefen Fläche $\Phi = (C_1, C_2, C_3)$, wenn man aus irgend einem Punkt x_3 einer der Kurven, z. B. von C_3, die Kegel durch C_1 und C_2 legt und

Hosted by Google

ihre gemeinsamen Erzeugenden aufsucht (indem man etwa ihre Schnitte mit einer der Rißebenen ermittelt). Es gehen mithin durch jeden Punkt einer der Leitkurven im allgemeinen mehrere Erzeugende oder *die Leitkurven sind im allgemeinen vielfache Kurven der Fläche*, längs deren sich die Fläche also mehrmals durchsetzt.

Kennt man nun eine größere Anzahl Erzeugender in den beiden Rissen, so findet man die *Schnittkurve der windschiefen Fläche Φ mit einer Ebene ε*, indem man die Schnittpunkte von ε mit den Erzeugenden durch eine stetige Kurve verbindet. Die *Schnittpunkte von Φ mit einer Geraden G* ergeben sich, wenn man die Fläche mit einer der projizierenden Ebenen durch G schneidet und die gemeinsamen Punkte dieser Schnittkurve und der Geraden aufsucht. Damit läßt sich jetzt auch *zu einem Riß eines Φ angehörigen Punktes p der zugeordnete und im allgemeinen mehrdeutig bestimmte Riß finden.* Man hat ja nur den Projektionsstrahl durch den gegebenen Riß von p mit Φ zu schneiden. Wegen der Konstruktion der Tangentenebenen vgl. Nr. 143.

Für algebraische Leitkurven besteht der

Satz 1[1]***:*** *Die Strahlen, welche drei algebraische, keine gemeinsamen Punkte besitzenden Kurven C_1, C_2, C_3 von den Ordnungen n_1, n_2, n_3 schneiden, bilden eine Regelfläche von der Ordnung $n = 2n_1n_2n_3$.*

Zum Beweise dieses Satzes suchen wir zuerst die Ordnung der Fläche (C_1, G_2, G_3) mit der Leitkurve C_1 und zwei beliebigen Leitgeraden G_2, G_3. Wir haben also festzustellen, wie oftmals eine beliebige Gerade G des Raumes von einer Erzeugenden dieser Fläche getroffen wird. Nun bilden alle Geraden, die G_2, G_3 und G schneiden, eine Fläche 2. Ordnung (Nr. 135), die (nach Nr. 71, Satz 5) C_1 in $2n_1$ Punkten schneidet. Es gibt also $2n_1$ Erzeugende der Fläche (C_1, G_2, G_3), die G treffen, oder die Ordnung dieser Fläche ist $2n_1$.

Jetzt betrachten wir die windschiefe Fläche (C_1, C_2, G_3), wo G_3 eine Gerade bezeichnet. Ihre Ordnung ist gleich der Anzahl ihrer Erzeugenden, die eine beliebige Gerade G treffen oder gleich der Anzahl Erzeugender der Fläche (C_1, G_3, G), die C_2 treffen. Da letztere Fläche nach dem vorhergehenden die Ordnung $2n_1$ besitzt, also C_2 in $2n_1n_2$ Punkten schneidet, so ist die Ordnung von (C_1, C_2, G_3) gleich $2n_1n_2$.

Nun wenden wir uns zur gegebenen Fläche (C_1, C_2, C_3). Ihre Ordnung ist gleich der Anzahl Strahlen, die C_1, C_2, C_3 und eine beliebige Gerade G schneiden oder gleich der Anzahl Erzeugender der Fläche (C_1, C_2, G), die C_3 treffen. Da letztere Fläche nach dem vorhergehenden die Ordnung $2n_1n_2$ besitzt, also C_3 in $2n_1n_2n_3$ Punkten

1) *G. Salmon*, Cambr. Dublin math. J. 8 (1853), p. 45.

Hosted by Google

schneidet, so ist diese Zahl die Ordnung von (C_1, C_2, C_3) und damit obiger Satz bewiesen.

Haben bloß zwei der drei Leitkurven, etwa C_1 und C_2, einen Punkt gemeinsam, so wären alle Strahlen, die aus diesem Punkt nach den Punkten von C_3 legbar sind, also ein Kegel von der Ordnung n_3, zur Fläche (C_1, C_2, C_3) zu rechnen. Sieht man jedoch von diesem Kegel ab, so bleibt für die eigentliche windschiefe Fläche die Ordnungszahl $2n_1n_2n_3 - n_3$ übrig. Bei weiteren gemeinsamen Punkten der Leitkurven vermindert sich die Ordnungszahl der eigentlichen windschiefen Fläche in analoger Weise.

Wählt man z. B. einen Kegelschnitt C_1 und zwei beliebige Gerade G_1, G_2 als Leitkurven, so bestimmen sie im allgemeinen eine windschiefe Fläche 4. Ordnung. Wenn jedoch etwa G_2 den Kegelschnitt trifft, so ist die windschiefe Fläche bloß von der 3. Ordnung, und wenn beide Geraden C_1 treffen, gar nur von der 2. Ordnung. Die niedrigste Ordnung eigentlicher windschiefer Flächen ist die zweite. Als Regelfläche 1. Ordnung ist das Strahlbüschel anzusehen.

Der in Nr. 73, 3. Abs. nach Satz 1, ausgesprochene Satz lautet in seiner Anwendung auf windschiefe Flächen:

Satz 2: *Die Tangentenebene in einem Punkte t einer windschiefen Fläche enthält stets die Erzeugende durch t.*

Davon gilt aber auch die wichtige Umkehrung:

Satz 3: *Jede durch eine einfache Erzeugende A einer windschiefen Fläche Φ gelegte Ebene τ berührt die Fläche in einem einzigen Punkte von A.*

Denn denken wir uns Φ durch Bewegung einer Geraden erzeugt, so wird ihr Schnittpunkt mit τ eine Kurve S beschreiben (vgl. Fig. 270, wobei die dortige Kurve C als S zu betrachten ist). Nähert sich die Gerade bei ihrer Bewegung unbegrenzt der Lage A, so wird ihr Schnittpunkt mit τ sich einem Schnittpunkt t von S mit A unbegrenzt nähern. Dieser Punkt ist der Berührungspunkt von τ mit Φ, weil außer A auch die Tangente an S in t der Ebene τ angehört.[1]) Es gibt noch weitere Schnittpunkte von S und A, die aber keine Berührungspunkte von τ mit Φ sondern Punkte der *Doppelkurve* von Φ sind, in denen also A von andern Erzeugenden der Fläche geschnitten wird.

Die Tangente an S in t ist die eine, A die andre *Haupttangente* der Fläche im Punkte t.

1) Ist A eine n-fache Erzeugende von Φ, so besitzt S in t einen n-fachen Punkt, weil die Φ durchlaufende Gerade n-mal nach A kommt, also ihr Schnittpunkt mit τ n-mal durch t hindurchgeht. Die Tangenten an die n Zweige von S in t bestimmen mit A die n eigentlichen Tangentialebenen der Regelfläche im Punkte t.

Hosted by Google

Satz 4: *Ordnung und Klasse einer algebraischen windschiefen Fläche sind gleich.*

Denn schneidet eine beliebige Gerade G die Fläche Φ in n Punkten, so sind die Verbindungsebenen von G mit den durch die Schnittpunkte gehenden Erzeugenden nach Satz 3 Tangentenebenen von Φ; es lassen sich also aus G sicherlich n Tangentenebenen an Φ legen. Weitere Tangentenebenen aus G sind aber unmöglich, da jede solche Ebene eine neue Erzeugende von Φ enthielte, die G in einem neuen Punkte schnitte, sodaß G mehr als n Punkte mit Φ gemeinsam hätte.

Wegen dieser Gleichheit von Ordnung und Klasse spricht man auch vom *Grad* einer windschiefen Fläche.

143. Berührungshyperboloide längs einer Erzeugenden einer windschiefen Fläche und ihre Verwendung zur Konstruktion der Eigenschattengrenze und des Umrisses der Fläche. Es seien (Fig. 270) A und B zwei benachbarte Erzeugende von Φ, die die Leitkurven C_1, C_2, C_3 in den Punkten a_1, a_2, a_3 bzw. b_1, b_2, b_3 treffen. Legt man im Schnittpunkt t von A mit einer beliebig auf Φ gezogenen Kurve C an diese die Tangente T, so ist sie auch Tangente von Φ und schneidet B in einem t benachbarten Punkt. Umgekehrt ist jede Gerade, die A und B in unendlich nahen Punkten schneidet, eine Tangente von Φ. Insbesondre treffen die Tangenten T_1, T_2, T_3 an die Leitkurven in den Punkten a_1, a_2, a_3 auch B. Betrachtet man diese Tangenten als Erzeugende eines einschaligen Hyperboloides Ψ (Nr. 135), so sind A und B Erzeugende der andern Schar. Jede Tangente an Φ in einem Punkt von A schneidet auch B und berührt daher auch Ψ in diesem Punkt oder anders ausgedrückt, *Φ und Ψ berühren sich längs der Erzeugenden A.* Da man für T_1, T_2, T_3 irgend drei Φ in Punkten von A berührende Gerade wählen kann, so gibt es unendlich viele Hyperboloide, die Φ längs A berühren. Wählt man insbesondre T_1, T_2, T_3 parallel zu einer Ebene, so wird Ψ zum *Berührungsparaboloid.*

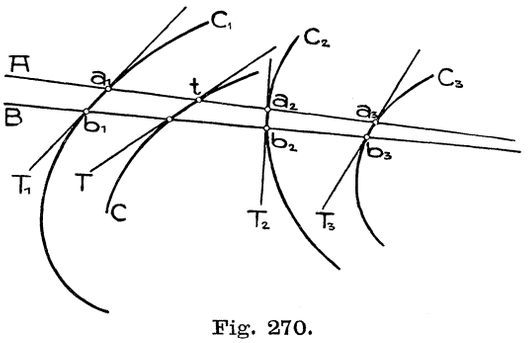


Fig. 270.

Hat man ein Berührungshyperboloid Ψ längs A festgelegt, so kann man mit seiner Hilfe in jedem Punkt von A die Tangentenebene an Φ und zu jeder Ebene durch A den Berührungspunkt mit Φ konstruieren, indem man diese Konstruktionen nach Nr. 136 (vorletzter Abs.) für Ψ durchführt.

Hosted by Google

Um einen besondern Fall vor Augen zu haben, sei in Fig. 271 eine zuweilen als Wölbfläche auftretende windschiefe Fläche Φ durch die zu Π_2 parallelen Leitkreise C_1 (Mitte m_1) und C_2 (Mitte m_2) und die zu Π_2 normale, durch m_2 gehende Leitgerade C_3 im Auf- und

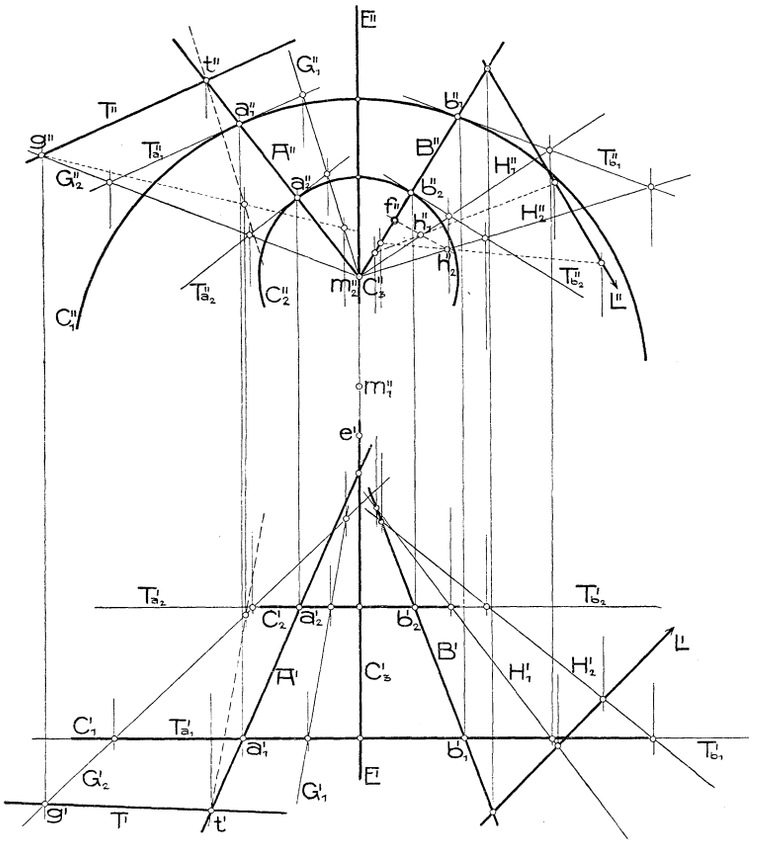


Fig. 271.

Grundriß gegeben. Die Aufrisse der Erzeugenden von Φ bilden dann das Strahlbüschel durch C_3''. Sei A'' eine beliebige Gerade dieses Büschels, die C_1'' in a_1'' und C_2'' in a_2'' trifft, dann sind die Grundrisse dieser Punkte auf C_1' und C_2' und damit $A' = [a_1' a_2']$ gegeben.[1])

1) Durch A'' ist A' vierdeutig bestimmt. Denn A'' schneidet C_1'' und C_2'' noch in zwei weiteren Punkten und deren Grundrisse können sowohl untereinander als kreuzweise mit a_1', a_2' verbunden werden. Wir wollen hier aber nur den in der Figur gezeichneten Flächenteil in Betracht ziehen. Für die ganze Fläche sind (nach Nr. 142) C_1 und C_2 Doppelkurven; C_3 ist eine vierfache Gerade (aber keine Erzeugende).

Hosted by Google

Die Verbindungslinie der beiden höchsten Punkte von C_1 und C_2 ist eine *Torsallinie* E der Fläche. Denn infolge der Symmetrie dieser Fläche gegenüber der lotrechten Ebene durch C_3 schneiden sich je zwei symmetrische Erzeugende auf C_3; zu diesen gehören auch die benachbarten Erzeugenden, welche durch die benachbarten höchsten Punkte von C_1 und C_2 gehen. Ihr Schnittpunkt e auf C_3 heißt der zur Torsallinie E gehörige *Kuspidalpunkt.*[1]) Längs jeder Torsallinie wird Φ von einer einzigen Ebene berührt (Nr. 142); der Kuspidalpunkt hingegen ist der Berührungspunkt für jede andre Ebene durch die Torsallinie, weil die Schnittkurve S einer solchen Ebene mit Φ den Kuspidalpunkt, als Schnitt der Torsallinie mit der Nachbarerzeugenden, enthält.

Aufgabe 1: *Es ist die Tangentenebene τ in einem Punkte t von A zu konstruieren* (Fig. 271).

Die Tangenten T_{a_1} und T_{a_2} an C_1 und C_2 in den Punkten a_1 und a_2 bilden mit C_3 drei Erzeugende derselben Schar eines Φ längs A berührenden Hyperboloides Ψ_A. Irgend zwei durch C_3'' gezogene Gerade G_1'', G_2'' können als die Aufrisse zweier Erzeugenden der andern Schar von Ψ_A (Transversalen von T_{a_1} und T_{a_2}) betrachtet werden, deren Grundrisse hierdurch bestimmt sind. τ, als Tangentenebene an Ψ_A im Punkte t, ist bestimmt durch A und jene Gerade T durch t, die G_1 und G_2 schneidet (Erzeugende der ersten Schar von Ψ_A). Ermittelt man, etwa unter Benutzung der Geraden $[t \parallel G_1]$, auf bekannte Weise (Nr. 23) den Schnittpunkt $g = [t G_1 G_2]$, so ist $T = [tg]$ und $\tau = [TA]$.

Auf dieselbe Weise findet man die Tangentenebene im unendlichfernen Punkt von A. Sie ist, weil sie die Schnittkurve der Fläche Φ mit der unendlichfernen Ebene berühren muß, parallel zur benachbarten Erzeugenden, mithin zur Tangentenebene des Richtkegels von Φ längs der zu A parallelen Erzeugenden, und heißt die *asymptotische Ebene* von A. Die zu ihr normale Ebene durch A berührt Φ in einem Punkt, den man den *Zentralpunkt* der Erzeugenden nennt; er ist der Fußpunkt des Gemeinlotes zwischen A und der benachbarten Erzeugenden. Der Ort der Zentralpunkte einer windschiefen Fläche heißt ihre *Striktionslinie.*[2])

Aufgabe 2: *Es ist der Berührungspunkt f einer durch die Erzeugende B gelegten Ebene mit Φ zu konstruieren* (Fig. 271).

---

1) Die weiteren drei in der erwähnten Symmetrieebene liegenden Erzeugenden sind aus den gleichen Gründen Torsallinien der Fläche.

2) Diese Begriffe samt den ersten grundlegenden Untersuchungen über windschiefe Flächen stammen von *M. Chasles,* Corr. math. phys. 11 (Bruxelles 1839), p. 49—113.

Hosted by Google

Die Ebene sei durch die Gerade B und eine sie schneidende Gerade L gegeben. Die Tangenten T_{b_1} und T_{b_2} an die Leitkurven C_1 und C_2 in deren Schnittpunkten b_1 und b_2 mit B bestimmen mit C_3 wieder ein Φ längs B berührendes Hyperboloid Ψ_B. Wir zeichnen wie vorhin zwei mit B derselben Schar angehörige Erzeugende H_1 und H_2 und ermitteln ihre Schnittpunkte h_1, h_2 mit der Ebene $[BL]$. Dann ist $[h_1 h_2]$ die $[BL]$ angehörige zweite Erzeugende von Ψ_B und schneidet B im gesuchten Punkte f. Fig. 271 enthält bloß den Aufriß dieses Punktes.

Mit dieser Aufgabe ist auch die *Konstruktion von Punkten der Eigenschattengrenze einer windschiefen Fläche* erledigt. Denn sieht man in Fig. 271 L als Lichtstrahl an, so ist f der auf B befindliche Punkt der Eigenschattengrenze von Φ. Diese Kurve geht durch alle Kuspidalpunkte der Fläche.

Auf eine andre aber weniger genaue Weise findet man die Eigenschattengrenze, wenn man von einer hinreichenden Anzahl von Erzeugenden die Schlagschatten auf irgend eine Ebene sucht, die von diesen Geraden umhüllte Kurve zeichnet und die Berührungspunkte parallel zur Lichtrichtung in die betreffenden Erzeugenden zurückführt (Nr. 95).

Dies läßt sich ebenso auf den scheinbaren Umriß einer windschiefen Fläche anwenden; er umhüllt die Bilder der Erzeugenden und die Berührungspunkte können nach Aufgabe 2 gefunden werden, indem man die Sehstrahlen als die Lichtstrahlen L betrachtet.

Durch drei benachbarte Erzeugende A_1, A_2, A_3 einer windschiefen Fläche Φ ist, wie durch je drei windschiefe Gerade, ein einschaliges Hyperboloid (oder hyperbolisches Paraboloid) Θ legbar. Da jede Ebene Φ und Θ in Kurven schneidet, die drei Nachbarpunkte, nämlich die Schnittpunkte mit A_1, A_2, A_3 gemeinsam haben, sich also oskulieren, so ist Θ das Φ längs A_1 *oskulierende Hyperboloid*. Jede Erzeugende der zweiten Schar von Θ schneidet A_1, A_2 und A_3, hat daher mit Φ drei Nachbarpunkte gemeinsam oder ist eine Haupttangente von Φ (Nr. 73). Daraus folgt der

Satz 1: *Die Haupttangenten einer windschiefen Fläche in den Punkten einer Erzeugenden bilden eine windschiefe Regelfläche zweiter Ordnung.*

Kennt man also für drei Punkte einer Erzeugenden die Haupttangenten (etwa als Tangenten an die Schnittkurven mit den Tangentialebenen gefunden), so läßt sich die Haupttangente in jedem andern Punkte der Erzeugenden linear konstruieren.

144. Graphische Flächen. Im technischen Zeichnen tritt viel häufiger, als man nach den Lehrbüchern über darstellende Geometrie

Hosted by Google

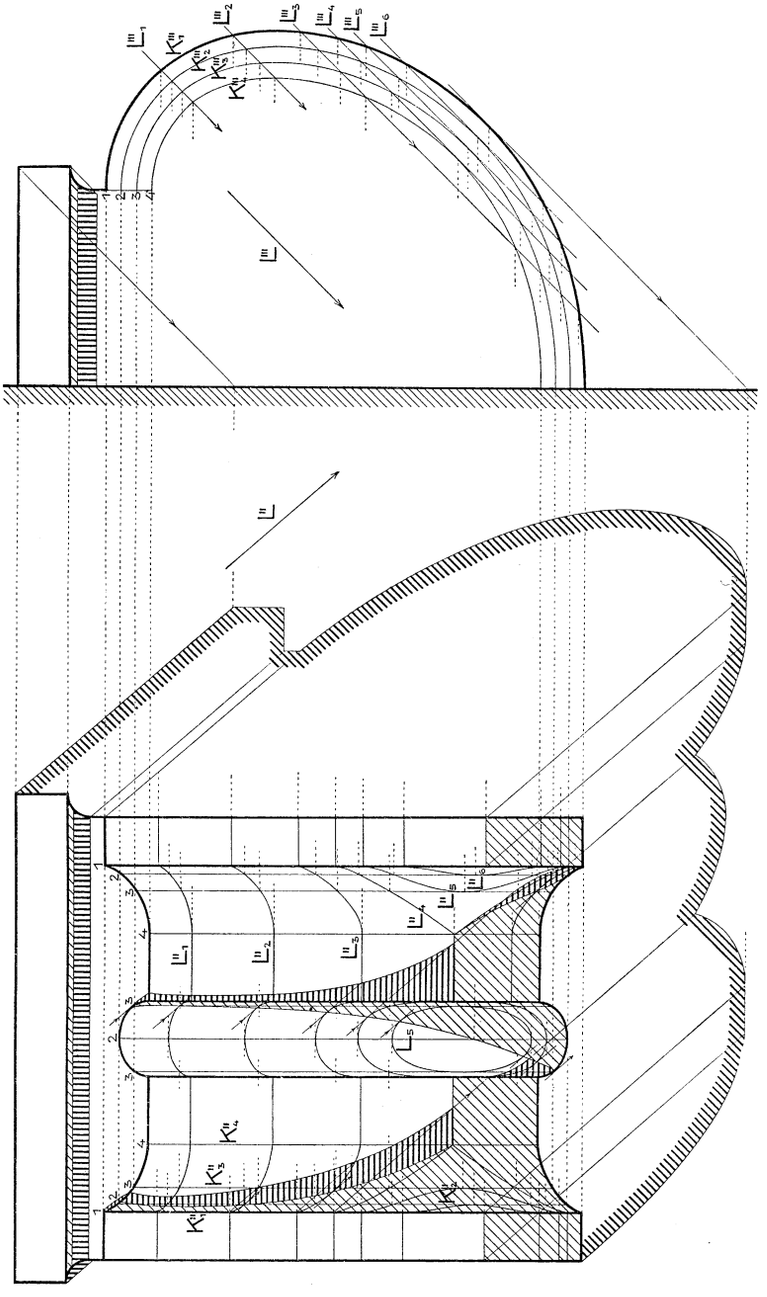


Fig. 272.

Hosted by Google

vermuten sollte, der Fall auf, daß eine Fläche nicht durch ein Gesetz definiert, sondern bloß durch eine Schar auf der Fläche verlaufender und nur zeichnerisch (graphisch) gegebener Kurven angenähert bestimmt ist.[1]) Solche Flächen sollen in Ermanglung eines gebräuchlichen Namens *graphische Flächen* heißen. Hierzu gehört z. B. die durch eine Reihe von Schichtenlinien auf Plänen oder Landkarten dargestellte Oberfläche einer Gemarkung oder eines ganzen Landes, die sogenannte *Geländefläche*, die (im II. Bande) bei der Behandlung der kotierten Projektion eine eingehendere Besprechung erfahren wird.

Oft tritt an den Techniker die Aufgabe heran, Konstruktionen für krumme Flächen durchzuführen (Schnitte mit ebenen oder andern krummen Flächen, Schattenbestimmungen, Umrißermittlungen), die in den vorliegenden Zeichnungen nur durch einige Begrenzungslinien gegeben sind, weil ihre Formen dem Fachmanne ungefähr bekannt sind. Eine solche Forderung ist vom Standpunkte des darstellenden Geometers solange unerfüllbar, als die Formen der Flächen nicht geometrisch, wenigstens angenähert, festgelegt sind. Man wird daher vorerst trachten, für jede Fläche ein Erzeugungsgesetz zu finden, indem man sich etwa eine Kurve gegebener Art auf bestimmte Weise bewegt und dabei vielleicht noch ihre Gestalt nach einer bestimmten Vorschrift geändert denkt. Gelingt die Auffindung eines solchen Gesetzes nicht, so bleibt als letzter Ausweg nur die Annahme einer hinreichenden Anzahl ebener (oder krummflächiger) Schnitte der Fläche übrig, also ihre *graphische* Festlegung. Sie muß zur Darstellung der verschiedensten Maschinen- und Baueinzelheiten herangezogen werden. Die Oberflächenform eines Schiffsrumpfes z. B. wird entweder durch eine Reihe von Horizontalschnitten oder durch Schnitte senkrecht zur Längsachse des Schiffes angegeben.

Wir setzen also jetzt voraus, eine Fläche Φ sei durch eine Anzahl in zwei zugeordneten Normalrissen dargestellten Kurven $K_1, K_2, \ldots$ gegeben, die wir die *Erzeugenden* der Fläche nennen wollen. Gehört ein Punkt einer Erzeugenden an, so ist durch einen seiner Risse der andre bestimmt. Damit können die Schnitte von Φ mit projizierenden Ebenen gezeichnet werden; denn der eine Riß eines solchen Schnittes ist eine Gerade und die auf ihr liegenden Punkte der Erzeugenden lassen sich im andern Riß sofort angeben und dann durch eine möglichst stetige Kurve verbinden.

Mit Hilfe dieser Konstruktion findet man nun: a) die Schnittpunkte einer Geraden mit der Fläche; b) zu einem Riß eines der Fläche angehörigen Punktes den andern Riß; c) die Schnittkurve der

1) Vgl. jedoch *A. Göller*, Lehrbuch der Schattenkonstruktion und Beleuchtungskunde, 2. Aufl., Stuttgart 1905, wo auf S. 73 f. die Konstruktion der Schattengrenzen und Lichtgleichen an solchen Flächen besprochen wird.

Hosted by Google

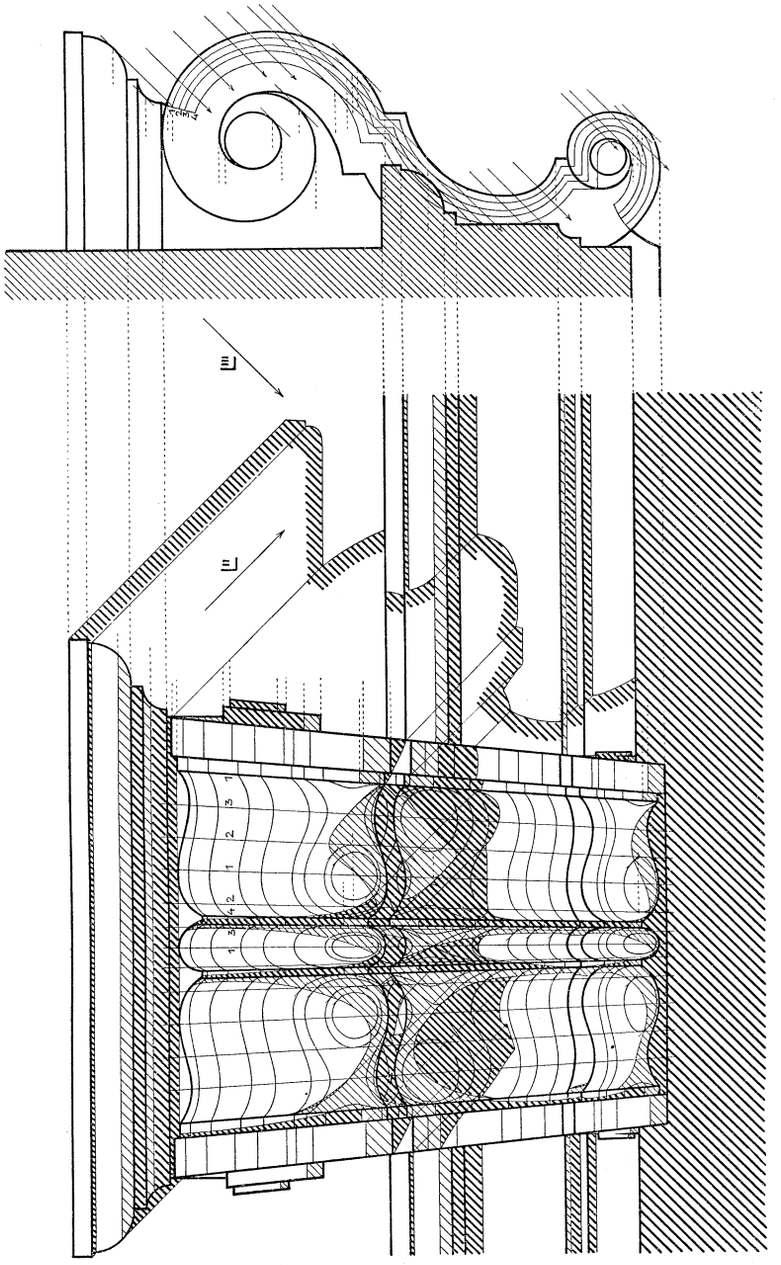


Fig. 273.

Hosted by Google

Fläche mit einer beliebigen Ebene; d) den Schnitt von Φ mit irgend einer andern Fläche (indem man beide Flächen durch zweckmäßig gewählte Hilfsebenen schneidet).

Um die *Schattenkonstruktion* an einer graphischen Fläche durchzuführen, schneiden wir (Nr. 92, 1. Meth.) die Fläche durch projizierende Lichtebenen und legen an die Schnittkurven die berührenden Lichtstrahlen. Die Verbindungslinie der Berührungspunkte gibt die *Eigenschattengrenze*, die Verbindungslinie der Punkte, in denen diese Lichtstrahlen die betreffenden Schnittkurven zum ersten Male noch weiter schneiden, die *Schlagschattengrenze* der Fläche.

Fig. 272 zeigt die Durchführung der Schattenkonstruktion an einem im Auf- und Kreuzriß gegebenen Teil einer Konsole. Sieht man von den sie begrenzenden Zylinderflächen ab, so ist die graphische Fläche durch 13 zur Kreuzrißebene parallele Erzeugende bestimmt, von denen die ersten vier, auf der linken Seite befindlichen, mit K_1, K_2, K_3, K_4 bezeichnet sind. Alle übrigen Erzeugenden sind mit diesen kongruent und decken sich mit ihnen im Kreuzriß; die oberen Endpunkte kongruenter Erzeugenden sind mit denselben arabischen Ziffern bezeichnet. Die Lichtebenen wählt man hier vorteilhaft $\perp H_3$ und zwar wurden in der Figur sechs Schnitte $L_1, L_2, \ldots, L_6$ eingezeichnet und damit, wie aus der Figur wohl klar zu ersehen sein dürfte, die Eigen- und Schlagschattengrenzen gefunden.

Die Durchführung derselben Konstruktionen an einem schwierigeren Beispiel zeigt Fig. 273.

Auf analoge Weise ließe sich unter Zuhilfenahme von Seitenrissen der scheinbare Umriß einer in allgemeiner Lage gegen eine Rißebene befindlichen graphischen Fläche zeichnen.

Hosted by Google

Sachregister.

Die *Ziffern* geben die Seiten des Bandes an, eingeklammerte Ziffern gehören zu eingeklammerten Wörtern; ein *Bindestrich* dient (abgesehen vom üblichen Gebrauch) als Ersatz des Stichwortes; gesperrter Druck bezieht sich auf Stichwörter des Registers, *kursiver* Druck hebt Unterabschnitte hervor.

A.

Abbildung, lineare — 48, zyklographische — 5; -smethoden 1 f.
abgeplattet, -es Drehellipsoid 322.
Abkürzungen 7 f.
absolut, -e Punkte 179, 260; -er Kegelschnitt 260.
Abstand, -unterschied der Risse 36. S. auch Normal-, Tafel-.
abwickelbar, -e *Fläche* (Tangentenfläche): 133, 140 f., 147, 238 f., Darstellung 238, als Grenze bei der Beleuchtung durch eine Fläche 249, Eigenschattengrenze 239, Erzeugende 240, Gratlinie (Rückkehrkante) 238, als Hüllfläche von Ebenen 145, 240, Krümmungslinien 285, Leitlinien (Leitflächen) 240, als duales Gebilde einer Raumkurve 240, Richtkegel 239, Schlagschatten auf -e Fl. 239, ebener Schnitt 239, Tangentenebene: 145, in (aus) einem Punkt 239; einer Fläche umschrieben 146, ihr Verebnen 141, 249 f.; -e Schraubenfläche s. das. S. auch Böschungsflächen, Kegel, Zylinder.
Abwicklung, der Schraubenlinie 242; s. auch Verebnen.
Achse, Bild-, Projektions-, Riß- s. das., Dreh- s. Drehung; — der Drehfläche 271, -n einer Fläche zweiter Ordnung 328, (Halb-) — der Ellipse, Hyperbel, Parabel s. das., „neue" — 22, — der Schraubenlinie 240, — der Schraubung 330, zugehörige — 12.
affin, -e ebene Figuren (Systeme): 71, in perspektiver Lage 73, 93, ihre perspektive Vereinigung 76, ihre Vervollständigung 71, 75, ihre entsprechenden rechten Winkel 78; Lösung von Aufgaben über die Ellipse mittels eines -en Kreises 165 f.; räumliche -e Systeme 324.
Affinität, 70 f., -sachse 73, 75, perspektive —: in der Ebene 192, im Raume 324; -sstrahlen 73, 75, 324.
ähnlich, -e Punktreihen 14, 17, 72; -e Systeme 72.
Ähnlichkeit, 73, -sverhältnis 14.
algebraisch, -e *ebene Kurven*: 112 f., Ordnung 112 f., Klasse 119 f., zerfallende n-ter (4.) O., Teilkurven 113 f. (123), Zahl der sie eindeutig bestimmenden Punkte 114, imaginäre (komplexe) Punkte 112, Stetigkeit in bezug auf die Tangente 115, ihre Projektion 129, Gerade u. -e eb. Kurven 112, 123, gemeinsame Punkte oder Tangenten (gem. Kurventeil) zweier -en eb. Kurven 122; -e *Flächen*: 139 f., -e Drehflächen, -e Kegelfl., -e windschiefe Fl. s. das., Ordnung 139, Klasse 145, Gerade u. -e Fl. 140, Ebene u. -e Fl. 139, Raumkurve u. -e Fl. 140, Schnitt zweier, dreier -en Fl. 140; -e *Gleichung* 112, -e *Raumkurven*: 130 f., Ordnung 130, Klasse 133, Erhaltung der Ordnung (Klasse) bei Projektion 136, Schnittpunkte -er Raumk.: mit einer Ebene (Teilkurve in ihr) 130, deren Konstruktion 138, mit einer -en Fläche (Teil der Kurve auf ihr) 140.
allgemein, -e Flächen *zweiter Ordnung* s. das., -e Schraubenfläche 330 f., -e Schraubenlinie 242, 248.
Anschaulichkeit, von Bildern 18, 19.
Anschauungsbild, subjektives — 3, Normalriß als — 18 f.
Antuschen, der Schatten 59.

Hosted by Google

Äquatorschraubenlinie 331.
äquidistant, -e Kurven 123, 248.
Äquitangentialkurve 126f.
Ast, einer Kurve 111.
Astroide 152.
Asymptoten, einer ebenen Kurve (Hyperbel s. das.) 116, Parallelprojektion von — 129, — eines ebenen Schnittes einer abwickelbaren Fläche 245, Konstruktion der — einer Raumkurve s. das., -ebenen eines hyperbolischen Zylinders 197, -kegel eines Hyperboloids 323, -kurve 147.
asymptotisch, -e Ebene einer windschiefen Fläche 348.
Aufgaben, Einteilung der geometrischen — 37, — über Lagenbeziehungen 37f., — über Maßverhältnisse 38. S. auch Übungsaufgaben.
Aufrißebene 11.
Auge 1.
Ausziehen, einer Ellipse 157f.

B.

Bahnschraubenlinie, einer Schraubenfläche 330.
Basiskurve, eines Kegels oder Zylinders 187f.
Beleuchtung, -sarten 48f., -slehre 265f.
benachbart, -e Punkte: bei Kurven 128, 131, bei Flächen 143f., 146; -e Tangenten 128, 131.
Berührung, von ebenen *Kurven* 122; von *Flächen*: 145, in einem Punkt 145f., längs einer Kurve 145, — von Flächen zweiter Ordnung in zwei Punkten 221; -shyperboloide (-sparaboloide) bei windschiefen Flächen 346f.
Bezeichnungsweise, von Punkten, Geraden, Ebenen, Kurven, Flächen, Körpern, Verknüpfungen dieser usw. 7f.
Bild s. Riß.
Bildebene, 1; s. auch Rißebene.
Binormale 131.
Bisekante 136.
böhmisch, -e Kappe 256, -es Platzel 256.
Böschung, 247, -*sflächen*: 247, ihre Darstellung aus gegebener Horizontalneigung und einer Raumkurve (Schichtenlinie) 248; Eigenschattengrenze 248, Erzeugende 247, Krümmungslinien 286, Niveau- oder Schichtenlinie 247, Tangentenebene 247.
Brennpunkt, Konstruktion der -e von ebenen Schnitten eines Drehkegels 171, 198, -e einer Ellipse, Hyperbel, Parabel s. das., -e der Schlagschattenellipse einer Kugel 262.

C.

Cassinisch, -e Linie 279.
Charakter, einer Kurve: Ebenen- 134f., Punkt- 119, 134, Tangenten- 119, 134; Änderung (Erhaltung) des -s bei Projektion einer Raumkurve 134f.
Charakteristik, einer Hüllfläche 146.

D.

Dachfläche, Schatten auf eine — 66f.
Deckebene 14.
developpabel, s. abwickelbar; rektifizierende -e Flächen 149.
Diagonalbeleuchtung 49.
Direktrix, eines Kegelschnittes 181.
Doppelkurve, 144, bei: Drehflächen 4. O. 321, abw. Schraubenflächen 244, windschiefen Flächen 345.
Doppelpunkt, bei *ebenen Kurven* 115, 143f., bei *Raumkurven*: 132, ihren Projektionen 136, ihre Projektion aus einem — 136; — der Eigenschattengrenze 293, — der Schnittkurve zweier Flächen 146, -e projektiver Reihen 17.
Doppeltangente 117.
Doppelverhältnis 173f.
Drehfläche, 271f.; — zweiter Ordnung s. Fläche, Drehkegel, Drehzylinder s. Kegel, Zylinder; s. auch Torus (Kreisringfläche); Eigenschaften 271, Darstellung 272, Konstruktion des Hauptmeridians aus einer beliebigen auf der — liegenden Kurve 274, Durchdringungen s. das., *Eigenschattengrenze:* Symmetrie bezüglich der Lichtmeridianebene 291, Konstruktion: der Hauptpunkte 292f., höchster (tiefster) Punkte (Tangente in ihnen) 292, von Umriß (Kontur) punkten 293, von beliebigen Punkten nach dem Kugel- (Kegel) verfahren 294f. (297), bei 45°-Bel. 296, von Punkten im Mittelschnitt 293 (45°-Bel. 294), von Punkten auf größten (kleinsten) Parallelkreisen 294, von Punkten auf beliebigem Meridian 294; Konstruktion: mittels einer Normalkugel 314, von Tangenten 297; Gesetze über den Verlauf der Eigen-

Hosted by Google

schattengrenze 297 f., insbes., wenn der Hauptmeridian Wendepunkte hat, 298, sich aus einander berührenden (oskulierenden) Kurventeilen zusammensetzt 298; in einem Knotenpunkt 293; Krümmungslinien einer — 285; Konstruktion: der Haupttangenten 277, Hauptkrümmungsradien, der Indikatrix 286, der Lichtgleichen 307 (höchste, tiefste Punkte 310, Umrißpunkte 308), des Umrisses bei besondrer (allgemeiner) Lage der Achse 272 (314 f.); Ordnung einer durch eine algebraische Kurve (insbes. Kegelschnitt) erzeugten — 321, -n 4. Ordnung 321, Punktarten 284; *Schlagschatten:* 299 f., Symmetrie 291, eines Randkreises 299, einer Eigenschattengrenze 301, einer quadratischen Platte 303 (45°-Bel. 304 f.), einer — auf eine Ebene (Wandfläche) 304; *Schlagschattenpunkt:* Tangente in ihm 300, im Hauptmeridian (Umriß) 213, 300 (45°-Bel. 301); *Schnitte:* mit beliebigen (projizierenden) Ebenen 275 f. (273), Tangenten 274, höchste, tiefste Punkte 276 (273); Schnittpunkte mit einer Geraden 273; Tangentenebenen 271 f., 275.

Drehung, -en 30 f., — um *Achsen:* allgemeiner Lage 34, zu den Rißebenen, parallel 32, 87, senkrecht 30; — von Körpern ohne Benutzung des Grundrisses 63 f., Parallel(Zurück)- ebener Figuren 92, -ssehnen 21.

dreiachsig, -es Ellipsoid 325.

Dreieck, Konstruktion des Umkreismittelpunktes eines -s 93 f., Normalriß eines -s, das einem gegebenen — ähnlich ist, 96 f.; sphärisches — s. das.

Dreikant, Benennungen 98, -aufgaben 98 f., Polar- 103.

Dualitätsgesetz 44 f., 120.

Dupin, -sche Indikatrix 280 f., -sche Zyklide 278.

Durchdringung (-skurve) s. Schnittkurve.

Durchmesser, einer Ellipse, Hyperbel, Parabel, Fläche *zweiter Ordnung* s. das.

E.

eben, -e Figur, ihr Schatten 56; -e Kurven s. das., -e Schnitte verschiedener Flächen s. diese.

Ebene, Koinzidenz-, Symmetrie- usw. s. das., einfach(doppel)projizierende — 12, 42, (12, 42, 47), unendlichferne — 8; Bestimmung u. Darstellung 40 f., Haupt(Fall)linie 83 f., s. auch Spurelemente; — durch eine Falllinie bestimmt 84, Ineinanderliegen, von — u. Gerade 42, Punkt u. — 43, Abstand eines Punktes von einer — 85 f.; Konstruktionen in -n allgemeiner Lage 93, Senkrechtstehen von Geraden auf -n 84, *Schnittlinien:* von -n mit Flächen s. diese, zweier -n 46, von -n mit der Koinzidenzebene 46; *Schnittpunkt:* einer Geraden mit einer — 45, von -n mit Raumkurven s. das.; Tafelneigungen 90, Winkel: einer Geraden mit einer — 90, zweier -n 90; -ncharakter einer Raumkurve 135, Helligkeits(Schattierungs)grad einer —, Hilfs- s. das., -nkoordinaten 133, 145, -nörter 133, 145, Schatten (Licht)seite einer — 50, Schlagschatten eines Punktes auf eine — 50.

ebenflächig, — begrenzte Körper s. das.

Ecke, dreiseitige körperliche — s. Dreikant.

eiförmig, -es Drehellipsoid 322.

Eigenschatten, 50, 58; *-grenze:* 58, Allgemeines 201 f., Konstruktionsmethoden 201 f., Doppelpunkt, isolierter Punkt, Spitze 293, an beliebiger Fläche 212, Grenzpunkt 290, im Knotenpunkt 293, Tangente in einem ihrer Punkte 289, Umrißpunkte 202 f., Konstruktion an besondern Flächen s. diese.

Eindringung 227.

ein-eindeutig, -e Verwandtschaft 70.

eingeschrieben, -e Flächen 145, -e Hilfsflächen s. das.

einhüllend, -e Fläche s. Hüllfläche.

einmantelig (einschalig), -es Hyperboloid s. das.

Einseitpunkt 118.

Einsiedler, -punkt 115, -tangente 121.

Ellipse, 113, 149 f., 153, Achse 150, 160, — als perspektiv-affine Figur zu den Kreisen über d. Achsen 153, Konstruktion der — aus einer Achse und einem Punkt 152, Lösung von Aufgaben über die — mittels affinen Kreises 165 f., ausgeartete — 114, Ausziehen der — 157 f., Brennpunkte 154; Durch-

Hosted by Google

messer (konjugierte): 160, 179, 181, Konstruktion der — aus ihnen 161, 167; Erzeugung 152, *Konstruktion:* mittels der Kreise über den Achsen 151, mittels des Papierstreifens 151; kubische — 230, Krümmungskreis 155, Krümmungs(mittelpunkt)radius: seine Konstruktion, in beliebigem Punkt 158 f., im Scheitel 156 f.; Normalriß der — 163, — als Normalriß eines Kreises 149 f., 155, lineare Exzentrizität 154, Konstruktion der -nnormalen 156, 162, Schatten der — 162, — als Kreisschatten 164, — als Schnitt eines: (Dreh-)Kegels (168 f., 197), 193 f., Drehzylinders 153; -nzirkel (Ellipsograph) 152.

Ellipsoid, verlängertes (eiförmiges), verkürztes (abgeplattetes) Dreh- 322, dreiachsiges — 325.

elliptisch, -er Flächenpunkt 146, 281, (bei Drehflächen 284), -es Gewölbe 323, -e Indikatrix 281, -es Paraboloid 325, -er Zylinder 196.

Euler, -sche Gleichung für den Krümmungsradius e. Normalschnittes 282.

Evolute 123, 127.

Evolvente, 123, Kreis- 124.

Exzentrizität, lineare — einer Ellipse 154, 261.

F.

Fall, -linie 83, -winkel (-richtung) einer Schraubenlinie 242, (332).

Farbton, für Materialien 59.

Fehlerkurve 126.

Fläche, Eigenschaften u. Konstruktionen an besondern Flächen s. diese, Berührung, —(-nwinkel) eines Dreikants, Durchdringung, Hilfs- s. das.; Allgemeines 139 f., Doppelkurve 144, -nelement (-nstreifen) 145, Einteilung 139, 140, Eigenschattengrenze s. das., (gesetzmäßige) Erzeugung, Erzeugende 139, geodätische Linien 147, -n gleichen Falles (gleicher Böschung) 247, Hauptkrümmungsradien 282, Hauptschnitte 282, Haupttangenten(kurve) 146 (147), Helligkeit (Schattierung) s. das., Krümmungslinien 147, 285, Krümmungsmaß 284, Bild einer beliebigen Kurve auf einer — 202, Kuspidalkurve 144, Lichtgleichen 267, 314, leuchtende — 249, Normale einer — 147, 285, Normalen- 147, oskulierende -n 284; -n*punkte:* Arten 146, Indikatrix 280 f.; singulärer, konischer Punkt 144, Knotenpunkt 144 (seine Haupttangenten 146); *Schlagschatten:* Allgemeines 201 f., von Geraden $\| \Pi_i$ u. Π_k, Lichtrichtung $\| \Sigma_{ik}(\Gamma_{ik})$ 217, von Kurven 203, Randkurven 289; *Tangenten:* einer — 143 (konjugierte 281, 283, 287), an einen ebenen Schnitt 145; Tangentenebenen 144, 146, um(einge)schriebene — 145 f., scheinbarer, wahrer Umriß 201; — *zweiter Ordnung:* 322 f.; s. auch Regelflächen, Kegel, Zylinder, Ellipsoid, Hyperboloid, Paraboloid; Achsen 328, Berührungskegel 327, Durchmesser(ebene) (konjugierte) 328, Eigenschatten(grenze) 327, 329, Erzeugende 325, Hauptebene, Hauptschnitte 328 f., -n 2. O. mit gemeinsamer Kurve zweiter Ordnung 221, Mittelpunkt 328, Polarität in bezug auf eine — 2. O. 328, Schnitt: ebener (Brennpunkte) 323, sein Schlagschatten ins Innere 221, zweier -n 2. O. mit gemeinsamer Symmetrieebene 232, Zerfallen der Schnittkurve zweier -n 2. O. 220 f.; Tangentenebene 325, Umriß 327 f.; Dreh-n 2. O. 322, ihre Schnittkurve bei sich schneidenden Achsen 280.

flachgängig, -e Schraube 341 f.

Flexion 127, 132.

Fluchtpunkt 2.

Fokalkurve, eines Kegelschnittes 173.

freihändig, Beachtenswertes beim -en Zeichnen: *Eigenschattengrenze* (45°-Bel.): Drehzylinder 209, Kugel 262, Tangente in ihren Schnittpunkten mit Randkurven 223; *Schlagschatten:* einer Kugel 263, des Randkreises einer Halbkugel 264, eines Randes einer Kegel(Zylinder)fläche 224.

G.

Γ s. Koinzidenzebene.

Ganghöhe, der Schraubenlinie (Schraubung) 240 (330), reduzierte — 243, 330.

Gegenachsen, kollinearer Systeme s. das.

Geländefläche 351.

geodätisch, -e *Linien:* beliebiger (abwickelbarer) Flächen 147 (148), des

Hosted by Google

(Dreh-)Zylinders 242, der abwickelbaren Schraubenfläche 253.
Gerade, — u. algebraische Kurve (Fläche) s. das.; Abstand eines Punktes von einer -n (Tafelparallelen) 85, Ineinanderliegen von Punkt(Ebene) u. — 40 (42), Koordinaten einer -n 119, zugeordnete Normalrisse von -n 17, projizierende — 17, *Schlagschatten:* von -n 53 (allgemeine Gesetze 57), auf andre — 54, auf besondre Flächen s. diese; *Schnittpunkt:* zweier -n 42f., 45, einer -n mit einer Ebene (Koinzidenzebene) 45 (46), von -n mit Flächen s. diese; Senkrechtstehen auf Ebenen 84, — mit gegebenen Tafelneigungen 81f., Verbindungsebene von — u. Punkt 44f. (Neigungs-)Winkel s. das., windschiefe (sich kreuzende) — 41, 101; uneigentliche (unendlichferne) — 8, unzugängliche — s. das.; — (parallele —) in Zentralprojektion 2.
gerade,- — Regelschraubenfläche s. das., -s (Schrauben-)Konoid 343.
Geschichtliches, über Entwicklung der darstellenden Geometrie 3f.
geschlossen, -e (Regel-)Schraubenfläche s. das.
gesetzmäßig, -e Kurven 111, Flächen 139.
Gestalt, Ermittlung der (wahren) —: einer ebenen Figur 30, 81, 92f., ebener Schnitte von Kegeln 198f., eines Zylindernormalschnittes 250.
gewöhnlich, -er Punkt von ebenen (Raum-)Kurven 118, 121 (132), -er Knotenpunkt 144, -e Schraubenlinie 242, -e Tangente 121.
Gewölbe, elliptisches — 323f.; -formen, -scheitel 235f., 256f., 323f., Kugel- 257.
gewunden, -e Kurven s. Raumkurven.
gleichseitig, -e Hyperbel 181.
Gleichung, algebraische —: 112, einer ebenen (räumlichen) Kurve 112, 114 (130, 133), einer Ellipse 151, einer Fläche 139, 145.
Grad, einer windschiefen Fläche 346.
graphisch, -e *Flächen*: 139, 349f., Darstellung 351, Schnitte: ebene 351f., mit Geraden 351; Schattenkonstruktionen 353.
Gratlinie, 133, 141, 248; Verebnung der — 142, — bei Gewölben 235.
Grenzpunkte, der Eigenschattengrenze 290, bei Umrißermittlung 317.
Grund, -ebene, -linie, -riß(ebene), -schnitt 11.

H.

Halbschatten 249.
Hängekuppel 256.
harmonisch, -e Punkte u. Strahlen 175, Konstruktion d. vierten -en Elemente 176, Kreise über -en Punktepaaren 177.
Hauptachse, einer Hyperbel 182, einer Fläche zweiter Ordnung 328.
Hauptebene, einer Fläche zweiter Ordnung 328.
Hauptkrümmungsradien, 282f., — der Drehfläche 286.
Hauptlinie 83.
Hauptmeridian, einer Drehfläche s. das., einer Schraubenfläche 334.
Hauptnormale 131.
Hauptpunkte, der Eigenschattengrenze einer Drehfläche 292f.
Hauptschnitte, einer Fläche (zweiter Ordnung) 282f., (328f.).
Haupttangente, 146, 283f., in einem Knotenpunkt 146f., in einem Punkt: einer Dreh(Ring)fläche 277, (287), einer windschiefen Fläche 345, 349; -nkurve 147.
Helligkeit, einer Ebene 266, Einfluß auf die — eines Flächenelementes 265, -sgrad einer Ebene, Fläche 266, auf ihrer Schattenseite 267, -sreihe (-sskala) 266.
hellst, -er Punkt der Kugel 261.
Hilfsflächen (Hilfsebenen, Hilfskugeln), Methode ein- oder umgeschriebener — zur Konstruktion der Eigenschattengrenze 202, 294, — zur Ermittlung der Schnittkurve: zweier Flächen 225f., 230f., 257f., zweier Drehflächen, insbes. mit sich schneidenden Achsen 233f.
höchst, -e (tiefste) Punkte von ebenen Schnitten, Lichtgleichen, Eigen- u. Schlagschattengrenzen von Flächen s. diese.
Hohlkugel s. Kugel.
Horizontalebene 11.
Hüllfläche, 146, — von Kugeln 278f., Charakteristiken der — 146.

Hosted by Google

Hüllkurve, ebener Schnitt einer Drehfläche als — 278.
Hyperbel, 113, 181f.; Achse 182, ausgeartete — 113, Ausziehen der — 184, *Asymptoten:* 170, -konstruktion aus ihnen u. einem Punkt 182f. (Beweis dazu 320), Darstellung der — aus ihnen u. der Hauptachse 183; Eigenschaften 181f., Durchmesser (konjugierte, imaginäre) 181f., gleichseitige — 181, kubische — 230, Krümmungs-(kreis)radius der — 184, Parallelriß der — 185, — als Schnitt eines (Dreh)-kegels (168, 170, 197f.), 193, 195.
hyperbolisch, -er Flächenpunkt 146, 283 (auf Drehflächen 284), (gleichseitig) -e Indikatrix (283) 282, kubische -e Parabel 230, -es Paraboloid 326, -er Zylinder 196.
Hyperboloid, 325, Dreh- 318f., 322f., seine Meridianermittlung 319; Berührungs- einer windschiefen Fläche 346f., oskulierendes — 349.
Hyperoskulation, eines Kreises 185.

I.

ideell, -er Schatten 50.
imaginär, -e Achse, -er Durchmesser der Hyperbel 182, -er (Kurven-)Punkt (112, 128) 17, -e Tangente 119, -er Schnittpunkt eines Kreises mit einer Geraden 179. S. auch konjugiert.
Indikatrix, Dupinsche — 280f., elliptische — 281, 284, hyperbolische — 282f., parabolische — 283f., Konstruktion der — in einem Drehflächenpunkt 286f.
Ineinanderliegen, von Punkten u. Geraden (Ebenen) 40 (43), von Geraden und Ebenen 42.
Inflexion, -spunkt, -stangente 118.
Inversion 71.
Involution, konjugierter Punkte 179.
involutorisch, liegende projektive Punktreihen 16.
isoliert, -e Punkte 115, 228, -e Tangenten 121.
Isophote s. Lichtgleiche.

K.

Kante, Sichtbarkeit der -n s. das.; -n u. -nwinkel des Dreikants s. das.
Kappe, böhmische — 256, -ngewölbe 235.
Kegel, — 2. O., schiefer Kreis- 193, algebraischer —: 142, seine Klasse 188; *beliebiger —, (Dreh-):* Darstellung 187f., Durchdringung s. das., *Eigenschattengrenze:* 204f., (205f.), am -stumpf 206, (nach dem Kugelverfahren 296); Krümmungslinien 286, (Lichtgleichen 312, Ort der Spitzen der durch eine Kurve 2. O. legbaren Dreh- 173, *Schlagschatten* auf —: eines Punktes 210, einer Geraden (Platte) 215 (215f., 45°-Bel. 216), einer beliebigen Kurve 210f., einer ebenen Randkurve eines -s 2. O. auf diesen 221f., Tangente an ihn 223; Schlagschatten von Kreisen auf Kreis- 212f.; eines -s auf eine Ebene 205; ebener *Schnitt:* 189f., (168f.), Tangente an ihn 189, von -n 2. O. 192f., (in besondern Lagen 197f.), mit Σ_{ik} oder Γ_{ik} 200; Tangentenebene 145, 188; Umriß 189f., Verebnung schiefer Kreis- 251; -verfahren zur Konstruktion der Eigenschattengrenze an Drehflächen 279.
kegelförmig, -e Stichkappe s. das.
Kegelschnitt, s. Kurven 2. O. insbesondre Kreis, Ellipse, Hyperbel, Parabel; absoluter — (imaginärer — in der unendlichfernen Ebene) 260, kubischer — 229f.
Kehlschraubenlinie 331.
Kernschatten 249.
Klassenzahl, algebraischer Gebilde s. das., Erhaltung der — bei zentrischer Kollineation 192.
Klostergewölbe 235f.
Knotenpunkt 144.
Koinzidenzebene (Γ_{ik}), 14, 24, 42; Gerade (ebene Figur): in der — 42, parallel zur — 46 (76); Konstanz der — bei Schiebung der Rißachse 35, Punkt in der — 20, Schnitt mit der — von: Geraden 46, 75, Ebenen 47, 73.
kollinear, perspektiv- — aufeinander bezogene Ebenen (Systeme) 190, ihre Gegenachsen 190.
Kollineation, ebener Systeme 70f.; -sachse, -szentrum 190, deren Abstände von den Gegenachsen 192; perspektive (zentrische) — ebener Figuren 189f., räumliche — 70.
Konchoide, der Ellipse 307.
kongruent, -e Punktreihen in beliebigen affinen Systemen 15, -e Risse einer Figur 76, -e Systeme 72.

Hosted by Google

konisch, -er Flächenpunkt 144.
konjugiert, -e Durchmesser(ebene) bei Kurven (Flächen) 2. O. s. das., -e Gerade, Punkte bezüglich eines Kreises 178 f., -e Gerade zu einer Ebene bezüglich einer Fläche zweiter Ordnung 328, — imaginäre Punkte 17, 112, 179, -e Sehnen (Tangenten) bei der Parabel 185, -e (Flächen-)Tangenten 281, 283, ihre Anwendung 287 f. (bei Berührung 288).
konkav s. konvex.
konlokal, -e Punktreihen 16.
Konoid, gerades, schiefes — 343.
Kontur s. Umriß.
konvex, -e (konkave) Seite einer Kurve 118, — -konvexer, konkav--er Flächenpunkt 284.
Koordinaten, -achsen, -ebenen, -parallelepiped, rechtwinkelige —, -system 27 f., *Plücker*sche —: einer Geraden 119, einer Ebene 133.
Körper, ebenflächig begrenzte — 28, zugeordnete Normalrisse von -n 18; Durchdringung, Schattierung, Sichtbarkeit s. das., Schattenbestimmung 48 f.
Kote 4.
kotiert, -e Projektion 4.
Kreis, 149 f.; -kegel, -zylinder s. das.; -durchmesser (konjugierte) 179, -evolvente 124, Krümmungs- s. das., Kugel- (unendlichferner) 260, Normalriß eines -es 149, Polareigenschaften 176 f., -punkte 179, 260, -punkte einer Fläche 282, rechtwinkelig schneidende -e 177, -ringfläche s. Torus, — als Schatten einer Ellipse 163 f., -schatten (seine Achsen) 162 (163), -schnittebene eines elliptischen Zylinders 163, 259, -umfang (Näherungskonstruktion) 124, -verwandtschaft 71, Zentralriß eines -es 172.
Kreuzgewölbe 235 f.
Kreuzriß, Zeichnen u. Verwendung des -es 27 f., -ebene 26.
krumm, -e Fläche s. das.
Krümmung, 127, Haupt- s. das., -en einer Raumkurve 132, *-skreis* (-smittelpunkt, -sradius): ebener Kurven 125, seine Konstruktion 126, in den Scheitelpunkten der Kurven 2. O. 185 (der Ellipse 155 f., Hyperbel 184, Parabel 187), bei Raumkurven (Schraubenlinie 244) 132, seine Konstruktion 137, Ort der -smittelpunkte 127; *-slinien:* 147, von besondern Flächen s. diese; *-smaß:* ebener Kurven 127, einer Fläche 284; Punkt sphärischer — 282.
kubisch, -e Kegelschnitte 229 f.
Kugel, -fläche 253 f.; Bild bei beliebiger Sehstrahlenrichtung 155, Darstellung (Umriß) 253, Durchdringung s. das., Eigenschattengrenze 260, 295 (45°-Bel. 262), -gewölbe 257 f., Hilfs- s. das., unendlichferner -kreis 260, Krümmungslinien 285, Lichtgleichen (hellster Punkt 261) 268 f.; Normal- s. das.; oskulierende — 282, *Schlagschatten:* der — auf Ebenen 261, einer beliebigen Kurve (zylindrischen Platte) auf die — 265, eines Randkreises ins Innere (-nische) 263 f.; *Schnitt:* mit einer Geraden 257, mit einer (projizierenden) Ebene (255 f.) 254; Tangentenebene 254; einem Kegel (Zylinder) eingeschriebene — 171 (155); -verfahren zur Konstruktion der Eigenschattengrenze an Drehflächen 294.
Kurve, besondre -n, wie algebraische —, Doppel-, Haupttangenten-, Parallel-, Raum- usw. s. das.; allgemeines über -n, ihre Einteilung 111, Ast (parabolischer 228), Zweige 111; *ebene* -n: 111 f., ihre Darstellung 128 f., Einteilung 112, Krümmungskreis s. das., Schlagschatten von -n auf besondre Flächen s. diese; Schnittwinkel von -n, -nnormale 122, — als Umhüllungsgebilde ihrer Tangenten, Strahl- 119, Seite einer —, Verhalten in der Umgebung eines ihrer Punkte 117 f.; -n *zweiter Ordnung:* 130, 149 f., 168 f.; s. auch Kreis, Ellipse, Hyperbel, Parabel; Einteilung 113, zerfallende (mit Doppelpunkt) 113, 115, 123, Asymptoten 116, Durchmesser (konjugierte) 180 f., Polareigenschaften 180 f., -n 2. O. als Projektion von Raumkurven 4. O. 232, -n 2. O. durch 3 Punkte, die 2 Gerade berühren 200; -n *zweiter Klasse* (zerfallende) 120.
Kuspidalkurve 144.
Kuspidalpunkt, einer windschiefen Fläche 348.

Hosted by Google

L.

Lagenbeziehungen, Aufgaben über — 37 f., (Voraussetzung für die Lösung 38).
Lambert, -s Gesetz über d. Helligkeit einer Ebene 266.
Länge, einer Strecke (Lot) 79 f. (30), des Kreisumfangs 124 f., eines Kurvenbogens 241, 250.
Leitlinie (Leitkurve, Leitfläche), — eines Kegels (Zylinders) 142, einer Kurve 2. O. 181; bei Regelflächen 140, 240, 247, 343.
Lemniskate 279.
leuchtend, -e Fläche (Scheibe, Kurve) 249.
Licht, volles — 249, -ebene 53, -quelle 49.
Lichtgleichen, — auf besondern Flächen s. diese; — auf beliebigen Flächen 314.
Lichtgrenze, Lichtprisma, Lichtzylinder 58, 201.
Lichtseite, einer Ebene 50 f.
Lichtstrahl, technischer — (45°-Bel.) 49, Seitenriß des -s 65, Paralleldrehen des -s 292.
linear, -e Abbildungen 38 f.
links (rechts), -gängige Schraubenlinie 241, -gewundene Raumkurven 133.

M.

Maßverhältnisse, Aufgaben über — 38 (ihre Lösung bei unzugänglichen Elementen 79 f.).
Materialfarben, 59 f., Ton der — bei Schattierung 270.
Meridiankurve, von Drehflächen 271 f., von Schraubenflächen 245, 331.
Minimalflächen 283, 341.
Mittelschnitt, von Drehflächen s. das.

N.

Nabelpunkt 282.
Nebenachse, der Hyperbel 182.
Neigungswinkel s. Winkel.
Niveaulinien 247.
Normalabstand, eines Punktes von einer Geraden (Ebene) 85 (86), — windschiefer Geraden 30.
Normale, einer *ebenen Kurve* 122 (Kegelschnitt 172, Ellipse 156, 162); einer *Raumkurve:* 131, ihre Bi-, Haupt- 131; einer *Fläche* 147, 285.
Normalebene 131.
Normalenfläche, 147, abwickelbare — 285.
Normalkugel, zur Konstruktion von Lichtgleichen (Eigenschattengrenzen) 312 (314).
Normalriß (Normalbild), 4, -e auf nicht normale Ebenen 65, perspektiv liegende -e 18, 73, Vereinigen der -e 18, wegfallender — 24, zugeordnete -e 12.
Normalschnitt, -e einer Fläche 280 (ihre Krümmungen 282 f.), einer Schraubenfläche 331, 334.

O.

Ω s. unendlichferne Ebene.
offen, -e Schraubenfläche 331, -e Regelschraubenfläche s. das.
Ordnung, -slinie 19, -szahl algebraischer Kurven und Flächen (Drehflächen) s. das.; Erhaltung der — bei zentrischer Kollineation 192.
orientiert, -er Kreis 5, -e Tangente einer Schraubenlinie 332.
oskulierend, -e Flächen 284 (Kugel 282, Hyperboloid 349); -er Kreis s. Krümmung; -e Kurven 128.

P.

Parabel, 113, 116, 185 f., Achse, Brennpunkt, Scheiteltangente, Aufgaben über die — 186, ausgeartete — 113, Durchmesser, konjugierte Sehnen, Tangenten 185, Krümmungsradius 187, kubische (hyperbolische) — 230, Parallelriß der — 187, — als Schnitt eines (Dreh-) Kegels 2. O. (168, 171, 199,) 193, 195.
parabolisch, -er Ast einer Raumkurve 228; -er Flächenpunkt 146, 284 (auf Drehflächen 284), -e Indikatrix 283; -er Zylinder 196.
Paraboloid, Achse, Mittelpunkt, Scheitel, Durchmesser u. dazu konjugierte Tangentenebene 328, Berührungs- 346, Dreh- 322, elliptisches — 325, hyperbolisches — 326, 328 f.
Parallelbeleuchtung 48.
Paralleldrehung, 87 f., — ebener Figuren 92 f.
Parallelkreise s. Drehfläche.
Parallelkurven 123, 248.
Parallelverschiebung 30.

Hosted by Google

Parameter, einer Schraubenlinie 242, einer Schraubung 330.
perspektiv, -e Affinität, -e Kollineation s. das., -es Bild 1, -e Lage zugeordneter Normalrisse 18.
Perspektive 1f.
Platzel, böhmisches —, preußisches — 256.
Plücker, -sche Formeln 121f., -sche Koordinaten s. das.
Pol (Polare, Polarebene), einer Geraden (Polare e. Punktes) in bezug auf einen Kreis, Kegelschnitt 178f., einer Ebene (Polarebene e. Punktes) in bezug auf eine Fläche 2. O. 327f.; — einer Konchoide 307, — bei einer Schraubung 336.
Polardreikant 103.
Polareigenschaften, des Kreises (der Kurven 2. O.) 176f. (180f.).
Polarität, Polarsystem, in der Ebene 180f., im Raume 328.
Polyeder, Eigenschatten 58, Schlagschatten 58f., Sichtbarkeit s. das., Umriß 25.
Polygon, Schatten eines -s 55f.
preußisch, -es Platzel 256.
Prisma, nach einem Dreieck zu schneiden, das einem gegebenen ähnlich ist, 96f., Eigenschattengrenze des -s 58.
Projektion, von ebenen und Raumkurven s. das., -sachse s. Rißachse, -sebene s. Rißebene, kotierte — 4, orthogonale — 4, 11, Parallel-, schiefe (klinogonale, schräge) — 4, -sstrahl 1, 3, 11f., Zentral- (-szentrum) 1.
projektiv, -e Geometrie 6, -e Punktreihen 14f., 71.
projizierend, -e Ebene 12, -er Strahl 39.
Proportionalwinkel 277.
Punkt, besondre -e, wie absolute -e benachbarte -e, Doppel-, harmonische -e, Kreis-, Nabel-, singuläre -e, unzugängliche -e usw. s. das.; -arten einer Fläche 146, 281f., -charakter einer Kurve 119, 134f., Ineinanderliegen von — und Gerade (Ebene) 40, 43, -involution 16, 179, -kurve 119, zugeordnete Normalrisse eines -es 12f., -epaar als zerfallende Kurve 2. Klasse 120, *-reihe*: ähnliche, involutorische, kongruente, projektive -reihen usw. s. das.; Schlagschatten eines -es 49, -verwandtschaft 70, -weise (un)stetige Kurven 111.
Pyramide, Seitenriß einer — 24, Eigenschattengrenze einer — 59.

Q.

Querriß, 27, -ebene 27.

R.

Räume, die vier — 13.
Raumkurve, algebraische — s. das.; Darstellung 136f., Einteilung 130, — als Ebenenort 133, gewöhnliche, singuläre Kurvenpunkte (Doppelpunkte) 132, Krümmungen, Krümmungsradius s. das.; rechts(links)gewundene — 133, (Haupt-, Bi-) Normale, Normalebene, rektifizierende Ebene 131, Projektionen von -n 133f., Rückkehrelemente (stationäre Elemente) 132, Schmiegebene 131 (ihre Konstruktion 137), Konstruktion der Schnittpunkte mit einer Ebene 138, Tangente 131 (ihre Konstruktion 137), Tangentenebene 131, Tangentenfläche (duales Gebilde der —) s. abwickelbar, Verhalten in der Umgebung eines ihrer Punkte 131f.; — *dritter Ordnung:* 130, 228f., Arten 230, Asymptotenkonstruktion 229; — *vierter Ordnung:* als Schnitt zweier Kegel 2. O. 227, ihre Asymptoten 228, — 4. O. mit zwei Doppelpunkten 220.
recht, entsprechende -e Winkel in affinen Figuren 76f., Normalrisse -er Winkel 83. S. auch Winkel.
rechts s. links.
reduziert, -e Ganghöhe einer Schraubenlinie 243, 330.
Regelflächen, Einteilung, Leitlinien 140; abwickelbare —, windschiefe — s. das.; — *zweiter Ordnung*: 326, 329, — 2. O. als Haupttangentenörter bei windschiefen Flächen 349.
Regelschraubenflächen, 331, 343; Eigenschattengrenze, Umriß 338f., Schlagschatten von Randkurven auf — 341. S. auch Wendelfläche.
rektifizierend, -e Ebene 131, -e Developpable 149.
Reziprozitätsgesetz 45.
Richtkegel (Richtebene), einer ab-

Hosted by Google

wickelbaren (Schrauben-)Fläche 239, (244), einer windschiefen Fläche 343.
Richtung, einer Geraden 8.
Ringfläche s. Torus.
Riß, *-achse:* 11, ihr Weglassen, ihre Schiebung 35f.; Auf-, Grund-, Lot- 4f., 11f., Zentral- 1f.; *ebene*: 11, ihre positive, negative Seite 13, 19, ⊥ zu einer Geraden 30; Normal-, Seiten- s. das.
Rotationsflächen s. Drehflächen.
Rückkehrelemente (Punkt, Tangente, Ebene), von ebenen Kurven 118, 121, von Raumkurven 131f.; (zeichnerischer) Rückkehrpunkt bei Umrißermittlung 317.
Rückkehrkante 133, 141.
Rytz, -sche Achsenkonstruktion 161.

S.

Σ s. Symmetrieebene.
scharfgängig, -e Schraube 341f.
Schatten, Arten u. Darstellung 57f., Eigen-, Schlag- s. das., Halb-, Kern- (voller-) 249, -seite einer Ebene 50f.
Schattenkonstruktion, an ebenflächigen Körpern 48f., insbes. an *technischen Objekten*: Balkenverbindung 63 f., Konsole 60f., Schornsteinkopf 66f.; — an verschiedenen Flächen s. diese.
Schattierung, ebenflächig begrenzter Körper 265f., -sgrad: einer Ebene 266f., im Schlagschatten 267, 311; Herstellung der — 266f., — einer Kugel 267f.
scheinbar, -er Umriß s. das.
Schichtenlinie 247f.
Schiebung, 30, — der Rißachse 35.
Schlagschatten, Allgemeines 58, 201f., eigentlicher, uneigentlicher (ideeller) 50, -ermittlung durch die Methode des Zurückführens 211, Tangenten an -grenzen; — von Punkten, Geraden, Polygonen, Polyedern s. das; von Flächen (Kurven) auf besondre Flächen s. diese.
Schmiegebene, 131f., Konstruktion einer — 137, — bei Haupttangentenkurven 147.
Schmiegungskreis s. Krümmung.
Schnabel, -punkt, -spitze 119, 121.
Schnitte, *ebene* — (Kreis-) von verschiedenen Flächen s. diese.
Schnittkurve, Schnittlinie (Durchdringungskurve), ebenflächig begrenzter Körper 47f.; — *krummer Flächen*: allgemeine Methode 225, Tangenten an die — 145 (in einem Doppelpunkt 287); — von abwickelbaren Flächen mit einer krummen Fläche 239, von Kegel- und Zylinderflächen: allgemeinen 225f. (Tangenten 227), zweiter Ordnung 227 (unendlichferne Punkte, Asymptoten 227f.), in speziellen Lagen 228, Zerfallen ihrer — 228f., s. auch Raumkurve 3. O., — von Drehkegeln und Drehzylindern: bei speziellen Lagen gegen die Rißebenen (Tangenten) 230f., mit sich schneidenden Achsen 235; — zweier zylindrischen Tonnengewölbe 232f., — bei Stichkappen s. das.; — von Kugeln mit Kegeln, Zylindern (Stichkappen), Kugeln 257f.; von Drehflächen: 279, mit sich schneidenden Achsen 234f., 279. S. auch Flächen 2. O.
Schnittlinie bzw. Schnittpunkt, von Ebenen, Geraden, Kurven mit algebraischen Kurven, Flächen s. das.
Schrägriß (Schrägbild) 4, 21.
Schrauben, -bewegung (Schraubung) 330, Achse, Ganghöhe usw. 330, Auffindung der zu einem Drehwinkel gehörigen Verschiebung (Umkehrung) 333, flach(scharf)gängige —, -spindel, -mutter 341f.; *abwickelbare -flächen*: 243f., Doppelkurve 244, Eigenschatten 245, geodätische Linien 253, Krümmungslinien 286, Meridiankurve 245, Richtkegel 244, Schnitt: ebener 245, mit koachsialem Drehzylinder 244; Schlagschatten 245f., Verebnung 252f.; *allgemeine -flächen*: Eigenschaften, Benennungen 330f., Auf(Grund)riß eines Punktes aus dem Grund(Auf)riß 333 (334), Eigenschattengrenze (Umriß) 336f., ebener (Normal-)Schnitt (334) 335, Tangentenebene 335f., umschriebene abwickelbare Flächen längs Bahnschraubenlinien 335f.; Regel-flächen s. das., -konoid 343, *-linie:* 240f., Abwicklung 242, Achse, (reduzierte) Ganghöhe 240 (243), allgemeine, gewöhnliche 242, 248, Äquator(Kehl)-linie 331, Darstellung 240, rechts(links)gängig 241, Fall (Fallwinkel) 242, Fallrichtung (Orientierung) 332, Steigung, Steigwinkel 242, Krümmungsradius, Ort der

Hosted by Google

Krümmungsmittelpunkte 244, Parameter 242, Schlagschatten 245f., Tangentenfläche 243, -zylinder 240.
Sehstrahlen s. Projektionsstrahlen.
Seiten, eines Dreikants s. das., *-risse* (-rißebenen): 22f., ihre Verwendung als allgemeines Konstruktionsprinzip 29f.
Selbstberührungspunkt 115.
Selbstschatten s. Eigenschatten.
Sichtbarkeit, Beurteilung u. Gesetze über die — von Körper(Polyeder)-kanten 23f.
singulär, -e Kurven(Flächen)punkte 115, 119, 132, (144), -e (ähnliche) Punktreihe 15, 17, 39.
Sinn, einer Schraubung 330.
sphärisch, -es Dreieck 98, seine Auflösung 104; Punkt -er Krümmung 282.
Spitze, 115, 118, Schnabel- 119, — bei Evolventen 125, — bei Haupttangentenkurven 147, — eines Kegels 142, 187, — bei der Umrißermittlung 317.
Spurelemente, Spuren einer Ebene 44, Spurnormale, Spurparallele 83; über Nichtbenutzung der — 37.
stationär, -e Elemente s. Rückkehrelemente.
Steigwinkel (Steigung), einer Schraubenlinie, Schraubung 242, 330.
Steinschnitt, eines Kugelgewölbes 257.
Stellung, einer Ebene 8.
stetig (unstetig), bei Kurven: punktweise 111, in bezug auf die Tangente (Schmiegebene) 115 (131).
Stichkappe, 236f., 257f., Schnittkurve: einer kegelförmigen 238, zylindrischen 236f., kugelförmigen 258 — mit einer Tonne, einer kegelförmigen — mit einem Kugelgewölbe 258.
Strahl, -büschel 120, harmonische -en 175f., projizierende -en 12, 39; -kurve 119, Licht-, Projektions-, Seh- s. das.
Strecke, Auftragen von -n 93, Länge, Tafelneigung einer — 79f.
Streiflicht 52.
Striktionslinie 348.
Symmetrie, -ebene (Σ_{ik}): 14, 91, Bilder ihrer Punkte 20; orthogonale — 76, schiefe — 76 (bei Schatten 69).
System, affine, ähnliche, kollineare, kongruente -e s. das.

T.

Tafel, 11, -abstände: 12f., ihre Vorzeichen 14, ihr Unterschied 35; -neigung: einer Strecke 79f., einer Ebene 91.
Tangenten, an algebraische Kurven, Flächen, an Ellipsen, Schnitt(Durchdringungs)kurven s. das.; an ebene Schnitte, Eigenschattengrenzen von besondern Flächen s. diese; — ebener Kurven 114f., von Raumkurven 131, ihre Konstruktion 137; — an eine graphisch gegebene Kurve 118; Flächen-, Haupt-, konjugierte — s. das.; -charakter einer Kurve 119, seine Erhaltung (Änderung) bei Projektion 134f.; — an den *Schlagschatten* einer Randkurve in den Schnittpunkten mit der Eigenschattengrenze: Kegel, Zylinder 223f., beliebige Fläche 289; — an die Schlagschattengrenze im Schnittpunkt mit der Eigenschattengrenze einer Fläche 203; -(Tangential)-*ebene:* einer Raumkurve 131, einer Fläche 143, besondrer Flächen, s. diese; *-fläche* einer Raumkurve s. abwickelbare Fläche.
technisch, -er Lichtstrahl s. das.
Teil, -kurve s. algebraische Kurven und Flächen; -verhältnis 15.
tiefst s. höchst.
Tonnengewölbe, Stirn- und Wangenteile eines -s 235f.; s. auch Stichkappe.
Torsallinie 343, 348.
Torse 141.
Torsion, einer Raumkurve 132.
Torus, 278f., 286f.; Eigenschattengrenze (Umriß) mittels Hilfskugel 305f., Haupttangente 287, Konstruktion der Indikatrix 286f., Ort der parabolischen Punkte 284, Schatten an dem hyperbolischen Teil eines — 300f., *Schnitt:* ebener 278f., mit doppeltberührender Ebene (Kugel) 321 (322).
transzendent, -e ebene Kurven 112, -e Raumkurven 130, -e Flächen 139.
Tuschen, einer Fläche nach ihren Lichtgleichen 269f.

U.

Übungsaufgaben, über: Seitenrisse 28, Drehungen 34, Schattenbestimmung

Hosted by Google

an ebenflächigen Körpern 69, Maßverhältnisse 94, 108 f., Kegel(Zylinder)flächen (ihre Durchdringungen, Schattenkonstruktionen) 238, Drehkörper (Lichtgleichen, Schattenkonstruktion, Umriß) 318.
Umklappen, von Π_i in Π_k 19.
Umriß, scheinbarer, wirklicher 25, 28, 189, 201; bei konvexen Polyedern und krummen Flächen s. das.; -ermittlung, -punkte: der Eigenschattengrenze, der Lichtgleichen s. die besondre Fläche.
umschrieben, -e Flächen 145; s. auch abwickelbar; -e Hilfsflächen s. das.
uneben, -e Kurven s. Raumkurven.
unendlich, -ferne (uneigentliche) Elemente 8, 16, 72; — nahe Kurvenpunkte 114.
unstetig s. stetig.
unzugänglich, Lösung von Aufgaben über -e Elemente 104 f.

V.

Verbindung, von Punkten, Geraden s. das.; kürzeste -slinie zweier Punkte einer (abw.) Fläche (141), 148 f.
Verebnen, von verschiedenen Flächen s. diese.
Vereinigung, perspektive — affiner Figuren 76.
verkürzt, verlängert, -es Drehellipsoid 322.
Verkürzung, -sverhältnis einer Strecke 80, -swinkel 63 f., 277.
Verschwindung, -sebene 43, -slinie 43, -spunkt 40, 44.
Vervollständigung, — perspektiv-affiner (kollinearer) Figuren 75 (190).
Verwandelte, einer Kurve 141, 249 f.
Verwandtschaft, affine — 71 f., kollineare —, geometrische Punkt- 70.
vielfach, -e Kurve 144, 344.
voll, -es Licht, -er Schatten 249.
vollständig, -es Viereck 178.

W.

wahr, -e Gestalt, -er (wirklicher) Umriß s. das.
Wendelfläche (Wendeltreppen), 340 f., 343, Eigenschattengrenze 341.
Wendepunkt, Wendetangente 118, 121.
windschief, -e Gerade s. das.; -e *Fläche:* 140, 147, 343, algebraische -e Fläche 343 f. (Grad, Klasse, Ordnung 346), Berührungs(hyperboloid)paraboloid 346, Berührungspunkt einer Ebene 345, 348 f., vielfache Kurve 344 f., -e Drehfläche 320; Erzeugung, Leitlinien, Konstruktion von Erzeugenden 343 f., Eigenschattengrenze (Umriß) 349, Haupttangente 345, 349, oskulierendes Hyperboloid 349; -e Regelflächen zweiter Ordnung s. das.; *Schnitt:* ebener 344, mit einer Geraden 344; Striktionslinie 348, Tangentenebene 345, 348, -e Fläche als Wölbfläche 347, Zentralpunkt einer Erzeugenden 348.
Winkel (Neigungs-), eines Dreikants (sphärischen Dreiecks) s. das.; Drehungswinkel 30, — zweier (Halb-)Ebenen 29, 90, zweier Geraden (nach Laguerre 260) 30, 88; Normalrisse: rechter — 83, beliebiger — 88 f.; — einer Geraden mit einer Ebene 91, entsprechende rechte — affiner Figuren (Systeme) 77, 97.
Wulstfläche s. Torus.

Z.

Zeicheninstrumente, Zeichenmaterialien 59.
Zentralbeleuchtung 49.
Zentralprojektion (Zentralbild, Zentralriß), von Punkten, Geraden 1 f.
Zentralpunkt, -e von Erzeugenden windschie'er Flächen 348, einer Involution 17.
zentrisch, -kollineare ebene Systeme s. das.
Zerfallen, von Kurven, Schnittkurven s. das.
zugeordnet, -er Punkt einer Geraden (d. Lichtrichtung) 336 (337).
Zweige, einer Kurve 111.
zweimantelig, zweischalig, -es (Dreh-)Hyperboloid (322 f.) 325.
Zyklide s. Dupin.
Zyklisch, -e Flächen 143, -e Kurve 4. O. 278, 321.
Zykloiden, als Schatten der Schraubenlinie 245 f.
Zylinder, — *zweiter Ordnung:* elliptischer —: 196, seine Kreisschnitte 163,

Hosted by Google

259, ebenen Schnitte 197; schiefer Kreis- 163, 196, hyperbolischer, parabolischer — 196 f., 322; projizierender — 128; *beliebiger —, (Dreh-):* 142, 187 f., Darstellung 187 f., Durchdringung s. das., *Eigenschattengrenze:* 207 f., (208 f.), Tangente im Schnitt mit der Randkurve 224; Krümmungslinien 286, Lichtgleichen 311, *Schlagschatten* auf —: eines Punktes 210 f., einer Geraden 218, (217), einer beliebigen Kurve 210 f., einer ebenen Randkurve eines -s 2. O. auf diesen 221 f., Tangenten an ihn 224, auf einen zu einer Rißebene senkrechten — 214 f., von Kreisen auf Kreis- 214 f., eines -s auf eine Ebene 208; ebener *Schnitt:* 192 f., (153), seine Tangenten 189, (— ⊥ zu einer Rißebene 200 f.); Schnitt von -n 2. O. 196 f., mit Σ_{ik} oder Γ_{ik} 201; Tangentenebene 145, 188, einer Fläche umschriebener Licht- 201, Verebnung: 249, (241), eines schiefen Kreis- -s 250.

zylindrisch, -e Stichkappe s. das.

Hosted by Google

Namenverzeichnis.

Die *Ziffern* geben die Seiten des Bandes an, wo sich der Name (meist in den Fußnoten) vorfindet.

Alberti 3
Apollonius 180.
Arago 5.

Bardin 37.
Bergery 126.
Berzolari 121, 122.
Bézout 122.
Brasseur 75.
Brill 136.
Burmester 4, 126, 331, 338.

Cantor, M. 152, 320.
Chasles 260, 348.
Clebsch 17.
Cremona 71.
Czuber 116, 280.

Dandelin 153, 169.
Darboux 260.
Desargues 6, 22, 180.
Dingeldey 152, 153, 159.
Dunesme 306.
Dupin 5, 146, 147, 152, 173, 278, 280, 289, 290.
Dürer 3.

Enriques 45.
Euler 71, 140, 282.

Feldhaus 264.
Fiedler, W. 5, 75, 76, 332.
Frézier 5.

Gauß 284.
Gergonne 45.
Göller 351.
de la Gournerie 247, 290, 297, 331, 332.
Graßmann 9.
Gusserow 154.

Hachette 173, 331.
Hauck 3.
Haussner 6, 24, 234.
Hertzer 264.
Heumann 159.

Kajetan 304.
Klein, F. 260.
Klingenfeld 1, 4, 11, 22, 36, 37.
Kochansky 124.

Laguerre 260.
Lambert 3, 4, 266.
Lie 260.
Lindemann 17.
Loria 126.
Lüroth 17.

Mack 122.
Magnus 191.
Mannheim 36, 279.
zur Megede 59.
Mehmke 118, 126, 132, 278, 305.
Möbius 45, 71.
Monge 5, 6, 37, 140, 234, 247, 282.
Mossbrugger 161.
Müller, C. H. 1, 4.

Nicolaïdes 126.
Niemtschik 314.

Obenrauch 5.
Olivier 22.

Paillotte 162.
Papperitz s. Rohn.
Parent 320.
Pelz 154, 161
Peschka 4.
Pillet 262, 264, 291.
Plücker 45, 118, 121.
Pohlke 4, 331.
Poncelet 38, 45, 71, 173, 234, 260.
Poudra 180.
Presler 1, 4.
Proclus 152.

Quetelet 173.

Rohn-Papperitz 58, 193, 290, 332, 336, 338, 339.
Rytz 161.

Salfner 103.
Salmon 344.
Scheffers 140, 247, 280, 284.
Schellbach 159.
Schilling 136.
Schlesinger 4.
Schlömilch 154.
Schmid, Th. 154.
van Schooten 152.
Schreiber 274.
Schüssler 52, 105, 172, 280, 317.
Sobotka 332.
Stäckel 284.
Staudigl 4, 33, 38, 158.
v. Staudt 17, 118, 131, 132, 260.
Stevin 152.
Sturm 24, 83, 88.

Unger 291.

v. Villarceau 279.
Vitruvius 5.

Wiener, Chr. 1, 3, 22, 37, 58, 91, 103, 111, 115, 118, 131, 136, 265, 266, 279, 284.
Wren 320.

Zindler 17.

Hosted by Google

Druckfehlerberichtigungen und Ergänzung.

S. 8, Fußnote, 2. Zeile v. u. fehlt das Komma hinter „gehen“.

S. 15, 3. Zeile v. u. Nach „ein-eindeutig“ sind die Worte „und stetig“ einzuschalten. Die erste Gleichung auf S. 16 kann auch als Definitionsgleichung projektiver Punktreihen dienen.

S. 143. Nach der Überschrift von Nr. 73 ist ein Punkt statt des Kommas zu setzen.

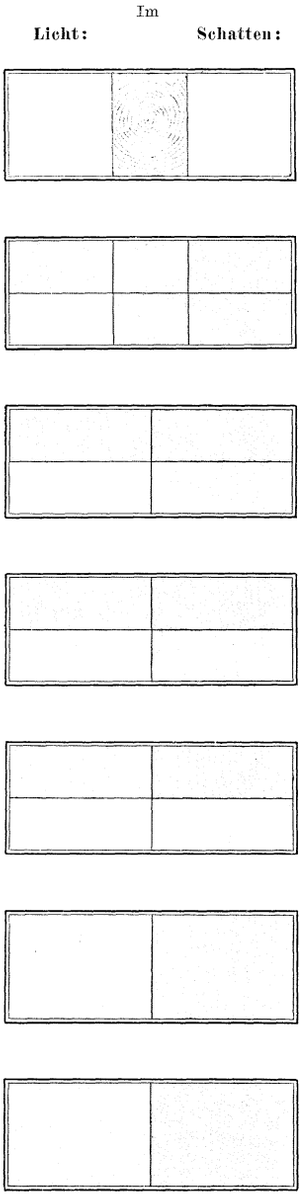
S. 156. In Fig. 131 soll e'' statt e' stehen.

S. 229. In Fig. 197 soll h' statt h stehen.

S. 239, 4. Zeile v. o. lies „Ordnungslinie“ statt „Ordungslinie“.

Hosted by Google

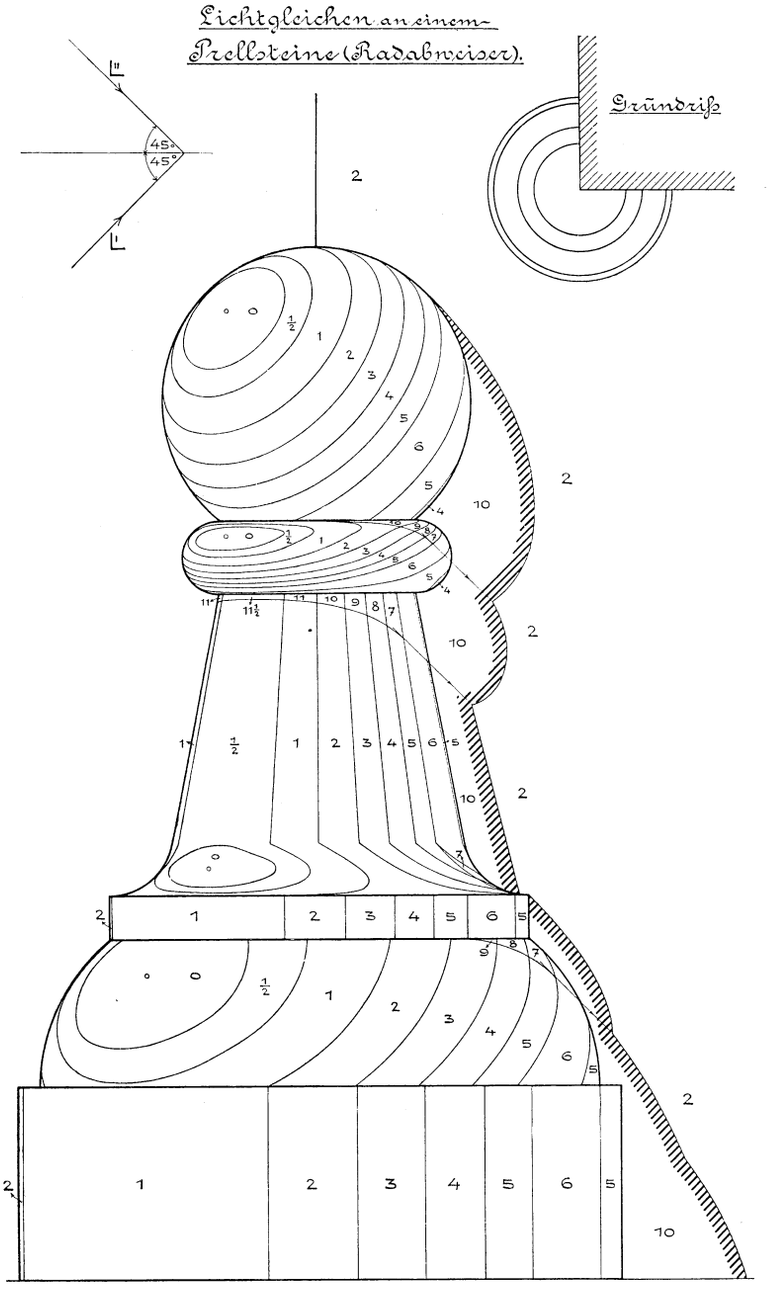
FARBENTAFEL.



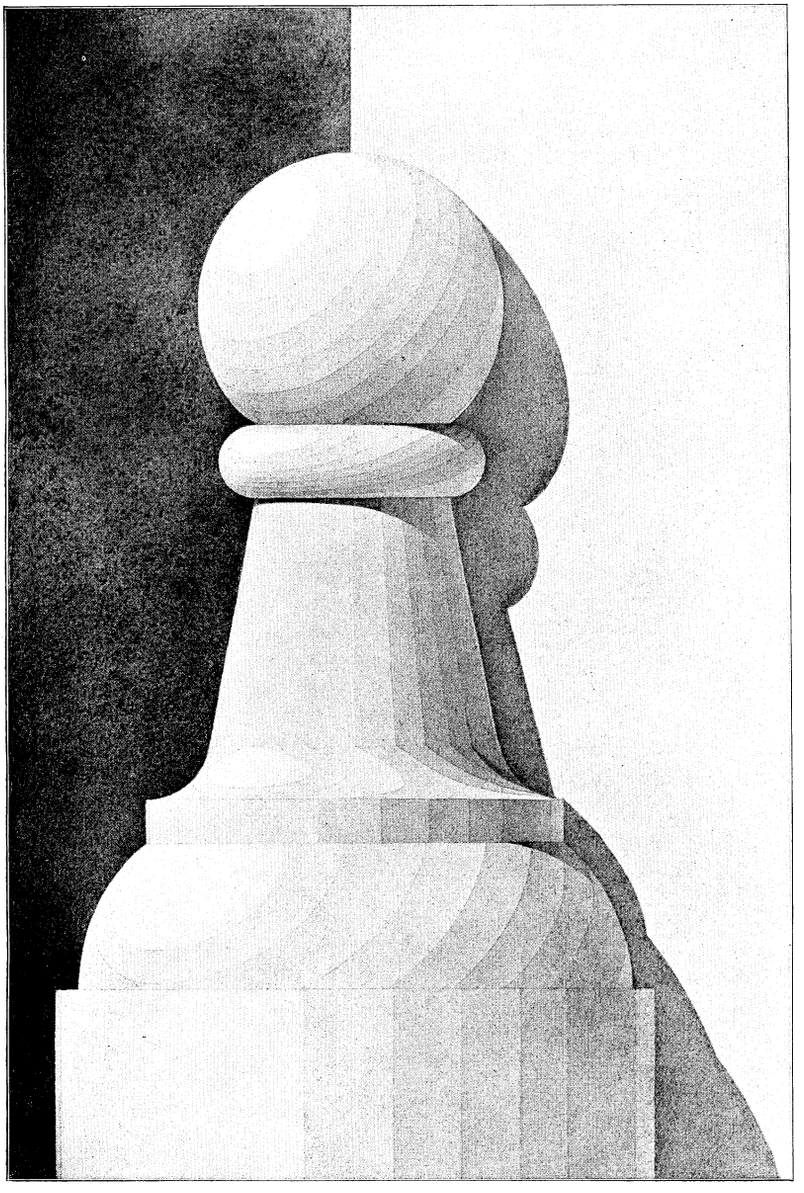
Hosted by Google

Hosted by Google

Hosted by Google



Hosted by Google



Hosted by Google

Hosted by Google

Abraham, Professor Dr. **M.,** Privatdozent an der Universität Göttingen, Theorie der Elektrizität. 2 Bände. I. Band: Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität. Mit einer Einleitung: Das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik. Von Prof. Dr. A. Föppl. 3. Auflage von Prof. Dr. M. Abraham. Mit 11 Figuren im Text. [XVIII u. 460 S.] gr. 8. 1907. In Leinw. geb. n. *M.* 12.— II. Band: Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Von Prof. Dr. M. Abraham. [X u. 404 S.] gr. 8. 1905. In Leinwand geb. n. *M.* 10.—

Blaschke, Regierungsrat Dr. **E.,** Professor an der Technischen Hochschule zu Wien, Vorlesungen über mathematische Statistik. Die Lehre von den statistischen Maßzahlen. Mit 17 Textfiguren und 5 Tafeln. [VIII u. 268 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. *M.* 7.40.

Burkhardt, Dr. **H.,** Professor an der Universität Zürich, Vorlesungen über die Elemente der Differential- und Integralrechnung und ihre Anwendung zur Beschreibung von Naturerscheinungen. Mit 38 Figuren im Text. [XI u. 252 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n. *M.* 6.—

Cesàro, Ernesto, Professor der Mathematik an der Königl. Universität Neapel, elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. Nach einem Manuskript des Verfassers deutsch herausgegeben von Dr. G. Kowalewski, Professor an der Universität Bonn. Mit 97 Figuren im Text. [VI u. 894 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. *M.* 15.—

Czuber, Dr. **Emanuel,** Professor an der Technischen Hochschule zu Wien, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. 2 Bände. 2., sorgfältig durchgesehene Auflage. gr. 8. 1906. In Leinwand geb. je n. *M.* 12.—
I. Band. Mit 115 Figuren im Text. [XIV u. 560 S.] — II. Band. Mit 87 Figuren im Text. [VIII u. 532 S.]

Disteli, Dr. **Martin,** Professor an der Technischen Hochschule zu Dresden, die Steinerschen Schließungsprobleme nach darstellend geometrischer Methode. Mit 10 lithogr. Tafeln. [XII u. 124 S.] gr. 8. 1888. geh. n. *M.* 4.—

Durège, Dr. **H.,** weil. Professor an der Universität Prag, Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen veränderlichen Größe. In 5. Auflage neu bearbeitet von Dr. L. Maurer, Professor an der Universität Tübingen. Mit 41 Figuren im Text. [X u. 397 S.] gr. 8. 1906. geh. n. *M.* 9.—, in Leinw. geb. n. *M.* 10.—

——— Theorie der elliptischen Funktionen. In 5. Auflage neu bearbeitet von Dr. L. Maurer, Professor an der Universität Tübingen. Mit 36 Figuren im Text. [VIII u. 436 S.] gr. 8. 1908. geh. n. *M.* 10.—, in Leinwand geb. n. *M.* 11.—

Ebner, Dr. **F.,** Oberlehrer an der Kgl. Maschinenbauschule zu Einbeck, Leitfaden der technisch wichtigen Kurven. Mit 93 Figuren im Text. [VIII u. 197 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. *M.* 4.—

Enriques, F., Professor an der Universität Bologna, Vorlesungen über projektive Geometrie. Deutsche Ausgabe von Dr. phil. Hermann Fleischer in Göttingen. Mit einem Einführungswort von F. Klein. Mit 187 Figuren im Text. [XIV u. 374 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M.* 8.—, in Leinwand geb. n. *M.* 9.—

Felgentraeger, Dr. **W.,** Privatdozent an der Technischen Hochschule zu Charlottenburg, Theorie, Konstruktion und Gebrauch der feineren Hebelwage. Mit 125 Figuren im Text. [VI u. 310 S.] gr. 8. 1907. In Leinw. geb. n. *M.* 8.—

Ferraris, Galileo, wissenschaftliche Grundlagen der Elektrotechnik. Nach den Vorlesungen über Elektrotechnik, gehalten in dem R. Museo Industriale zu Turin. Deutsch herausgegeben von Dr. Leo Finzi, Privatdozent an der Königl. Technischen Hochschule zu Aachen. Mit 161 Figuren im Text. [XII u. 358 S.] gr. 8. 1901. In Leinwand geb. n. *M.* 12.—

Hosted by Google

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

Weber, Dr. **H.**, u. Dr. **J. Wellstein**, Professoren an der Universität Straßburg i. E., Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Band. Elementare Algebra und Analysis. Bearbeitet von H. Weber. 2. Auflage. Mit 38 Textfiguren. [XVIII u. 539 S.] 1906. n. *M.* 9.60.

II. — Elemente der Geometrie. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal. 2. Auflage. Mit 251 Textfiguren. [XII u. 596 S.] 1907. n. *M.* 12.—

III. — Angewandte Elementar-Mathematik. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und R. H. Weber (Heidelberg). Mit 358 Textfiguren. [XIII u. 666 S.] 1907. n. *M.* 14.—

Wiener, Geh. Hofrat Dr. **Christian**, weil. Professor an der Großh. Polytechnischen Schule zu Karlsruhe, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. In 2 Bänden. gr. 8. geh. n. *M.* 30.—

I. Band. Geschichte der darstellenden Geometrie, ebenflächige Gebilde, krumme Linien (erster Teil), projektive Geometrie. Mit Figuren im Text. [XX u. 477 S.] 1884. Anastatischer Neudruck 1906, mit hinzugefügtem Register. geh. n. *M.* 12.—

II. — Krumme Linien (zweiter Teil) und krumme Flächen. Beleuchtungslehre, Perspektive. Mit Figuren im Text (und 4 bez. 2 Tafeln). [XXX u. 649 S.] 1887. geh. n. *M.* 18.—

Wüllner, Dr. **A.**, Professor der Experimentalphysik an der Kgl. Technischen Hochschule zu Aachen, Lehrbuch der Experimentalphysik. In 4 Bänden. Mit 1104 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren und 4 lithogr. Tafeln. gr. 8. 1896/1907:

Bei gleichzeitigem Bezuge aller 4 Bände ermäßigt sich der Gesamtpreis des Werkes geh. auf n. M. 44.—, in Halbfranz geb. auf n. M. 50.—

Einzeln:

I. Band. Allgemeine Physik und Akustik. 6. Auflage bearbeitet von A. Wüllner und A. Hagenbach. Mit 333 Abbildungen und Figuren im Text. [XIV u. 1058 S.] 1907. geh. n. *M.* 16.—, in Halbfranzband n. *M.* 18.—

II. — Die Lehre von der Wärme. 5. Auflage. Mit 131 Abbildungen und Figuren im Text. [XI u. 936 S.] 1896. geh. n. *M.* 12.—, in Halbfranzband n. *M.* 14.—

III. — Die Lehre vom Magnetismus und von der Elektrizität mit einer Einleitung: Grundzüge der Lehre vom Potential. 5. Auflage. Mit 341 Abbildungen und Figuren im Text. [XV u. 1415 S.] 1897. geh. n. *M.* 18.—, in Halbfranzband n. *M.* 20.—

IV. — Die Lehre von der Strahlung. 5. Auflage. Mit 299 Abbildungen und Figuren im Text und 4 lithogr. Tafeln. [XII u. 1042 S.] 1899. geh. n. *M.* 14.—, in Halbfranzband n. *M.* 16.—

Zöppritz, Dr. **K.**, weil. Professor an der Universität Königsberg i. Pr., Leitfaden der Kartenentwurfslehre. Für Studierende der Erdkunde und deren Lehrer. In 2., neubearbeiteter und erweiterter Auflage herausgegeben von Dr. A. Bludau, Professor am Gymnasium zu Coesfeld. In 2 Teilen. gr. 8.

I. Teil: Die Kartenprojektionslehre. Mit 100 Figuren im Text und zahlreichen Tabellen. [X u. 178 S.] 1899. geh. n. *M.* 4.80, in Leinwand geb. n. *M.* 5.80.

II. Teil: Kartographie und Kartometrie. Mit 12 Figuren und 2 Tabellen im Text und auf 2 Tafeln. [VIII u. 109 S.] 1908. geh. n. *M.* 3.60, in Leinwand geb. n. *M.* 4.40.

Hosted by Google